

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. М. Иванян

К теории ползучести вулканизата натурального каучука

Явление ползучести в твердом теле выражаемое изменением деформации во времени при постоянном напряжении (последствия—течения) или изменением напряжений во времени при постоянной деформации (релаксации) представляет большой изучный и практический интерес. Важность учета влияния ползучести на деформационно-напряженное состояние конструкции при их расчете в настоящее время общепризнано.

Резина, являясь материалом обладающим сравнительно большими упругими деформациями, обладает также свойством явно выраженной ползучести. Целью настоящей работы является установление дифференциальной связи между напряжением, деформациями и временем, описывающей как явление релаксации, так и явление последствия при одноосном напряженном состоянии (на основе произведенных автором испытаний [1, 2]).

Для семейства кривых релаксации соответствующих различным начальным относительным деформациям ε , абсолютное значение скорости падения выражаем в виде

$$\frac{d\sigma_p}{dt} = B(t)f(\varepsilon), \quad (1)$$

где σ_p —падение напряжения при релаксации (в кг/см²),

$B(t)$ —положительная монотонно убывающая функция времени, удовлетворяющая условию $B(\infty) = 0$.

Из уравнения (1) получаем:

$$\sigma_p = f(\varepsilon) \int_0^t B(t) dt = f(\varepsilon) \Omega(t). \quad (2)$$

Из семейства экспериментальных кривых релаксации, для любого фиксированного момента времени, путем подбора, выбрано следующее простое выражение функции $f(\varepsilon)$:

$$f(\varepsilon) = e^{\alpha\varepsilon}.$$

Следовательно будем иметь

$$\sigma_p = e^{\alpha\varepsilon} \Omega(t).$$

Нанеся последнее выражение на логарифмическую сетку для фиксированных моментов времени получаем:

$$\ln \sigma_p = \mu \varepsilon + \ln \Omega(t_\Phi),$$

где: $\ln \Omega(t_\Phi) = \text{const.}$

Беря значения σ_p и ε с кривых релаксации для фиксированных моментов времени, и построив график зависимости $(\ln \sigma_p, \varepsilon)$ выявлено, что все его точки располагаются вблизи прямой ($\mu = \text{const.}$), образующей угол 45° с осями координат, т. е. $\mu = 1$.

Следовательно:

$$\sigma_p = e^{\mu} \Omega(t).$$

Выражение функции $\Omega(t)$ подобрано в виде $\Omega(t) = A(1 - e^{-\gamma t})$, где: t — время в часах, A и γ — постоянные параметры.

Путем подбора, из кривых релаксации определены значения параметров $A = 0,4 \text{ кг/см}^2$; $\gamma = 5 \text{ 1/час}$.

Внеся найденное значение $\Omega(t)$ и $f(\varepsilon)$ в (2) получим

$$\sigma_p = e^{\mu} A (1 - e^{-\gamma t}),$$

откуда:

$$\frac{d\sigma_p}{dt} = A\gamma \cdot e^{\mu} e^{-\gamma t}. \quad (3)$$

Примем, что скорость падения напряжения при релаксации, в случае медленно и плавно изменяющейся во времени относительной деформации ε , можно также выразить зависимостью (3). Тогда полная скорость изменения напряжения будет выражаться:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_{\text{упр}}}{dt} - A\gamma e^{\mu} e^{-\gamma t}, \quad (4)$$

где $\frac{d\sigma_{\text{упр}}}{dt}$ — скорость изменения упругого напряжения.

По первоначальным мгновенным напряжениям и деформациям построена кривая мгновенного растяжения

$$\sigma_{\text{упр}} = f(\varepsilon),$$

для которой подобрано аналитическое выражение в виде

$$\sigma_{\text{упр}} = E(e^{\lambda \varepsilon} - 1). \quad (5)$$

Для используемого материала $E = 18 \text{ кг/см}^2$; $\lambda = 0,5$.

Зависимость (5) при найденных значениях E и λ дает хорошее совпадение с кривой мгновенного растяжения, кроме точек вблизи нуля: в точке $\varepsilon = 0,36$, где расхождение составляет $36,8\%$, в точке $\varepsilon = 5,44$, соответствующей наибольшей нагрузке, где расхождение составляет 19% и в точке $\varepsilon = 3,2$, где расхождение 8% . В остальных точках расхождение не превышает 5% . Следует предполагать, что опытные данные вышеуказанных точек несут случайный характер, и их можно исключить.

Внеся (5) в (4) будем иметь:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \lambda E e^{\lambda \epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} - A \tau e^{\epsilon} e^{-\tau t}. \quad (6)$$

Проверим применимость полученного основного дифференциального уравнения (6) для описания явления релаксации и последействия.

а) Релаксация

При релаксации $\epsilon = \text{const.}$ следовательно из (6) получим:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -A \tau e^{\epsilon} e^{-\tau t}.$$

Интегрируя в пределах от 0 до t будем иметь:

$$\sigma = \sigma_0 - A e^{\epsilon} (1 - e^{-\tau t}), \quad (7)$$

где: σ_0 — начальное напряжение.

Теоретические значения напряжений, вычисленные по (7) и снятые с опытных кривых релаксаций, а также относительные расхождения от опыта приведены в таблицах 1, 2, из которых видно хорошее совпадение теоретических результатов с экспериментальными.

б) Последействие

Рассматривается процесс последействия протекающий под действием постоянной нагрузки (Q). В этом случае напряжение в образце медленно монотонно возрастает во времени, вследствие сужения поперечного сечения образца от деформации ползучести.

Истинное напряжение при последействии определяем из условия постоянства объема образца по формуле

$$\sigma = \frac{Q}{F(t)},$$

где:

$$F(t) = \frac{F_0}{1 + \epsilon},$$

F_0 — площадь поперечного сечения образца в напряженном состоянии. Таким образом

$$\sigma = \frac{Q(1 + \epsilon)}{F_0}; \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{Q}{F_0} \frac{d\epsilon}{dt}.$$

Подставляя значение $\frac{d\sigma}{dt}$ в (6) и интегрируя, получим зависимость относительного удлинения от времени, при действии постоянной нагрузки Q , в виде:

$$\frac{E\lambda}{\lambda - 1} [e^{(\lambda - 1)\epsilon} - e^{(\lambda - 1)\epsilon_0}] + \frac{Q}{F_0} (e^{-\epsilon} - e^{-\epsilon_0}) = A(1 - e^{-\tau t}) \quad (8)$$

Решая (8) относительно ε получим:

$$\varepsilon = -2 \ln \frac{-18 \pm \sqrt{324 - \frac{4Q}{F_0} \left[18e^{-0.5\varepsilon_0} - \frac{Q}{F_0} e^{-\varepsilon} - 0.4(1 - e^{-\varepsilon}) \right]}}{\frac{2Q}{F_0}} \quad (9)$$

Из двух значений ε только значение квадратного корня с отрицательным знаком соответствует физическому смыслу задачи, так как при этом значения ε получаются больше начальных значений ε_0 .

Вычисленные значения ε по (9) сравнены с экспериментальными данными. Порядок расхождения почти такой же как и в случае реклексии (см. табл. 3, 4).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 13 II 1957

Վ. Մ. Իվանյան

ԲՆԱԿԱՆ ԿԱՌԻՉՈՒԿԻ ՎՈՒԼԿԱՆԻԶԱՏԻ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒՅՑԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս աշխատության նպատակն է գտնել լարման, դեֆորմացիայի և ժամանակի միջև ընդհանուր դիֆերենցիալ կապ, որը նկարագրի ինչպես ռելաքսացիայի, այնպես էլ հետազոտության երևույթը:

Ռելաքսացիայի կորերի բնտանիքի համար ընտրված է լարման անկման արագության համապատասխան արտահայտություն, որն իրենից ներկայացնում է հարաբերական դեֆորմացիայի և ժամանակի երկու ֆունկցիաների արտադրյալ:

Ռելաքսացիայի կորերից վերցնելով հարաբերական անկմարժային դեֆորմացիաների և նրանց համապատասխան իրական լարումների արժեքները, կառուցված է անկմարժային ձգման կորը, որի համար ընտրված արտահայտությունը տալիս է բավականին լավ համընկնում: Ընդունելով, որ հարաբերական դեֆորմացիայի բավականին դանդաղ և սահուն փոփոխման դեպքում լարման անկման արագությունը կարտահայտվի նույն տեսքով, ինչպես ռելաքսացիայի դեպքում, կազմված է իրական լարման լրիվ արագության արտահայտությունը, որը ներկայացնում է լարման և հարաբերական դեֆորմացիայի կապը:

Ստացված համապատասխան բանաձևերի միջոցով հաշված լարումների ու հարաբերական դեֆորմացիաների արժեքների և փորձնական կորերից ստացված համապատասխան արժեքների համեմատումը ցույց է տալիս բավականին լավ համընկնում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванян В. М. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, X, № 6, 1957.
2. Иванян В. М. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, XI, № 1, 1958.

Таблица 1 (релаксация)

№ № п/п	σ_0 (кг/см ²)	ε	При $t = 10,5$ мин.			При $t = 21$ мин.			При $t = 60$ мин.			При $t = 120$ мин.		
			σ (кг/см ²)		Расхо- жение от опыта (%)	σ (кг/см ²)		Расхо- жение от опыта (%)	σ (кг/см ²)		Расхо- жение от опыта (%)	σ (кг/см ²)		Расхо- жение от опыта (%)
			по дан- ным опы- та	по ф-ле (7)		по дан- ным опы- та	по ф-ле (7)		по дан- ным опы- та	по ф-ле (7)		по дан- ным опы- та	по ф-ле (7)	
1	5,643	0,36	5,3	5,3	-3,9	5,1	5,2	-1,2	5,1	5,1	0,7	4,9	5,1	-2,4
2	18,228	1,36	17,3	17,3	-0,4	16,9	16,9	-0,4	16,9	16,7	1,1	15,9	16,7	-4,7
3	35,520	2,28	33,4	33,2	0,6	32,6	32,3	0,9	32,6	31,7	2,9	31,4	31,6	-0,6
4	66,050	3,2	60,3	60,3	-0,0	59,3	57,9	2,3	58,9	56,3	4,5	57,3	56,2	1,9
5	85,1	3,6	73,2	76,9	-1,1	71,8	73,5	-2,4	70,8	71,2	-0,6	68,9	71,1	-2,9
6	114,6	4,0	93,9	101,8	-8,4	91,6	96,5	-5,4	90,4	92,9	-2,7	88,4	92,7	-4,9
7	140,0	4,4	116,8	121,8	-4,3	113,7	114,1	-0,4	112,3	108,9	2,9	108,6	108,6	0,0
8	162,9	4,6	128,0	138,7	-8,3	124,7	128,7	-3,2	121,3	121,7	-0,3	118,0	121,5	-2,9
9	212,0	5,0	160,9	176,0	-9,4	157,1	161,0	-2,5	153,7	150,3	2,2	149,3	150,3	-0,7
10	232,0	5,2	178,9	189,9	-6,1	175,1	172,2	1,6	170,2	160,1	5,9	165,4	159,6	3,6
11	255,8	5,4	194,8	206,2	-5,8	189,9	185,5	2,4	184,2	171,3	6,9	176,4	170,7	3,3
12	318,1	5,4	227,6	264,4	-16,2	219,9	241,9	10	213,3	226,6	-6,3	207,8	225,9	-8,8

№ № п/п	σ_0 (кг/см ²)	ϵ	При $t = 180$ мин.		
			σ (кг/см ²)		Расхож- дение от опыта (%)
			по данным опыта	по ф-ле (7)	
1	5,643	0,36	4,7	5,1	-7,6
2	18,228	1,76	15,9	16,7	-4,7
3	35,520	2,38	31,4	31,6	-0,6
4	66,050	3,2	56,6	56,2	0,6
5	85,1	3,6	68,9	71,1	-2,9
6	114,6	4,0	87,9	92,7	-5,4
7	140,0	4,4	107,8	108,7	-0,8
8	162,9	4,6	117,0	121,4	-3,7
9	212,0	5,0	148,3	150,3	-1,4
10	232,0	5,2	164,4	159,6	3,0
11	255,8	5,4	176,4	170,7	3,3
12	318,1	5,4	207,8	226,0	-8,8

Таблица 2 (релаксация)

При $t = 240$ мин.			При $t = 300$ мин.		
σ (кг/см ²)		Расхождение от опыта (%)	σ (кг/см ²)		Расхождение от опыта (%)
по данным опыта	по ф-ле (7)		по данным опыта	по ф-ле (7)	
4,5	5,0	-13,0	4,5	5,1	-13
15,5	16,7	-7,3	15,1	16,7	-10,7
31,4	31,6	-0,6	31,2	31,6	1,2
56,3	56,2	0,0	56,3	56,2	0,0
67,9	71,1	-4,6	66,9	71,1	-6,3
85,9	92,7	-7,8	85,2	92,7	-8,8
105,1	108,7	-3,4	103,4	108,7	-5,2
116,2	121,4	-4,5	111,2	121,5	-9,3
146,3	150,3	-2,7	145,4	150,3	-3,4
162,5	159,6	1,8	160,6	159,6	0,6
173,5	170,7	1,6	171,6	170,7	0,5
204,5	225,9	-11,0	201,1	225,9	-12,3

Таблица 3 (последствие)

№ № п/п	ε	При $t = 10,5$ мин.			При $t = 21$ мин.			При $t = 60$ мин.			При $t = 120$ мин.		
		ε		Расхож- дение от опыта (%)	ε		Расхож- дение от опыта (%)	ε		Расхож- дение от опыта (%)	ε		Расхож- дение от опыта (%)
		по дан- ным опы- та	по ф-ле (9)		по дан- ным опы- та	по ф-ле (9)		по дан- ным опы- та	по ф-ле (9)		по дан- ным опы- та	по ф-ле (9)	
1	2,9	2,9	3,2	-11,4	2,9	3,1	-5,6	3,0	3,1	-5	3,0	3,1	-4,1
2	3,4	3,5	3,1	13,2	3,6	3,8	-6,2	3,6	3,9	-6,9	3,64	3,9	-7,3
3	3,7	3,9	3,9	0,3%	4,0	4,0	-0,9	4,1	4,1	-0,5	4,1	4,1	0
4	5,0	5,5	5,4	0,9	5,6	5,7	-1,3	5,65	5,8	-2,7	5,7	5,8	-1,6
5	5,2	5,8	5,7	2,5	5,9	6,01	-0,71	6,1	6,1	-1,2	6,1	6,1	0
6	5,2	5,9	5,7	4,2	6,1	6,0	1,3	6,2	6,2		6,2	6,2	0
7	5,4	6,1	5,9	2,6	6,2	6,2	0	6,3	6,4	-2,0	6,5	6,4	0,6
8	5,7	6,7	6,3	4,7	6,9	6,7	2,7	7,2	6,9	3,9	7,3	7,0	4,5
9	6,0	6,7	6,7	-0,8	6,9	7,2	-3,8	7,6	7,4	-12,5	7,9	7,5	5,5

№ № п/п	ε_0	При $t = 180$ мин.		
		ε		Расхож- дение от опыта (%)
		по данным опыта	по ф-ле (9)	
1	2,9	3,0	3,1	-3,0
2	3,4	3,7	3,9	-5,6
3	3,7	4,1	4,1	0,5
4	5,0	5,7	5,8	-1,0
5	5,2	6,1	6,1	-0,5
6	5,2	6,3	6,2	2,1
7	5,4	6,5	6,4	1,4
8	5,7	7,4	7,0	4,9
9	6,0	8,0	7,6	6,8

Таблица 4 (последствие)

При $t = 240$ мин.			При $t = 300$ мин.		
ϵ		Расхождение от опыта (%)	ϵ		Расхождение от опыта (%)
по данным опыта	по ф-ле (9)		по данным опыта	по ф-ле (9)	
3,03	3,1	-3,0	3,3	3,1	3,7
3,7	3,9	-5,6	3,7	4,7	-2,6
4,1	4,1	0,5	4,2	4,1	1,4
5,8	5,8	0	5,8	5,8	0
6,1	6,1	-0,5	6,1	6,1	0
6,3	6,2	2,4	6,3	6,2	2,8
6,6	6,4	1,7	6,6	6,4	1,7
7,4	7,0	5,1	7,4	7,5	-0,7
8,1	7,5	7,8	8,2	7,4	9,5