

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. И. Розовский

Приложение способа двумерных интегральных уравнений к изучению ползучести сферической оболочки в случае зависимости физических параметров материала от температуры и времени

Способ двумерных интегральных уравнений наиболее целесообразно применять при решении задач, связанных с анизотропными и неоднородными упруго-ползучими (наследственными) телами. Впервые он был применен автором [1] при рассмотрении деформации полой сферы, обладающей анизотропией, с учетом влияния фактора времени. Этот способ состоит в приведении интегро-дифференциального уравнения для перемещения к соответствующему виду, которое затем с помощью двух последовательных подстановок приводится к двумерному интегральному уравнению специального вида, могущему, в частном случае, вырождаться в ординарное интегральное уравнение. Используя результаты решения этого уравнения, а также двух ординарных интегральных уравнений, возникающих в связи с появлением двух произвольных функций времени, устанавливается характер изменения напряжений во времени.

Эксперименты показывают, что влияние температуры на параметры, определяющие упруго-мгновенную и наследственную составляющие деформации, значительно усиливаются с повышением температуры. Так, например, для стали при повышении температуры испытания с 25 до 450° модули E и G падают на 20% [2]. Практическое значение изменения упомянутых параметров при значительных изменениях температуры весьма велико. При этом объемное расширение, происходящее в результате повышения температуры на T градусов, не пропорционально T . Поэтому учет этих особенностей при расчетах деталей машин, работающих в условиях широкого диапазона изменений температур, обязателен.

В настоящей работе рассмотрен вопрос о напряжениях в симметрично нагретой сферической оболочке с учетом зависимости коэффициентов Ламе и ядер релаксации от температуры тела, при изменении последней в достаточно широком интервале.

Итак, пусть замкнутая сферическая оболочка с внешним и внутренним радиусами a и b , свободна, в начальный момент времени, от

внешних сил и начальных напряжений при равномерно-распределенной температуре.

Пусть далее, начиная с некоторого момента времени температура в сферической оболочке становится неравномерно-распределенной, причем предполагается, что температура $T = T(r, t)$ известна. Тогда в ней возникнут определенной величины напряжения и деформации.

Определим радиальное перемещение и напряжения, возникающие в упомянутом теле с учетом изменяемости упругих постоянных и характеристик релаксации от температуры и времени.

Компоненты напряжения в сферических координатах будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_r = \lambda_1 \theta + 2\mu_1 \frac{\partial u}{\partial r} - f(T) - \\ - \int_{t_0}^t \left[\varphi_1(t, \tau; r) \theta(r, \tau) + 2\psi_1(t, \tau; r) \frac{\partial u}{\partial r} \right] d\tau; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \lambda_1 \theta + 2\mu_1 \frac{u}{r} - f(T) - \\ - \int_{t_0}^t \left[\varphi_1(t, \tau; r) \theta(r, \tau) + 2\psi_1(t, \tau; r) \frac{u(r, \tau)}{r} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

где $\theta(r, t) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} + \frac{2u(r, t)}{r}$, $u(r, t)$ — перемещение.

Здесь $\lambda_1(r, t) = \lambda[T(r, t); r]$, $\mu_1(r, t) = \mu[T(r, t), t]$ — коэффициенты Ламе, $f(T) = \alpha_1(r, t) \beta_1(r, t) T(r, t) = \alpha[T(r, t), t] \beta[T(r, t), t] \cdot T(r, t)$ — объемное расширение, $\alpha_1(r, t)$ — коэффициент линейного расширения, $\beta_1 = 3\lambda_1 + 2\mu_1$, $\varphi_1(t, \tau; r) = \varphi[t, \tau; T(r, \tau)]$, $\psi_1(t, \tau; r) = \psi[t, \tau; T(r, \tau)]$ — ядра релаксации, поскольку, по предположению, температура сферической оболочки считается известной функцией радиуса-вектора r и времени t . Формулы (1) и (2) представляют собою обобщение соответствующих зависимостей Вольтерра [3].

Подставляя σ_r , $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ из (1) и (2) в уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0,$$

получим исходное интегро-дифференциальное уравнение относительно перемещения u , которое представим в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right] - \frac{4}{r} \frac{\partial \mu_1}{\partial r} u - \frac{\partial f_1}{\partial r} = \\ = \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial r} \left\{ [\varphi_1(t, \tau; r) + 2\psi_1(t, \tau; r)] \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right\} d\tau - \end{aligned} \quad (3)$$

$$- \frac{4}{r} \int_{t_0}^t \frac{\partial \psi_1(t, \tau; r)}{\partial r} u(r, \tau) d\tau.$$

Положим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right] = z(r, t). \quad (4)$$

Из (4) следует

$$u(r, t) = \frac{1}{3r^2} \int_a^r (r^3 - \rho^3) z(\rho, t) d\rho + c_1(t)r + \frac{c_2(t)}{r^2} \quad (5)$$

где $f_1 = f[T(r, t)]$; $c_1(t)$ и $c_2(t)$ — произвольные функции времени, которые определяются из условий на границе

$$\left\{ \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) + 2\mu_1 \frac{\partial u}{\partial r} - f_1 - \int_{t_0}^t \left[\varphi_1(t, \tau; r) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) + 2\psi_1(t, \tau; r) \frac{\partial u}{\partial r} \right] d\tau \right\}_{r=a}^{r=b} = 0, \quad (6)$$

после того, как будет найдено $z(r, t)$.

Подставляя (4) и (5) в уравнение (3), получим после соответствующих преобразований, двумерное интегральное уравнение для определения $z(r, t)$:

$$\begin{aligned} z(r, t) + \int_a^r k_1(t; r, \rho) z(\rho, t) d\rho - \int_{t_0}^t k_2(t, \tau; r) z(r, \tau) d\tau = \\ = \int_{t_0}^t \int_a^r k_3(t, \tau; r, \rho) z(\rho, \tau) d\rho d\tau + F(r, t; c_1, c_2), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$k_1(t, r, \rho) = \frac{1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\lambda_1 + 2\mu_1) - \frac{4}{3r^3} (r^3 - \rho^3) \frac{\partial \mu_1}{\partial r} \right],$$

$$k_2(t, \tau; r) = \frac{\varphi_1(t, \tau; r) + 2\psi_1(t, \tau; r)}{\lambda_1 + 2\mu_1},$$

$$\begin{aligned} k_3(t, \tau; r, \rho) = \frac{1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [\varphi_1(t, \tau; r) + 2\psi_1(t, \tau; r)] - \right. \\ \left. - \frac{4}{3r^3} (r^3 - \rho^3) \frac{\partial \psi_1(t, \tau; r)}{\partial r} \right\}, \end{aligned}$$

$$F(r, t; c_1, c_2) = \frac{1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left\{ \frac{4}{r} \left(c_1 r + \frac{c_2}{r^2} \right) \frac{\partial \mu_1}{\partial r} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{r} \int_{t_0}^t \left[c_1(\tau) r + \frac{c_2(\tau)}{r^2} \right] \frac{\partial \psi_1(t, \tau; r)}{\partial r} d\tau - 3c_1 \frac{\partial}{\partial r} (\lambda_1 + 2\mu_1) + \\
& + 3 \int_{t_0}^t c_1(\tau) \frac{\partial}{\partial r} [\varphi_1(t, \tau; r) + 2\psi_1(t, \tau; r)] d\tau \Big\}.
\end{aligned}$$

Итак, задача свелась к решению уравнения (7), усложненного вида, благодаря наличию в нем, наряду с двумерным, двух различных ординарных интегральных членов, содержащих неизвестную функцию.

Это уравнение может быть решено либо способом Вольтерра [4], либо непосредственно, методом последовательных приближений.

Применим первый способ, поскольку, при этом, вопрос об исследовании сходимости последовательных приближений отпадает, ибо решение задачи будет связано с нахождением только резольвент соответствующих ядер.

Этот способ состоит в том, что с помощью двух специальных подстановок, интегральное уравнение типа (7) можно привести к двумерному интегральному уравнению, не содержащему ординарные интегралы.

Пользуясь им, опуская промежуточные выкладки окончательно будем иметь

$$w(r, t) = \int_{t_0}^t \int_a^r Q(t, \tau; r, \rho) w(\rho, \tau) d\tau d\rho + F(r, t; c_1, c_2), \quad (8)$$

где

$$Q(t, \tau; r, \rho) = Q_1(t, \tau; r, \rho) + \int_{\tau}^t Q_1(t, \tau_1; r, \rho) R_2(\tau_1, \tau; \rho) d\tau_1,$$

$$\begin{aligned}
Q_1(t, \tau; r, \rho) &= k_3(t, \tau; r, \rho) - k_2(t, \tau; r) R_1(\tau; r, \rho) - \\
&- \int_{\tau}^t k_2(t, \tau_1; r, \rho_1) R_1(\tau_1; \rho_1, \rho) d\tau_1,
\end{aligned}$$

где $R_1(t; r, \rho)$ — резольвента ядра $k_1(t; r, \rho)$,

$R_2(t, \tau; r)$ — резольвента ядра $k_2(t, \tau; r)$.

Функции $z(r, t)$ и $w(r, t)$ связаны между собою следующим соотношением

$$\begin{aligned}
z(r, t) &= w(r, t) + \int_{t_0}^t R_2(t, \tau; r) w(r, \tau) d\tau - \\
&- \int_a^r R_1(t, r, \rho) w(\rho, t) d\rho -
\end{aligned} \quad (9)$$

$$- \int_a^t \int_a^r R_1(t; r, \rho) R_2(t, \tau; \rho) w(\rho, \tau) d\tau d\rho.$$

Решение полученного интегрального уравнения (8) находится обычным путем, методом резольвенты.

Будем иметь

$$w(r, t) = F(r, t; c_1, c_2) + \int_a^t \int_a^r R(t, \tau; r, \rho) F(\rho, \tau; c_1, c_2) d\tau d\rho, \quad (10)$$

где $R(t, \tau; r, \rho)$ — резольвента ядра $Q(t, \tau; r, \rho)$.

Подставляя последовательно (10) в (9) и далее в (5), получим искомое выражение для перемещения u , которое будет зависеть от двух произвольных функций $c_1(t)$ и $c_2(t)$. Для определения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ нужно использовать следующие соотношения

$$\begin{aligned} u(a, t) &= c_1 a + \frac{c_2}{a^2}, \\ u(b, t) &= \frac{1}{3b^2} \int_a^b (b^3 - \rho^3) z(\rho, t) d\rho + c_1 b + \frac{c_2}{b^2}, \\ \frac{\partial u(a, t)}{\partial r} &= c_1 - \frac{2c_2}{a^3}, \\ \frac{\partial u(b, t)}{\partial r} &= \frac{1}{3} \int_a^b \left(1 + \frac{2\rho^3}{b^3}\right) z(\rho, t) d\rho + c_1 - \frac{2c_2}{b^3} \end{aligned} \quad (11)$$

где $z(r, t)$ определяется из соотношения (9) с учетом (10).

Подставляя (11) в (6), получим систему двух обыкновенных интегральных уравнений, из которых определяются функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$. Эта система имеет единственное решение.

2. Можно указать два случая, когда определение перемещения и напряжений в рассматриваемом теле сводится к решению обыкновенных интегральных уравнений.

Первый случай.

Предположим, что $\frac{\partial u_1}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial \phi_1(t, \tau; r)}{\partial r} = 0$.

Тогда будем иметь

$$\theta(r, t) = \frac{f_1 + c_1}{\lambda_1 + 2\mu} + \int_a^t \frac{\varphi_1(t, \tau; r) + 2\phi(t, \tau)}{\lambda_1 + 2\mu} \theta(r, \tau) d\tau, \quad (12)$$

Определяя $\theta(r, t)$ из (12), получим

$$\theta(r, t) = \frac{f_1 + c_1}{\lambda_1 + 2\mu} + \int_a^t P(t, \tau; r) \frac{f_1 + c_1}{\lambda_1 + 2\mu} d\tau, \quad (13)$$

где $P(t, \tau, r)$ — резольвента ядра $\frac{\varphi_1(t, \tau; r) + 2\psi(t, \tau)}{\lambda_1 + 2\mu}$.

Так как объемное расширение $\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u)$, то из (13) следует

$$u = \int_a^r \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \frac{f_1 + c_1}{\lambda_1 + 2\mu} d\rho + \int_a^r \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 d\rho \int_0^t P(t, \tau; \rho) \frac{f_1 + c_1}{\lambda_1 + 2\mu} d\tau + \frac{c_2}{r^2}.$$

Неизвестные функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$ определяются из двух уравнений, получающихся в результате использования условий (6). Зная перемещение u , легко получить σ_r , $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$.

Второй случай.

Предположим, что $\lambda_1 = \mu_1 = \lambda_0 e^{-mT}$, $\varphi_1(t, \tau; r) = \psi_1(t, \tau; r) = \varphi_0(t, \tau) e^{-mT}$, где m — постоянная для данного материала, λ_0 и $\varphi_0(t, \tau)$ — коэффициенты Ламе и ядро релаксации при $T = T_0$, где T_0 — комнатная температура. Температура T попрежнему зависит от r и t .

Уменьшение физико-механических характеристик пропорционально температурному множителю, экспоненциально убывающему с ростом температуры, экспериментально подтверждается [5].

Будем иметь

$$v(r, t) - T_1 = \int_{t_0}^t \frac{\varphi_0(t, \tau)}{\lambda_0} v(r, \tau) d\tau, \quad (14)$$

где

$$v = 3 \frac{\partial \theta}{\partial r} - 3 m \theta \frac{\partial T}{\partial r} + 4 \frac{m}{r} u \frac{\partial T}{\partial r}, \quad T_1 = 5 \left[\frac{\partial}{\partial r} (z_1 T) - m z_1 T \frac{\partial T}{\partial r} \right].$$

Из (14) следует

$$3 \frac{\partial \theta}{\partial r} - 3 m \theta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{4m}{4} u \frac{\partial T}{\partial r} = \Phi(r, t). \quad (15)$$

Здесь $\Phi(r, t) = T_1 + \int_{t_0}^t P_1(t, \tau) T_1 d\tau$ есть обобщенная температура, где

$P_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $\varphi_0(t, \tau)/\lambda_0$.

Уравнение (15) по отношению к u по существу дифференциальное (ибо в нем $\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u)$), которое при отбрасывании температурного последующего слагаемого, переходит в уравнение для соответствующей задачи идеально упругого тела.

Поскольку решение этого уравнения неизвестно, то воспользоваться выведенным нами в [6] правилом перехода от известного решения задачи без последствия (ползучести) к решению ее с учетом такового, невозможно.

Поэтому продолжим решение задачи далее.

С помощью подстановки (4), уравнение (15) приводится к следующему

$$z(r, t) - \int_a^r k(t; r, \rho) z(\rho, t) d\rho = g(r, t), \quad (16)$$

где

$$k(t; r, \rho) = \frac{m}{9} \left(5 + \frac{4\rho^3}{r^3} \right) \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$g(r, t) = \frac{m}{3} \left(5c_1 - \frac{4c_2}{r^3} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \Phi(r, t).$$

Определяя $z(r, t)$ из уравнения (16), получим

$$z(r, t) = g(r, t) + \int_a^r R_3(t; r, \rho) g(\rho, t) d\rho, \quad (17)$$

где $R_3(t; r, \rho)$ — резольвента ядра $k(t; r, \rho)$.

Подставляя (17) в формулу (5), получим

$$u = \int_a^r R_4(t; r, \rho) g(\rho, t) d\rho + c_1 \left[r + \frac{5m}{3} \int_a^r R_1(t; r, \rho) \frac{\partial T}{\partial \rho} d\rho \right] +$$

$$+ c_2 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{4m}{3} \int_a^r R_4(t; r, \rho) \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial T}{\partial \rho} d\rho \right], \quad (18)$$

где

$$R_4(t; r, \rho) = \frac{1}{3r^2} \left[r^3 - \rho^3 + \int_\rho^r (r^3 - \rho_1^3) R(t; \rho_1, \rho) d\rho_1 \right]. \quad (19)$$

Функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$, фигурирующие в (18), выражаются следующими формулами

$$c_1 = \frac{a^3 B_2 S_a - b^3 S_b}{b^3 B_1 - a^2 B_2}, \quad c_2 = \frac{5a^3 b^3 (S_b - B_1 S_a)}{4(b^3 B_1 - a^2 B_2)}, \quad (20)$$

где

$$B_1 = 1 + \frac{m}{3} \int_a^b \frac{\partial T}{\partial \rho} \left[\frac{\partial R_4(t; r, \rho)}{\partial r} + \frac{R_4(t; r, \rho)}{b} \right]_{r=b} d\rho,$$

$$B_2 = 1 + mb^3 \int_a^b \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial T}{\partial \rho} \left[\frac{\partial R_4(t; r, \rho)}{\partial r} + \frac{2R_4(t; r, \rho)}{3b} \right]_{r=b} d\rho,$$

S_a и S_b — значения функции

$$S(r, t) = \alpha T + \int_{t_0}^t P(t, \tau) \alpha T d\tau$$

при $r = a$ и $r = b$ соответственно.

Формулы (20) получены в результате решения системы алгебраических уравнений, образованных путем использования граничных условий (6).

Выражения для σ_r будет

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \lambda_1 \left(A_r + 5c_1 M_r - \frac{4c_2}{r^3} N_r - 5\alpha_1 T \right) - \\ & - \int_{t_0}^t \varphi_1(t, \tau; r) \left(A_r + 5c_1 M_r - \frac{4c_2}{r^3} N_r \right) d\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} A_r(r, t) &= 3R_4(t; r, r)g(r, t) + 3 \int_a^r V(t; r, \rho) d\rho, \\ M_r(r, t) &= 1 + mR_4(t; r, r) \frac{\partial T}{\partial r} + m \int_a^r V(t; r, \rho) \frac{\partial T}{\partial r} d\rho, \\ N_r(r, t) &= 1 + mR_4(t; r, r) \frac{\partial T}{\partial r} + mr^3 \int_a^r V(t; r, \rho) \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial T}{\partial r} d\rho, \\ V(t, r, \rho) &= \frac{\partial R_4(t; r, \rho)}{\partial r} + \frac{2R_4(t; r, \rho)}{3r}. \end{aligned}$$

Чтобы получить формулы для $\sigma_\theta = \sigma_z$, достаточно в (21) индекс r заменить индексом θ (или z). При этом

$$\begin{aligned} A_\theta(r, t) &= R_4(t; r, r)g(r, t) + \int_a^r W(t, r, \rho) d\rho, \\ M_\theta(r, t) &= 1 + \frac{m}{3} R_4(t; r, r) \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{m}{3} \int_a^r W(t, r, \rho) \frac{\partial T}{\partial r} d\rho, \\ N_\theta(r, t) &= \frac{3}{2} + \frac{m}{3} R_4(t; r, r) \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{mr^3}{3} \int_a^r W(t, r, \rho) \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial T}{\partial r} d\rho, \\ W(t, r, \rho) &= \frac{\partial R_4(t; r, \rho)}{\partial r} + \frac{4R_4(t; r, \rho)}{r}, \quad A_\theta = A_\varphi, \quad M_\theta = M_\varphi, \quad N_\theta = N_\varphi. \end{aligned}$$

В качестве иллюстрации рассмотрим стальной полый шар со следующими параметрами: $m = 0,00081^\circ\text{C}$ (по экспериментальным данным Зайкова [5]), $a = 30 \text{ см}$, $b = 33 \text{ см}$.

$$T = \frac{9900}{r} + 670, \quad T(a) = 1000^\circ\text{C}, \quad T(b) = 970^\circ\text{C}, \quad \alpha_0 = 11 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C},$$

$$P(s) = 0,0175 \left(\frac{s}{33} \right)^{0,75} e^{-\sqrt[4]{\frac{s}{33}}}, \quad \text{где } s = t - \tau \text{ (по Бронскому [7])}.$$

Тогда приближенно получим

$$u = (0,1165 - 0,0076 e^{-\sqrt[4]{\frac{r}{33}}}) (0,9853 - 0,04097 r - \frac{17,85}{r} - \frac{525,5}{r^2} - \frac{2253}{r^3} + \frac{1898}{r^4} + \frac{46}{r^2} \ln r + \frac{3,53}{r^2} \ln r).$$

В частности, например, установившееся значение деформации на внешней поверхности будет $\varepsilon = 0,0051$.

Днепропетровский горный институт

Поступило 28 V 1957

Մ. Ի. Ռոզովսկի

ԳՆԴԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍՈՂՔԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿԶԱՓ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՂԱՆԱԿՈՎ, ԵՐԲ ՆՅՈՒԹԻ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԸ ԿԱԽՎԱԾ ԵՆ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԻՑ ԵՎ ԺԱՄԱՆԱԿԻՑ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ քննարկվում է սիմետրիկ տաքացվող գնդալին թաղանթի լարվածությունը, երբ Լամեի գործակիցները և ուղղահայացի խառակտերիստիկները կախված են ջերմաստիճանից ու ժամանակից:

Լարվածության կոմպոնենտները սֆերիկ կոորդինատներով վերցված են (1) և (2) տեսքով:

Տեղադրելով հալասարակշռության հավասարման մեջ σ_r , $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ արտեքները (1) և (2) առնչություններից, և կատարելով համապատասխան ձևափոխություններ, ստացվում է տեղափոխումների նշատամբ մի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարում (3):

Եզրային պայմանները վերցված են (6) տեսքով: (4) տեղադրման միջոցով (3) ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումը բերվում է (7) հատուկ երկչափ ինտեգրալ հավասարման, որը, վերջերի եղանակով, բերվում է սովորական երկչափ ինտեգրալ հավասարման, և լուծվում է սեզոլվենտը զանկու:

միջոցով: Սկզբնական (3) ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումից (7) ինտեգրալ հավասարմանը անցնելիս առաջացող երկու կամայական ֆունկցիաները որոշվում են (11) սխեմայից: Վերջինս սաաջվում է սֆերիկ թաղանթի արտաքին և ներքին մակերևույթային պայմանների օդադործման հիման վրա: Նշված է երկու դեպք, երբ խնդիրը կարելի է վերածել առանձին ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը: Արդյունքները լուսարանված են կոնկրետ օրինակով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Розовский М. И. Доклады Академии наук СССР, т. 105, № 5, 1955.
2. Фридман Я. Б. Механические свойства металлов, Оборонгиз, 1952.
3. Volterra V. Atti Reale Accademia Roma, Rendiconti, т. 21, 5, 1912.
4. Volterra V. Leçons sur les equations integral et integro-differentiales, Paris, 1913.
5. Зайков М. А. Журнал технической физики, т. 18, в. 6, 1948.
6. Розовский М. И. Доклады Академии наук СССР, т. 58, № 6, 1947.
7. Бронский А. П. Прикладная математика и механика, т. 5, в. 1, 1941.