

М. М. Джрбашян

# О взвешенно-наилучшем приближении функции $|x|$ на всей вещественной оси

Пусть функция  $y = p_0(x)$  определена, непрерывна на полуоси  $[0, +\infty)$  и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-p_0(x)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отнесем к классу  $C[p_0(|x|)]$  функции  $f(x)$ , непрерывные на всей оси  $(-\infty, +\infty)$ , для которых

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} e^{-p_0(x)} f(x) = 0.$$

Очевидно, что любой полином принадлежит к классу  $C[p_0(|x|)]$  обозначим для  $f(x) \in C[p_0(|x|)]$

$$E_n(f(x); p_0(|x|)) = \inf_{\{Q_n\}} \left\{ \max_x e^{-p_0(|x|)} |f(x) - Q_n(x)| \right\},$$

где  $\{Q_n(x)\}$  — семейство всевозможных полиномов степени  $n$ . Скажем, что функция  $p_0(x)$  принадлежит к классу  $A$ , если при  $x \geq 1$  она представима в виде

$$p_0(x) = p_0(1) + \int_1^x \frac{\omega(t)}{t} dt,$$

где функция  $\omega(t) > 0$ , не убывает и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = +\infty$ .

Известно [1, 2, 3], что если  $p_0(x) \in A$ , то условие

$$\int_1^{\infty} \frac{p_0(x)}{x^2} dx = +\infty$$

необходимо и достаточно для выполнения равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f(x); p_0(|x|)) = 0,$$

для произвольной функции  $f(x) \in C[p_0(|x|)]$ .

Проблема о выявлении зависимости между дифференциальными свойствами функции  $f(x)$  и порядком убывания ее наилучших при-

ближений  $E_n(f(x); p_0(|x|))$  впервые была поставлена и в основном решена в работах [2, 4, 5]. Было установлено, что зависимость между порядком убывания чисел  $E_n(f; p_0)$  и дифференциальными свойствами  $f(x)$  характеризуется не шкалой  $n^{-k}$  ( $k=1, 2, \dots$ ), как это имеет место в теоремах Джексона-Бернштейна, а шкалой

$$\left( \int_1^{cn} \frac{dy}{q_0(y)} \right)^{-k}, \quad (k=1, 2, \dots) \quad (\text{где } c > 0 \text{ любое}),$$

где  $x = q_0(y)$  функция, обратная к  $y = p_0(x)$ .

В обратных теоремах наилучшего приближения этот факт был установлен, когда  $y = p_0(x)$  произвольная монотонно возрастающая функция; что касается прямых теорем, то здесь тот же факт был установлен при ограничении

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x p_0'(x)}{p_0(x)} \geq a > 1,$$

не необходимой для полноты.

В настоящей заметке приводится оценка взвешенно-наилучшего приближения функции  $|x|$ , т. е. оценка порядка убывания чисел  $E_n(|x|, p_0(|x|))$  в случае, когда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x p_0'(x)}{p_0(x)} = \rho, \quad \text{где } \rho \geq 1 - \text{целое.}$$

Из приводимой ниже теоремы видно, что и в предельном для полноты случае, когда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x p_0'(x)}{p_0(x)} = 1, \quad \int_1^{\infty} p_0(x) x^{-2} dx = +\infty \quad (*)$$

для специальной, но имеющей принципиальное значение функции  $|x|$  справедлива оценка вида

$$E_n(|x|, p_0(|x|)) = O \left\{ \left( \int_1^{cn} \frac{dy}{q_0(y)} \right)^{-1} \right\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Иначе говоря, и в случае, (\*) который не был охвачен нами в прямой теореме [2], шкалой наилучшего приближения должны служить чис-

ла  $\left( \int_1^{cn} \frac{dy}{q_0(y)} \right)^{-k}, \quad (k=1, 2, \dots).$

Прежде чем сформулировать и доказать этот результат, докажем лемму.

*Лемма.* Пусть функция  $y = p(x)$  непрерывно-дифференцируема на полуоси  $[1, +\infty)$  и удовлетворяет условиям

а)  $p'(x) > 0$  при  $1 \leq x < +\infty$ ,  $p(1) = 1$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xp'(x)}{p(x)} = \rho$ , где  $\rho \geq 1$  целое число. Существует четная целая функция  $G(z)$  с неотрицательными коэффициентами, для которой

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\log G(x)}{p(|x|)} = \pi. \quad (1)$$

*Доказательство.* Из условия а) следует, что для любого  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \rho$ ) существует такое  $x_0 = x_0(\varepsilon) > 0$ , что

$$\rho - \varepsilon < \frac{xp'(x)}{p(x)} < \rho + \varepsilon \quad \text{при } x > x_0.$$

откуда интегрированием по промежутку  $[x_0, x]$  получим

$$\frac{p(x_0)}{x_0^{\rho-\varepsilon}} x^{\rho-\varepsilon} < p(x) < \frac{p(x_0)}{x_0^{\rho+\varepsilon}} x^{\rho+\varepsilon} \quad \text{при } x > x_0. \quad (2)$$

Из (2) и условия а) следует, что при  $1 \leq x < +\infty$  функция  $y = p(x)$  монотонно возрастает от 1 до  $+\infty$ . Поэтому обратная функция  $x = q(y)$  существует и монотонно возрастает при  $1 \leq y < +\infty$  от 1 до  $+\infty$ .

Из оценки следует также

$$\int_1^{\infty} \frac{p(x)}{x^{1+2\varepsilon}} dx < +\infty$$

откуда заключаем, что сходится интеграл

$$\int_1^{\infty} [q(y)]^{-2\varepsilon} dy,$$

следовательно и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} [q(k)]^{-2\varepsilon} < +\infty. \quad (4)$$

Составим функцию

$$G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z^{2\varepsilon}}{[q(k)]^{2\varepsilon}} \right), \quad (5)$$

которая в силу (4) будет целой функцией с неотрицательными коэффициентами.

Обозначая через  $n(t)$  числовую функцию последовательности  $\lambda_k = q(k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), отметим сначала, что

$$n(t) \leq p(t) < n(t) + 1, \quad (6)$$

$$n(t) = 0, \quad 0 \leq t < \lambda_1 = 1.$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \log G(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \log \left\{ 1 + \frac{x^{2p}}{[q(k)]^{2p}} \right\} = \\ &= \int_0^{\infty} \log \left\{ 1 + \frac{x^{2p}}{t^{2p}} \right\} dn(t) = 2px^{2p} \int_1^{\infty} \frac{n(t) dt}{t(x^{2p} + t^{2p})}, \end{aligned} \quad (7)$$

причем проинтегрированный член исчезает в силу того, что  $n(t) \equiv 0$  при  $0 \leq t < 1$ , а при  $t \rightarrow +\infty$

$$n(t) \leq p(t) < At^{p+1}.$$

Из неравенств (6) и формулы (7) получим оценку

$$I_1(x) - I_2(x) \leq \log G(x) \leq I_1(x), \quad (7')$$

где

$$I_1(x) = 2px^{2p} \int_1^{\infty} \frac{p(t) dt}{t(x^{2p} + t^{2p})}; \quad (8)$$

$$I_2(x) = 2px^{2p} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t(x^{2p} + t^{2p})}.$$

Из очевидной оценки

$$I_2(x) < 2p \left\{ \log x + \int_1^{\infty} \frac{du}{1+u^{2p}} \right\}$$

и по (2) получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I_2(x)}{p(x)} = 0. \quad (9)$$

Нам остается доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I_1(x)}{p(x)} = \pi. \quad (10)$$

тогда из (7'), (9) и (8) получим утверждение (1) теоремы.

Обозначим

$$p(x) = x^p p_1(x),$$

тогда ввиду условия б) имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xp_1'(x)}{p_1(x)} = 0, \quad (11)$$

т. е.  $p_1(x)$  — медленно растущая функция. Из (11) легко вытекает, что справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p_1(ax)}{p_1(x)} = 1, \quad (11')$$

при этом равномерно относительно  $a \geq \delta > 0$ .

Выберем значение  $A_0 > 1$  так, чтобы имели

$$|xp_1'(x)| < \frac{\rho}{2} p_1(x), \quad x \geq A_0, \quad (11'')$$

что возможно в силу (11).

Обозначая

$$I_1(x, A_0) = 2\rho x^{2\rho} \int_{A_0}^{\infty} \frac{p(t) dt}{t(t^{2\rho} + x^{2\rho})} \quad (12)$$

и замечая, что

$$I_1(x) = O(1) + I_1(x, A_0), \quad x \rightarrow +\infty$$

закключаем, что достаточно доказать равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I_1(x, A_0)}{\rho(x)} = \pi. \quad (10')$$

После замены переменной из (12) получим

$$\begin{aligned} \frac{I_1(x, A_0)}{\rho(x)} &= 2\rho \int_{\frac{A_0}{x}}^{\infty} \frac{p_1(xu)}{p_1(x)} \frac{u^{\rho-1} du}{1+u^{2\rho}} = \\ &= 2\rho \int_{\frac{A_0}{x}}^{\delta} \frac{p_1(xu)}{p_1(x)} \frac{u^{\rho-1} du}{1+u^{2\rho}} + 2\rho \int_{\delta}^{\infty} \frac{p_1(xu)}{p_1(x)} \frac{u^{\rho-1} du}{1+u^{2\rho}} = \\ &= U_1(x) + U_2(x), \quad \text{где } 0 < \delta < 1. \end{aligned} \quad (12')$$

Из (11') и определения  $U_2(x)$  следует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U_2(x) = 2\rho \int_{\delta}^{\infty} \frac{u^{\rho-1} du}{1+u^{2\rho}} = \pi - 2\text{arctg} \delta^{\rho}. \quad (13)$$

Далее, имея в виду (11''), получим

$$\begin{aligned} U_1(x) &< \frac{2\rho}{p_1(x)} \int_{\frac{A_0}{x}}^{\delta} p_1(xu) u^{\rho-1} du = \frac{2\rho}{p(x)} \int_{\frac{A_0}{x}}^{\delta x} p_1(t) t^{\rho-1} dt < \\ &< 2 \frac{p(\delta x)}{p(x)} + \frac{\rho}{p(x)} \int_{\frac{A_0}{x}}^{\delta x} p_1(t) t^{\rho-1} dt, \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{\rho}{p(x)} \int_{\frac{A_0}{x}}^{\delta x} p_1(t) t^{\rho-1} dt < 2 \frac{p(\delta x)}{p(x)} = 2\delta^{\rho} \frac{p_1(\delta x)}{p_1(x)}$$

и

$$U_1(x) < 4\delta \frac{p_1(\delta x)}{p_1(x)}. \quad (13')$$

Из (12'), (13), (13') и (11') ввиду произвольности  $\delta > 0$  получим формулу (10'), т. е. доказательство леммы.

**Теорема.** Пусть  $y = p_0(x)$  непрерывно-дифференцируема на полуоси  $(0, +\infty)$  и удовлетворяет условиям

а)  $p_1(x) > 0$  при  $0 \leq x < +\infty$ ,  $p_0(0) > 0$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x p_0'(x)}{p_0(x)} = \rho$ , где  $\rho \geq 1$  целое;

в) в случае  $\rho = 1$ ,  $\int_1^{\infty} p_0(x) x^{-2} dx = +\infty$ .

Если  $y = q_0(y)$  функция, обратная к  $y = p_0(x)$ , то

$$F_n(|x|, p_0(|x|)) = O \left\{ \left( \int_1^{\frac{\pi n}{p}} \frac{dy}{q_0(y)} \right)^{-1} \right\}, \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

**Доказательство.** Обозначим  $p(x) = \frac{p_0(x)}{\pi}$  и пусть  $x = q(y)$  функция, обратная к  $y = p(x)$ ; очевидно, что  $q(y) = q_0(\pi y)$ .

Согласно лемме существует целая функция

$$G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{z^{2k}}{[q(k)]^{2\rho}} \right\}$$

с неотрицательными коэффициентами такая, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\log G(x)}{p_0(|x|)} = 1.$$

Поэтому существует постоянная  $A_0 > 0$  такая, что

$$(G(x))^{-\frac{1}{2}} \geq e^{-p_0(|x|)} \text{ при } |x| \geq A_0.$$

Обозначая далее

$$\max_{|x| < A_0} \sqrt{G(x)} e^{-p_0(|x|)} = B_0$$

и

$$\max \{1, B_0\} = C_0,$$

очевидно, будем иметь

$$e^{-p_0(|x|)} \leq \frac{C_0}{\sqrt{G(x)}}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (15)$$

С другой стороны, пользуясь известным результатом С. Н. Бернштейна [5], можно утверждать, что существует полином  $P_{n_p}(x)$  степени  $n_p (n = 1, 2, \dots)$  такой, что при  $-\infty < x < +\infty$ ,

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{x^{2p}}{|q(k)|^{2p}} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} ||x| - P_{n_p}(x)| < \\ & < O \left\{ \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{q(k)} \right)^{-1} \right\} = O \left\{ \left( \int_1^n \frac{dy}{q(y)} \right)^{-1} \right\} = \\ & = O \left\{ \left( \int_1^{\pi\pi} \frac{dy}{q_0(y)} \right)^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует, что

$$E_{n_p}(|x|, p_0(|x|)) < O \left\{ \left( \int_1^{\pi\pi} \frac{dy}{q_0(y)} \right)^{-1} \right\}, \quad (17)$$

откуда легко вытекает оценка (14) теоремы.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 2 XI 1957

### Մ. Մ. ՋԵՐԱՂԻԱՆ

## |X| ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԿՇՌՅԱԼ-ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ԱՍԲՈՂՋ ԻՐԱԿԱՆ ԱՌԱՆՅՔԻ ՎՐԱ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս հոդվածում բերվում է  $|x|$  ֆունկցիայի կշռյալ-լավագույն մոտա-  
վորությունը զնաճատականը ալի դեպքում, երբ կշիռը  $e^{-p_0(|x|)}$  բավարարում է  
հետևյալ պայմաններին՝

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x p_0'(x)}{p_0(x)} = p \geq 1 \quad \text{ամբողջ է.}$$

$$բ) \quad p = 1 \quad \text{դեպքում,} \quad \int_1^{\infty} p_0(x) x^{-2} dx = +\infty;$$

Ապացուցվում է, որ այս պայմանների դեպքում

$$E_n(|x|; p_0(|x|)) = O\left\{\left(\int_0^{\frac{\pi n}{p}} \frac{dy}{q_0(y)}\right)^{-1}\right\}, \quad \text{где } n \rightarrow \infty,$$

причем  $x = q_0(y)$ ,  $y = p_0(x)$  — функции взаимно обратные.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Джрбашян М. М. О метрических признаках полноты системы полиномов в неограниченных областях. ДАН Арм. ССР, т. VII, № 1 (1947).
2. Джрбашян М. М. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области. Мат. сборник, т. 36 (78): 3 (1955).
3. S. Jsumi, T. Kawata, Quasianalytic class and closure  $\{a^n\}$  in the interval  $(-\infty, +\infty)$  Tohoku Mathem. Journ., 43 (1937), 267—273.
4. Джрбашян М. М. О росте производных полиномов. ДАН СССР, т. 84, № 1 (1952).
5. Джрбашян М. М. О взвешенно-наилучшем приближении полиномами на вещественной оси. ДАН СССР, т. 84, № 6 (1952).
6. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений, т. 1 (1952).