ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 2, 1958 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. В. Бадалян

Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора

§ 1. Об одном аналоге суммирования рядов по Чезаро

Рассмотрим последовательность чисел

$$0=\gamma_0<\gamma_1<\gamma_2<\cdots<\gamma_n<\cdots\to\infty,\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}=\infty \tag{1}$$

и числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$.

Введем обозначения

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\quad S_n^{(1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n-1}\gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=2}^{k}(\gamma_\nu-\gamma_1)}S_{k-1},$$

$$S_n^{(\mu)}=\sum_{k=\mu}^{n}\frac{\prod\limits_{\nu=\mu}^{n-1}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu-1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{k}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}S_{n-1}^{(\mu-1)},\qquad \mu=2,3,\cdots,$$

где здесь и впредь $\prod\limits_{\nu=k+1}^{k}(\gamma_\nu-\gamma_m)=1,\ \ m=0,1,2,\cdots,\ k.$

Определение 1. Условимся называть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ суммируемым по методу (C_γ,μ), если последовательность

$$\left\{S_n^{(\mu)}:\prod_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}\right\},\quad n=\mu+1,\ \mu+2,\cdots$$

имеет конечный предел.

Замечание 1. В частном случае, когда $\gamma_\nu=\nu$, $\nu=0,1,2,\cdots$, метод суммирования рядов (C_γ,μ) становится обычным чезаровским средним μ-го порядка — (C,μ).

Введем также обозначения

$$\dot{S}_n^{(1)} = \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\gamma_\nu - \gamma_1}{\gamma_\nu} S_n^{(1)} = \frac{S_n^{(1)}}{\prod\limits_{\nu=2}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1}},$$

$$\dot{S}_n^{(\mu)} = \frac{\sum\limits_{k=\mu}^{n} \frac{\prod\limits_{\nu=\mu}^{k-1} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{k} (\gamma_\nu - \gamma_\mu)} \dot{S}_{k-1}^{(\mu-1)}}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}}, \quad \mu = 2, 3, \cdots.$$

Определение 2. Условимся считать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по методу $(\dot{C}_\gamma, \mu)$, если последовательность чисел $\{\dot{S}_n^{(\mu)}\}$, $n = \mu + 1$, $\mu + 2, \cdots$ имеет конечный предел.

Теорема 1. Процесс $(\dot{C}_\gamma, \mu)$, $\mu = 1, 2, \cdots$ *регулярен.*

Доказательство. Обозначим

$$p_k = \frac{\prod\limits_{\mu}^{k-1} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} (\gamma_\nu - \gamma_\mu)}, \; k = \mu + 1, \mu + 2, \cdots, P_n = \prod_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}$$

и рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=\mu+1}^{n} p_k$.

Имеем

$$\sum_{k=\mu+1}^{n} p_k = \gamma_\mu \left[\frac{1}{\gamma_{\mu+1} - \gamma_\mu} + \frac{\gamma_{\mu+1}}{(\gamma_{\mu+1} - \gamma_\mu)(\gamma_{\mu+2} + \gamma_\mu)} + \cdots + \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n-1} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} (\gamma_\nu - \gamma_\mu)} \right] =$$

$$= \gamma_\mu \left[\prod_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu} - 1 \right] \frac{1}{\gamma_\mu} = \prod_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu} - 1.$$

В силу расходимости ряда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu}$ при $n \to \infty$ будем иметь

$$\frac{\sum\limits_{k=\mu}^{n} p_k}{P_n} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{p_k}{P_n} \to 0.$$

Это значит, что процесс $(\dot{C}_{\gamma}, \mu)$ может быть рассмотрен как процесс Вороного, а следовательно он регулярен.

Теперь будем сравнивать процессы (C_{γ}, μ) и $(\dot{C}_{\gamma}, \mu)$. Имеем

$$\dot{S}_n^{(1)} = \frac{S_n^{(1)}}{\prod\limits_{\nu=2}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1}}, \quad \dot{S}_n^{(2)} = \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\prod\limits_{2}^{k-1} \gamma_\nu}{\prod\limits_{3}^{k} (\gamma_\nu - \gamma_2)} \dot{S}_{k-1}^{(1)}}{\prod\limits_{\nu=3}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_2}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\prod\limits_{2}^{k-1} (\gamma_\nu - \gamma_1)}{\prod\limits_{\nu=3}^{k} (\gamma_\nu - \gamma_2)} \cdot \prod\limits_{2}^{k-1} \frac{\gamma_\nu}{(\gamma_\nu - \gamma_1)} S_{k-1}^{(1)}}{\prod\limits_{\nu=3}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_2}} = \frac{S_n^{(2)}}{\prod\limits_{\nu=3}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_2}}.$$

С целью установления связи между $\dot{S}_n^{(\mu)}$ и $S_n^{(\mu)}$ для любого целого $\mu > 0$ допустим, что

$$\dot{S}_n^{(\mu-1)} = \frac{S_n^{(\mu-1)}}{\prod\limits_{\nu=\mu}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_{\mu-1}}},$$

тогда

$$\dot{S}_n^{(\mu)} = \frac{\sum\limits_{k=\mu}^{n} \frac{\prod\limits_{\nu=\mu}^{k-1} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{k} (\gamma_\nu - \gamma_\mu)} \dot{S}_{k-1}^{(\mu-1)}}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_3}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=\mu}^{n} \frac{\prod\limits_{\nu=\mu}^{k-1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu-1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{k} (\gamma_\nu - \gamma_\mu)} S_{k-1}^{(\mu-1)}}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}} = \frac{S_n^{(\mu)}}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}}.$$

Этим доказано, что для любого целого $\mu > 0$ справедливо равенство

$$\dot{S}_n^{(\mu)} = \frac{S_n^{(\mu)}}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}} \tag{2}$$

Из последнего равенства и теоремы 1 следует:

Теорема 1′. Процесс суммирования рядов (C_γ, μ) регулярен.

Теорема 2. Для суммируемости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ по $(\dot{C}_\gamma, \mu)$ необходимо, чтобы

$$\dot{S}_n = o(\gamma_n^{\mu}),\ \dot{S}_n^{(k)} = o(\gamma_n^{\mu-k}),\quad k = 1, 2, \cdots, \mu. \tag{3}$$

Доказательство.

Имеем

$$\dot{S}_n^{(\mu)} = \prod_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\gamma_\nu - \gamma_\mu}{\gamma_\nu} \sum_{k=\mu}^{n} \frac{\prod\limits_{\nu=\mu}^{k-1} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{k} (\gamma_\nu - \gamma_\mu)} \dot{S}_{k-1}^{(\mu-1)}$$

причем $\dot{S}_n^{(\mu)} \to S$, когда $n \to \infty$; это значит, что

$$\dot{S}_{n+1}^{(\mu)} - \dot{S}_n^{(\mu)} = o(1), \text{ когда } n \to \infty, \tag{4}$$

но при достаточно большом n будет

$$\dot{S}_{n+1}^{(\mu)} - \dot{S}_n^{(\mu)} = o\left(\frac{\prod\limits_{\nu=\mu}^{n} \gamma_\nu \prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_\mu)^{-1} \dot{S}_{n+1}^{(\mu-1)}}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n+1} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}} \right) = o\left(\frac{\dot{S}_{n+1}^{(\mu-1)}}{\gamma_{n+1}} \right).$$

Из соотношения (4) и последнего равенства следует, что

$$\dot{S}_{n+1}^{(\mu-1)} = o(\gamma_{n+1}).$$

Аналогичным способом далее получаем

$$\dot{S}_{n+1}^{(\mu-1)} - \dot{S}_n^{(\mu-1)} = o\left(\dot{S}_{n+1}^{(\mu-2)} \frac{1}{\gamma_{n+1}} \right) = o(\gamma_{n+1}).$$

Следовательно

$$\dot{S}_{n+1}^{(\mu-2)} = o(\gamma_{n+1}^2).$$

Продолжая этот процесс, будем иметь

$$\dot{S}_n^{(\mu-k)} = o(\gamma_n^k),\ k = 0, 1, 2, \cdots, \mu.$$

Эту теорему можно выразить и в терминах суммируемости (C_γ, μ); а именно:

Теорема 2'. Для суммируемости ряда $\sum_{0}^{\infty} a_n$ *по* (C_γ, μ) *необходимо, чтобы*

$$S_n = o(\gamma_n^{\mu}), \quad \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\gamma_\nu - \gamma_1}{\gamma_\nu} S_n^{(1)} = 0(\gamma_n^{\mu-1}),$$

$$\prod_{\nu=k+1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_k} S_n^{(k)} = o(\gamma_n^{\mu-k}), \quad k = 1, 2, \cdots, \mu.$$

Выясним теперь вопрос, как влияет быстрота роста последовательности чисел $\{\gamma_\nu\}$ на мощность метода $(\dot{C}_\gamma, 1)$, и вообще $(\dot{C}_\gamma, \mu)$, $\mu \geqslant 1$.

Для этого рассмотрим $(\dot{C}_\gamma, 1)$ и $(\dot{C}_{\gamma'}, 1)$, составленные соответственно посредством последовательностей чисел $\{\gamma_\nu\}$ и $\{\gamma'_\nu\}$, где

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_\nu} = \infty.$$

Заметим, что $(\dot{C}_\gamma, 1)$ и $(\dot{C}_{\gamma'}, 1)$ суть методы суммирования $(\bar{R}, p_n)$ и $(\bar{R}, q_n)$, где

$$p_n = \frac{\prod_{1}^{n-1} \gamma_\nu}{\prod_{\nu=2}^{n} (\gamma_\nu - \gamma_1)}, \quad q_n = \frac{\prod_{1}^{n-1} \gamma'_\nu}{\prod_{\nu=2}^{n} (\gamma'_\nu - \gamma'_1)}.$$

См. [1], стр. 79.

Значит к $(\dot{C}_\gamma, 1)$ и $(\dot{C}_{\gamma'}, 1)$ применимы известные теоремы включения для $(\bar{R}, P_n)$, в частности теорема 14 (там же, стр. 80), из которой следует, что для $(\dot{C}_\gamma, 1) \subset (C_{\gamma'}, 1)$ (в смысле мощности) достаточно, чтобы

$$a) \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{\gamma'_n}{\gamma'_{n+1} - \gamma'_1} \leqslant \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1} - \gamma_1}, \qquad n = k, \ k+1, \cdots$$

или

$$в) \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{\gamma'_n}{\gamma'_{n+1} - \gamma'_1} > \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1} - \gamma_1},$$

и

$$\frac{P_n}{p_n} = \gamma_n \leqslant H \frac{Q_n}{q_n} = H\gamma'_n, \quad \text{где } P_n = \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_1}, \quad Q_n = \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\gamma'_\nu}{\gamma'_\nu - \gamma'_1}.$$

$H > 0$ — число не зависящее от n.

§ 2. Об одном аналоге суммирования рядов по Абелю

Известно, что ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n$ называется суммируемым по методу Абеля (А) к сумме S, если ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится при $|x| < 1$ и $\lim\limits_{x \to 1-} \varphi(x) = S$.

В настоящем параграфе показывается, что обобщение классического ряда Тейлора ([2]), позволяет обобщить и процесс суммирования (А).

Действительно, рассмотрим функции

$$\omega_n(x) = \frac{\prod\limits_{1}^{n} \gamma_n}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)}, \quad \omega_n(0) = \lim_{x \to 0} \omega_n(x), \tag{5}$$

где $0 = \gamma_0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \cdots$,

$x \in [0, 1]$, а простой контур C_n, здесь и впредь в подобных интегралах, охватывает окрестности полюсов подинтегральной функции.

В частном случае, когда $\gamma_\nu = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$

$$\omega_n(x) = (1 - x)^n, \; n = 0, 1, 2, \cdots.$$

В самом общем случае легко показать, что

1. $\omega_n(0) = 1$, $\omega_n(1) = 0$.
2. $\omega_n(x) > 0$, когда $x \in (0, 1)$.
3. На $[0, 1]$, $\omega_n(x)$ — монотонно убывает.

Для доказательства справедливости $\omega_n(0) = 1$ достаточно найти вычеты функции $\Phi(\zeta) = \dfrac{x^{-\zeta}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)}$ относительно ее полюсов с последующей подстановкой $x = 0$.

Для доказательства равенства $\omega_n(1)$ достаточно заметить, что функция

$$\Phi_1(\zeta) = \prod_{0}^{n} (\zeta + \gamma_n)^{-1}$$

во внешней к C_n области не имеет особых точек.

Неравенство $\omega_n(x)>0$, $x\in(0,1)$ легко доказывается методом математической индукции.

Имеем

$$\omega_0(x)=1,\quad \omega_1(x)=\frac{\gamma_1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta(\zeta+\gamma_1)}=1-x^{\gamma_1};$$

значит $\omega_1(x)>0$, когда $x\in(0,1)$.

Допустим теперь, что

$$\omega_m(x)=\frac{\prod\limits_{1}^{m}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_m}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{m}(\zeta+\gamma_\nu)}>0,\ \text{когда}\ x\in(0,1)$$

и составим

$$\gamma_{m+1}x^{\gamma_{m+1}}\int\limits_{1}^{x}x^{-\gamma_{m+1}-1}\omega_n(x)\,dx=-\frac{\prod\limits_{1}^{m+1}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_{m+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{0}^{m+1}(\zeta+\gamma_\nu)}=-\omega_{m+1}(x).$$

Но нетрудно заметить, что при $x\in(0,1)$ левая часть последнего равенства меньше нуля, значит (при $x\in(0,1)$).

$$\omega_{m+1}(x)>0,\quad m=0,1,2,\cdots.$$

Покажем теперь, что на $(0,1)$ $\omega_n(x)$ монотонно убывает.

Имеем

$$\omega_n'(x)=-\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta-1}d\zeta}{\prod\limits_{1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}=$$

$$=-x^{\gamma_1-1}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_n'}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu-\gamma_1)}$$

где простой контур C_n'—охватывает скрестности всех нулей функции $\prod\limits_{1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu-\gamma_1)$.

Так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu-\gamma_1)}>0, \quad x\in(0, 1),$$

получаем, что $\omega'_n(x)<0$.

Определение 3. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ суммируем по методу (A_γ) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=S(A_\gamma)\right)$, если ряд $\varphi(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\omega_n(x)$ сходится в $(0, 1]$ и существует конечный предел

$$S=\varphi(0+)=\lim_{x\to 0+}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\omega_n(x).$$

В частном случае, когда $\gamma_\nu=\nu$, $\nu=0, 1, 2, \cdots$, процесс (A_γ) совпадает с известным процессом Абеля суммирования рядов.

В другом частном случае, когда

$$\gamma_1=\gamma_2=\cdots=1,$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}S_n\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{1}^{n+1}(\zeta+\gamma_\nu)}=\sum_{n=0}^{\infty}S_n\frac{x}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta^{n+1}}$$

$$\omega_n(e^{-t})=\Omega_n(t)=\frac{e^{-t}}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{e^{t\zeta}d\zeta}{\zeta^{n+1}}=\frac{e^{-t}}{n!}\lim_{\zeta\to 0}(e^{t\zeta})^{(n)}=\frac{e^{-t}t^n}{n!}.$$

Таким образом

$$\varphi(x)=\psi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}S_n\Omega_n(t)=e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}S_n\frac{t^n}{n!}.$$

Это значит, что метод (A_γ) после подстановки $x=e^{-t}$ легко приводится к известному методу Бореля суммирования рядов.

Замечание 2. Для суммирования рядов по методу (A_γ) рассматривается последовательность $0=\gamma_0\leqslant\gamma_1\leqslant\cdots\leqslant\gamma_n\leqslant\cdots$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_k}{\gamma_{n_k}}=\infty,$$

где p_k определяется из условия

$$\cdots\leqslant\gamma_{n_k-1}<\gamma_{n_k}=\gamma_{n_k+1}=\gamma_{n_k+2}=\cdots=\gamma_{n_k+p_k-1}<\gamma_{n_k+p_k}\leqslant\cdots.$$

Теорема 4. Метод (A_γ) регулярен.

Доказательство. Покажем, что для всякого

$$x \in (0, 1),\ \omega_n(x) \geq \omega_{n+1}(x) > 0.$$

Действительно,

$$\omega_n(x) - \omega_{n+1}(x) = \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \left[\frac{1}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_\nu)} - \frac{\gamma_{n+1}}{\prod_0^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)} \right] \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta},$$

или

$$\omega_n(x) - \omega_{n+1}(x) = \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)} =$$

$$= x^{\gamma_1} \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C'_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_1)}.$$

Это значит, что

$$\omega_n(x) - \omega_{n+1}(x) = x^{\gamma_1} \prod_1^n \frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\, \omega_n(x, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

где

$$\alpha_\nu = \gamma_{\nu+1} - \gamma_1,$$

$$\omega_n(x, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C'_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \alpha_\nu)} > 0.$$

Таким образом для всякого $x \in (0, 1)$.

$$\omega_n(x) - \omega_{n+1}(x) > 0.$$

Для завершения доказательства теоремы нам достаточно заметить, что $\omega_{n+1}(x) > 0$, и сослаться на известную теорему 25, [1], стр. 98, согласно которой для регулярности метода (A_γ) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$0 < \omega_{n+1}(x) \leq \omega_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Теперь перейдем к сравнению методов (C_γ, μ) и (A_γ).

Определение 4. Условимся говорить, что выполняется условие сравнения методов (C_γ, μ), где $\mu > 1$ — произвольное целое число и (A_γ), если существует число $\varkappa > 0$ такое, что

$$\gamma_n^\mu \exp\left(-\varkappa \sum_1^n \frac{1}{\gamma_\nu}\right) = o(1), \tag{7}$$

когда $n \to \infty$.

Замечание 3. При выполнении условия сравнения, согласно теореме 2,

$$S_n^{(k)} \frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{n+1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k+1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)} = o(1), \text{ когда } x \in (0, 1].$$

Теорема 5. При выполнении условия сравнения, из суммируемости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *по* (C_γ, μ) *к конечной сумме* S, *следует его суммируемость, притом к той же сумме и по методу* (A_γ), *здесь*

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_\mu < \gamma_{\mu+1} \leqslant \gamma_{\mu+2} \leqslant \cdots \to \infty.$$

Лемма 1. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{n} a_n$ *суммируем по* (C_γ, μ), *то при выполнении условия сравнения справедливо равенство*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x) =$$

$$= \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{S_n^{(\mu)}}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} \dfrac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}} \cdot \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)}, \tag{8}$$

где $x \in (0, 1]$.

Рассмотрим $\varphi_{pq}(x) = \sum\limits_{n=p}^{q} a_n \omega_n(x)$ и применим преобразование Абеля:

$$\sum_{n=p}^{q} A_n B_n = \sum_{n=p}^{q-1} (B_n - B_{n+1}) \sum_{m=p}^{n} A_m + B_q \sum_{m=q}^{q} A_m,$$

принимая $A_n = a_n$, $B_n = \omega_n(x)$.

Будем иметь

$$\varphi_{pq}(x)=\sum_{n=p}^{q-1}S_{pn}\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_{\nu}}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1}(\zeta+\gamma_{\nu})}+S_{pq}\omega_{q}(x)$$

так как

$$\omega_n(x)-\omega_{n+1}(x)=\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_{n}}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1}(\zeta+\gamma_{\nu})}.$$

В силу условия сравнения при $p=0$, $q\to\infty$ получаем

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}S_{n}\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_{\nu}}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1}(\zeta+\gamma_{\nu})},\qquad x\in(0,1].$$

Снова обозначим

$$\varphi_{pq}(x)=\sum_{n=p}^{q}S_{n}\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_{\nu}}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{1}^{n+1}(\zeta+\gamma_{\nu})}=$$

$$=\sum_{n=p+1}^{q+1}S_{n-1}\frac{\prod\limits_{1}^{n-1}\gamma_{n}}{2\pi i}\int\limits_{C_{n}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_{\nu})}.$$

Примем теперь

$$A_n=\frac{\prod\limits_{1}^{n-1}\gamma_{\nu}}{\prod\limits_{2}^{n}(\gamma_{\nu}-\gamma_{1})}S_{n-1},\quad B_n=\frac{\prod\limits_{\nu=2}^{n-1}(\gamma_{\nu}-\gamma_{1})}{2\pi i}\int\limits_{C_{n}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{1}^{n}(\zeta+\gamma_{\nu})}$$

и снова применим преобразование Абеля; здесь также согласно условию сравнения при $p=0$ и $q\to\infty$ получаем

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}S_n^{(1)}\frac{\prod\limits_{\nu=2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_1)}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=2}^{n+1}(\zeta+\gamma_\nu)}=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}S_{n-1}^{(1)}\frac{\prod\limits_{\nu=2}^{n-1}(\gamma_\nu-\gamma_1)}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{2}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\prod\limits_{\nu=2}^{n-1}(\gamma_\nu-\gamma_1)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_2)}S_{n-1}^{(1)}\frac{\prod\limits_{\nu=3}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_2)}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{2}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}.$$

С целью применения математической индукции допустим, что

$$\varphi(x)=\sum_{n=\mu}^{\infty}S_{n-1}^{(\mu-1)}\frac{\prod\limits_{\nu=\mu}^{n-1}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu-1})}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\mu}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}=$$

$$=\sum_{n=\mu}^{\infty}\frac{\prod\limits_{\nu=\mu}^{n-1}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu-1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}S_{n-1}^{(\mu-1)}\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}.$$

Обозначим

$$A_n=\frac{\prod\limits_{\nu=\mu}^{n-1}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu-1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}S_{n-1}^{(\mu-1)},\qquad B_n=\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)},$$

тогда применение преобразования Абеля при последующем $p=\mu$ и $q\to\infty$ даст

$$\varphi(x)=\sum_{n=\mu}^{\infty}S_n^{(\mu)}\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}=$$

$$= \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \frac{S_{n-1}^{(\mu)}}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n-1} \frac{\gamma_\nu - \gamma_\mu}{\gamma_\nu}} \cdot \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)}.$$

Согласно равенству (2) получаем

$$\varphi(x) = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} \tilde{S}_{n-1}^{(\mu)} \frac{\prod\limits_{\mu+1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C_q} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)}.$$

В силу произвольности числа μ лемма доказана.

Лемма 2. При $x \in (0, 1]$ справедливо равенство

$$1 = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} \frac{\prod\limits_{\mu+1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\mu+1}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)}. \tag{8}$$

Действительно

$$\sigma_{0q}(x) = \sum_{n=\mu+1}^{q} \frac{\prod\limits_{\mu+1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{C}_q} \left[\frac{1}{\zeta + \gamma_{\mu+1}} + \frac{\gamma_{\mu+1}}{(\zeta + \gamma_{\mu+1})(\zeta + \gamma_{\mu+2})} + \cdots + \frac{\prod\limits_{\mu+1}^{q-1} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\mu+1}^{q} (\zeta + \gamma_\nu)} \right] x^{-\zeta} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_q} \left[1 - \prod_{\nu=\mu+1}^{q} \frac{\gamma_\nu}{\zeta + \gamma_\nu} \right] \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} =$$

$$= 1 - \frac{\prod\limits_{\mu+1}^{q} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod\limits_{\mu+1}^{q} (\zeta + \gamma_\nu)}.$$

Нетрудно заметить, что при $x \in (0, 1]$

$$\tau_q(x) = \frac{\prod\limits_{\mu+1}^{q}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{\mu+1}^{q}(\zeta+\gamma_\nu)} \to 0, \text{ когда } q\to\infty.$$

Действительно

$$\tau_q(x) \leqslant Cx^{-\varkappa}\prod_{\mu+1}^{q}\frac{\gamma_\nu}{\varkappa+\gamma_\nu} < Cx^{-\varkappa}e^{-(\varkappa-\varepsilon)\sum\limits_{\mu+1}^{q}\frac{1}{\gamma_\nu}},$$

при достаточно большом $q>0$, $\varepsilon=\varepsilon(q)>0$, число сколь угодно малое. Таким образом доказано, что, при $x\in(0,1]$,

$$\lim_{q\to\infty}\sigma_{\mu q}(x)=1.$$

Доказательство теоремы 5.

Имеем

$$\varphi(x)=\sum_{n=\mu}^{\infty}\frac{S_n^{(\mu)}}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}}\cdot\frac{\prod\limits_{\mu+1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\mu+1}^{n+1}(\zeta+\gamma_\nu)};$$

с другой стороны, помножив обе стороны равенства

$$1=\sum_{n=\mu}^{\infty}\frac{\prod\limits_{\mu+1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\mu+1}^{n+1}(\zeta+\gamma_\nu)} \tag{8}$$

на S, где

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{(\mu)}}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}},$$

и вычтя его из предыдущего равенства, получаем

$$\varphi(x)-S=\sum_{n=\mu}^{\infty}\left(\prod_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{\gamma_\nu-\gamma_\mu}{\gamma_\nu}S_n^{(\mu)}-S\right)\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\mu+1}^{n+1}(\zeta+\gamma_\nu)}. \tag{9}$$

Разобьем теперь ряд правой части равенства (9) на слагаемые: I — от $\mu+1$ до N и II — от $N+1$ до $+\infty$ и обозначим их соответственно через $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$.

Имеем

$$|\sigma_1(x)| \leqslant A \sum_{n=\mu}^{N} \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)},$$

где

$$A = \sup_{\mu < n \leqslant N} \left(\prod_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\gamma_\nu - \gamma_\mu}{\gamma_\nu} S_n^{(\mu)} - S \right).$$

В контурном интеграле, заменив ζ через $\zeta - \gamma_{\mu+1}$, будем иметь

$$|\sigma_1(x)| \leqslant A x^{\gamma_{\mu+1}} \sum_{n=\mu}^{N} \frac{\prod\limits_{\mu+1}^{n} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})}.$$

$$\cdot \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})}{2\pi i} \int\limits_{C'_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})}.$$

Нетрудно заметить, что при $x \in [0, 1]$

$$\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})}{2\pi i} \int\limits_{C'_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})} \leqslant 1.$$

Значит

$$|\sigma_1(x)| < A x^{\gamma_{n+1}} \sum_{n=\mu+1}^{N} \frac{\prod\limits_{n=1}^{n} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})};$$

но

$$\sum_{n=\mu}^{N} \frac{\prod\limits_{\mu+1}^{n} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})} = \sum_{n=\mu+1}^{N} \frac{\prod\limits_{\mu+1}^{n} \gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})} + 1$$

$$= 1 + \gamma_{\mu+1} \left(\prod_{\mu+2}^{N+1} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_{\mu+2}} - 1 \right) \frac{1}{\gamma_{\mu+1}} = \prod_{\nu=\mu+2}^{N+1} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1}},$$

здесь также как везде

$$\frac{\prod\limits_{\mu+1}^{n}\gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n+1}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}=1 \quad \text{при} \quad n=\mu.$$

Таким образом

$$|\sigma_1(x)|<Ax^{\gamma_{\mu+1}}\prod_{\nu=\mu+2}^{N+1}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}.$$

Возьмем $x>0$ настолько близким к нулю, чтобы имело место неравенство:

$$|\sigma_1(x)|<A\varepsilon_1=\varepsilon, \tag{10}$$

для чего достаточно положить

$$x^{\gamma_{\mu+1}}=\frac{\varepsilon}{A}\prod_{\nu=\mu+2}^{N+1}\frac{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}{\gamma_\nu}.$$

Оценим теперь $\sigma_2(x)$.

При достаточно большом $N(\varepsilon)$ и $n\geqslant N$ будем иметь

$$\left|\prod_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{\gamma_\nu-\gamma_\mu}{\gamma_\nu}S_n^{(\mu)}-S\right|<\varepsilon,$$

тогда

$$|\sigma_2(x)|<\varepsilon\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\prod\limits_{\mu+1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\mu+1}^{n+1}(\zeta+\gamma_\nu)}.$$

В силу равномерной сходимости последнего ряда на (0, 1] будем иметь

$$|\sigma_2(x)|<\varepsilon\frac{\prod\limits_{\mu+1}^{N+1}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\frac{x^{-\zeta}}{\prod\limits_{\mu+1}^{N+1}(\zeta+\gamma_\nu)}\left[\frac{1}{\zeta+\gamma_{N+2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma_{N+2}}{(\zeta+\gamma_{N+1})(\zeta+\gamma_{N+3})}+\cdots\right]d\zeta=\varepsilon\frac{\prod\limits_{\mu+1}^{N+1}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{\mu+1}^{N+1}(\zeta+\gamma_\nu)},$$

здесь $\varkappa>0$ — произвольное число.

Заметив опять, что при $x \in [0, 1]$

$$\frac{\prod\limits_{\mu+1}^{N+1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod\limits_{\mu+1}^{N+1} (\zeta + \gamma_\nu)} = \frac{\prod\limits_{\mu+1}^{N+1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_{N+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod\limits_{\mu+1}^{N+1} (\zeta + \gamma_\nu)} \leqslant 1,$$

получаем

$$|\sigma_2(x)| < \varepsilon. \tag{11}$$

Объединяя оценки $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$, окончательно получаем, что при $x > 0$, достаточно близком к нулю,

$$|\varphi(x) - S| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

или

$$\lim_{x \to 0+} \varphi(x) = S.$$

Этим теорема доказана.

Определение 5. Условимся называть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируемым по методу (F_γ) к сумме S, если:

1. ряд

$$f(z) - a_0^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \prod\limits_{1}^{n} \gamma_\nu}{\prod\limits_{1}^{n} (z + \gamma_\nu)}$$

сходится при $Re(z) > 0$. При $n = 0$ $\prod\limits_{1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{z + \gamma_\nu}$ равно единице.

2. $f(z) - a_0^*$ при $z \to 0+$ обладает конечным пределом S, который называется обобщенной суммой ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ по методу (F_γ) и пишется

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(F_\gamma).$$

Пусть теперь ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(e^{-t}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Omega_n(t) = \psi(t) = \varphi(e^{-t}) = \varphi(x)$$

определяет на $(0, 1]$ единственную функцию $\varphi(x) \in C_{\left\{\prod\limits_{1}^{n} \gamma_\nu\right\}}$,

см. [2], стр. 59.

Обозначим

$$f(z)=\int_0^\infty e^{-zt}d\psi(t)=L(\psi),$$

тогда

$$f(z)-a_0^*=z\int_0^\infty e^{-zt}\psi(t)\,dt=$$

$$=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\prod_1^n\gamma_\nu}{\prod_0^n(z+\gamma_\nu)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\prod_1^n\gamma_\nu}{\prod_1^n(z+\gamma_\nu)}.$$

Определение 6. Условимся считать, что $f(z)=L(\psi)$ удовлетворяет условию (L), если

$$\psi(t)=\varphi(e^{-t})=\varphi(x)\in C_{\left\{\prod_1^n\gamma_\nu\right\}}[0, 1].$$

Теорема 6. Из суммируемости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *по* (A_γ) *при выполнении условия* (L) *следует его суммируемость и по методу* (F_γ).

Доказательство. Достаточно использовать известную теорему, которая применительно к нашим целям формулируется так:

Если

$$f(z)-a_0^*=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\prod_1^n\frac{\gamma_\nu}{z+\gamma_n}\quad \text{при}\quad Re(z)>0$$

и

$$\psi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Omega_n(t)\to S,\quad \text{когда}\quad t\to\infty,$$

то

$$\overline{\lim_{z\to 0+}}\,|f(z)-a_0^*-S|\leqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|\psi(t)-S|\leqslant\lim_{x\to 0+}|\varphi(x)-S|.$$

см. [3], стр. 181. Теорема доказана.

Из теорем 5 и 6 следует:

Теорема 5. Из суммируемости* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *по методу* (C_γ, μ), *где* $\mu\geqslant 0$ — *произвольное целое число, при выполнении условия сравнения следует его суммируемость и по методу* (F_γ).

Замечание. Последняя теорема может быть доказана и прямым путем, повторяя дословно все выкладки доказательства теоремы 5; единственное различие заключается в том, что в фигурируемых в доказательстве рядах будут только подинтегральные выражения, умноженные на z (контурные интегралы будут отсутствовать), так как

$$z\int_0^\infty e^{-zt}\,\omega_n(e^{-t})\,dt=\prod_1^n\frac{\gamma_\nu}{z+\gamma_\nu}.$$

§ 2. Некоторые другие граничные свойства обобщенного ряда Тейлора

Теорема 7. Если

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\omega_n(x),\quad x\in(0,1]$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\prod\limits_1^n\gamma_\nu}{\prod\limits_0^{n-1}(\omega+\gamma_\nu)}=A,\quad\text{где}\quad \omega>0,$$

то

$$\lim_{x\to0+}x^{\omega}\varphi(x)=A.$$

Лемма. Если

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\omega_n(x),\ x\in(0,1]$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\prod\limits_1^n\gamma_\nu}{\prod\limits_0^{n-1}(\omega+\gamma_\nu)}=0,\quad\text{где}\quad \omega>0,$$

то

$$\lim_{x\to0+}x^{\omega}\varphi(x)=0.$$

Действительно, составим

$$x^{-\omega}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\omega_k(x),$$

$$\omega_k(x)=\frac{\prod\limits_{1}^{k}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{0}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)},\quad b_k=\frac{\prod\limits_{1}^{k-1}(\omega+\gamma_\nu)}{\prod\limits_{1}^{k}\gamma_\nu},\quad b_0=1,$$

См. [4] стр. 48.

Из условия леммы следует, что при $n>n_0(\varepsilon)$ будем иметь

$$|a_n|<\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\omega+\gamma_\nu)}{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}\varepsilon;$$

следовательно,

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n\omega_n(x)\right|<\varepsilon\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\omega+\gamma_\nu)}{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}\cdot\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}=$$

$$=\varepsilon\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{0}^{n-1}(\omega+\gamma_\nu)}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\beta}{\prod\limits_{0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}=\varepsilon\frac{\prod\limits_{0}^{n_0}(\omega+\gamma_\nu)}{2\pi i}\int\limits_{C_{n_0}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta-\omega)\prod\limits_{0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}=$$

$$=\varepsilon\omega x^{-\omega}\frac{\prod\limits_{1}^{n_0}(\omega+\gamma_\nu)}{2\pi i}\int\limits_{C'_{n_0}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{\nu=0}^{n_0}(\zeta+\omega+\gamma_\nu)}.$$

Известно, что

$$\max_{x\in[0,1]}\frac{\prod\limits_{1}^{n_0}(\omega+\gamma_\nu)}{2\pi i}\int\limits_{C'_{n_0}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{\nu=0}^{n_0}(\zeta+\omega+\gamma_\nu)}=1;$$

значит

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n\omega_n(x)\right|<\varepsilon\omega x^{-\omega}.$$

Составим теперь

$$|x^{\omega}\varphi(x)| < \left| x^{\omega} \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n \omega_n(x) \right| + \omega\varepsilon.$$

При достаточно малом $x > 0$ и фиксированном $n_0 = n_0(\varepsilon)$ будем иметь

$$|x^{\omega}\varphi(x)| < \varepsilon_1.$$

Это значит, что

$$\lim_{x \to 0+} x^{\omega}\varphi(x) = 0.$$

Доказательство теоремы. Обозначим

$$a_n - \frac{\prod\limits_{0}^{n-1}(\omega + \gamma_\nu)}{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_n} A = c_n.$$

Очевидно, что

$$\lim_{n \to \infty} c_n \frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{\prod\limits_{0}^{n-1}(\gamma_\nu + \omega)} = 0.$$

Составим теперь функцию

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{0}^{n}(\zeta + \gamma_\nu)},$$

где

$$\psi(x) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{0}^{n-1}(\omega + \gamma_\nu)}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{0}^{n}(\zeta + \gamma_\nu)} = Ax^{-\omega},$$

при $n = 0$, $\prod\limits_{0}^{n-1}(\omega + \gamma_\nu)$ равно 1.

С другой стороны, согласно лемме

$$\lim_{x \to \infty} x^{\omega}\Phi(x) = 0.$$

Значит

$$\lim_{x \to 0+} [x^{\omega}\varphi(x) - x^{\omega}\psi(x)] = 0,$$

или

$$\lim_{x\to 0+} x^{\omega}\varphi(x) = A.$$

Теорема 8. Если при $x \in (0, 1]$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x)$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \gamma_n = A$, *где* A — *некоторое число, то*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\varphi(x)}{ln\frac{1}{x}} = A.$$

Лемма. Если при $x \in (0, 1]$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x)$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \gamma_n = 0$, *то*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\varphi(x)}{ln\frac{1}{x}} = 0.$$

Для доказательства леммы заметим, что при $x \in (0, 1]$ справедливо равенство:

$$-\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod\limits_{1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)}. \tag{12}$$

где $\varkappa > 0$ — произвольное число.

Действительно, при $Re(z) > \varkappa > 0$, где $\varkappa$ — произвольное число, справедливо равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod\limits_{1}^{n-1} \gamma_\nu}{\prod\limits_{1}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)} = \frac{1}{\zeta(\zeta + \gamma_1)} + \frac{\gamma_1}{\zeta(\zeta + \gamma_1)(\zeta + \gamma_2)} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\zeta}\left(\frac{1}{\zeta + \gamma_1} + \frac{\gamma_1}{(\zeta + \gamma_1)(\zeta + \gamma_2)} + \cdots\right) = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{\zeta^2};$$

с другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta^2} = -\ln x.$$

Этим справедливость равенства (12) доказана.

Составим теперь

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n_0} a_n \omega_n(x) + \sum_{n_0+1}^{\infty} a_n \omega_n(x),$$

где $n_0 = n_0(\varepsilon)$ определено из условия

$$|a_n \gamma_n| < \varepsilon, \quad \text{когда} \quad n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Имеем

$$|\varphi(x)| \leqslant \left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n \omega_n(x) \right| + \varepsilon \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \omega_n(x) <$$

$$< A(n_0) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod\limits_{1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)},$$

где $\prod\limits_{1}^{n-1} \gamma_\nu$ при $n = 0$ равно 1.

Таким образом

$$|\varphi(x)| < A(n_0) + \varepsilon \ln \frac{1}{x},$$

Значит

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|\varphi(x)|}{\ln \frac{1}{x}} = A(n_0) \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\ln \frac{1}{x}} + \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|\varphi(x)|}{\ln \frac{1}{x}} = 0.$$

Доказательство теоремы. Обозначим $c_n = a_n - \dfrac{A}{\gamma_n}$, тогда очевидно, что $\lim\limits_{n \to \infty} c_n \gamma_n = 0$, и рассмотрим

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega_n(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

где

$$\psi(x) = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod\limits_{1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)} = A \ln \frac{1}{x}.$$

Согласно доказанной выше лемме иммеем

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\Phi(x)}{ln\frac{1}{x}}=0;$$

значит

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\varphi(x)}{ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\psi(x)}{ln\frac{1}{x}}=A.$$

Этим теорема доказана.

Выясним теперь — как изменится формулировка теоремы 8, если там считать, что $\omega<0$.

Теорема 9. Если $\lim_{n\to\infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{\prod_0^{n-1}(\gamma_\nu-\omega)}=A$, *где* $\gamma_1>\omega>0$ — *произвольное числа, и*

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\omega_n(x),\quad x\in(0,1],$$

то сходится ряд $\varphi(0)=\sum_{n=}^{\infty}a_n$ *и справедливо равенство*

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^\omega}=A.$$

Лемма. Если $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\omega_n(x)$, *где* $x\in(0,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{\prod_0^{n-1}(\gamma_\nu-\omega)}=0,\ \text{где}\ 0<\omega<\gamma_1,$$

то сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\varphi(0)$, *и справедливо равенство*

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^\omega}=0.$$

Обозначим $\sigma_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$.

Согласно условию леммы, начиная с некоторого номера $n_0=n_0(\varepsilon)$ и для всех $n\geqslant n_0$ будем иметь:

$$|\sigma_n| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\prod_{1}^{k-1}(\gamma_\nu - \omega)}{\prod_{1}^{k}\gamma_\nu} = \varepsilon \prod_{1}^{n} \frac{\gamma_\nu - \omega}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma_{n+1}} + \frac{\gamma_{n+1} - \omega}{\gamma_{n+1}\gamma_{n+2}} + \cdots \right) =$$

$$= \varepsilon \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu - \omega}{\gamma_\nu} \cdot \frac{1}{\omega}.$$

Это значит, что ряд $\varphi(0) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n$ сходится.

Применим теперь к ряду

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x).$$

преобразование Абеля

$$\sum_{s=p}^{q} b_s c_s = c_p \sum_{s=p}^{\infty} b_s + \sum_{s=p+1}^{q} (c_s - c_{s-1}) \sum_{\nu=s}^{\infty} b_\nu - c_q \sum_{s=q+1}^{\infty} b_s.$$

Получаем

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \omega_n(x) = \sigma_0^* + \sum_{n=0}^{m} \sigma_n [\omega_{n+1}(x) - \omega_n(x)] - \sigma_m \omega_m(x).$$

Заметив, что $\sigma_0^* = \varphi(0)$, переходя к пределу, когда $m \to \infty$ $x \in (0, 1]$, будем иметь

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n [\omega_{n+1}(x) - \omega_n(x)].$$

Заметим также, что

$$\omega_{n+1}(x) - \omega_n(x) = -\frac{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{1}^{n+1}(\zeta + \gamma_\nu)},$$

значит

$$\varphi(x) - \varphi(0) = - \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \frac{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{1}^{n+1}(\zeta + \gamma_\nu)}.$$

Обозначим $\zeta = \zeta' - \gamma_1$, тогда

$$\varphi(x)-\varphi(0)=-x^{\gamma_1}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C'_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{\nu=2}^{n+1}(\zeta+\gamma_\nu-\gamma_1)}=$$

$$=-x^{\gamma_1}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=2}^{n+1}(\gamma_\nu-\gamma_1)}\cdot\frac{\prod\limits_{\nu=2}^{n+1}(\gamma_\nu-\gamma_1)}{2\pi i}\int\limits_{C'_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{\nu=2}^{n+1}(\zeta+\gamma_\nu-\gamma_1)},$$

где простой контур C'_{n+1} — охватывает окрестности всех нулей знаменателя подинтегральной функции соответствующего интеграла.

Обозначим теперь

$$\sigma_n^*=\sigma_n\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=2}^{n+1}(\gamma_\nu-\gamma_1)},\quad \omega_n^*(x)=\frac{\prod\limits_{\nu=2}^{n+1}(\gamma_\nu-\gamma_1)}{2\pi i}\int\limits_{C'_{n+1}}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{\nu=1}^{n+1}(\zeta+\gamma_\nu-\gamma_1)}.$$

Начиная с некоторого номера $n_0=n_0(\varepsilon)$ и для всех $n\geqslant n_0$ будет

$$|\sigma_n^*|=\left|\sigma_n\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=2}^{n+1}(\gamma_\nu-\gamma_1)}\right|<\varepsilon\frac{\prod\limits_{1}^{n}(\gamma_\nu-\omega)}{\prod\limits_{\nu=2}^{n+1}(\gamma_\nu-\gamma_1)}=\varepsilon\frac{\prod\limits_{2}^{n}(\gamma_\nu^*+\omega^*)}{\prod\limits_{2}^{n+1}\gamma_\nu^*},$$

где $\omega^*=\gamma_1-\omega$, $\gamma_\nu^*=\gamma_\nu-\gamma_1$.

Если теперь обозначим

$$\Phi(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{\gamma_1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^*\omega_n^*(x),$$

то к ней применима теорема 7 с $A=0$, это значит, что

$$\Phi(x)\,x^{\omega^*}=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{\gamma_1}}x^{\omega^*}=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{\gamma_1}}x^{-\omega+\gamma_1}=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{\omega}}\to 0,$$

когда $x\to 0+$.

Доказательство теоремы 9. Достаточно составить

$$c_n=a_n-\frac{\prod\limits_{0}^{n-1}(\gamma_\nu-\omega)}{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}A,\ n=0,1,2,\cdots$$

при $n=0$, $\prod_{0}^{n-1}(\gamma_\nu-\omega)=1$, и рассмотреть функцию

$$\Psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\omega_n(x).$$

Коэффициенты c_n удовлетворяют условиям леммы, так как

$$\lim_{n\to\infty} c_n\frac{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu}{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\gamma_\nu-\omega)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu}{\prod_{0}^{n-1}(\gamma_\nu-\omega)}a_n-A\right)=0.$$

Это значит, что

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\Psi(x)-\Psi(0)}{x^\omega}=0.$$

Заметим теперь, что

$$\Psi(x)=\varphi(x)-\psi(x),$$

$$\psi(x)=A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{0}^{n-1}(\gamma_\nu-\omega)}{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu}\cdot\frac{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}=$$

$$=A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{0}^{n-1}(\gamma_\nu-\omega)}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}=\frac{A}{2\pi i}\int_{C}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta+\omega}=Ax^\omega,$$

и $\psi(0)=0$.

Таким образом

$$\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x^\omega}=A,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\Psi(x)-\Psi(0)}{x^\omega}=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^\omega}-A\right)=0.$$

или

$$\lim_{x\to x+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^\omega}=A\cdot$$

(Окончание в следующем номере)