

А. М. Мхитарян

Количественный анализ разрывного решения задачи об определении характеристик установившегося поезда волн на быстротоке

В в е д е н и е

Катящимися будем называть волны, распространяющиеся в виде прогрессивных волн по наклонному каналу с постоянной скоростью, без искажения формы и таким образом, что мгновенные действительные скорости частиц воды в теле волны везде меньше скорости распространения самой волны. Такой ряд следующих друг за другом волн будем называть поездом волн. Канал рассматривается плоскодонным, широкого прямоугольного сечения, большого уклона и однородным по шероховатости дна и стенок вдоль его длины.

Из рассмотрения совершенно исключаются как вопросы, связанные с аэрацией потока, так и вопросы о возникновении и развитии волн, что означает исключение начального участка быстротока, где происходит установление поезда волн, быстроток же считается практически бесконечной длины.

Явление образования и продвижения волн на быстротоке управляется уравнениями гидродинамики реальной несжимаемой жидкости, специально упрощенными и уточненными применительно к движению весомой жидкости в открытых каналах конечной глубины.

В этой работе мы будем пользоваться методом, предложенным Дресслером [1]. Исходим из уравнений теории мелководья с учетом сопротивления в виде эмпирического члена (формула Шези). Здесь же отметим, что Фридрихом [2] доказан приближенный характер этих уравнений, поскольку они являются только довольно грубым приближением более точных уравнений. Пользуясь методом Фридриха, Келлер [3] нашел последующие приближения без учета трения и пришел к цноидальным волнам, найденным еще в прошлом веке Кортевегом и Вранзом [4]. С другой стороны доказано (см. напр. [1]), что обычные приближенные уравнения мелководья непрерывных периодических по расстоянию решений не содержат.

Поэтому Дресслер [1] рассматривает катящиеся волны как распространение разрывов, соединенных непрерывными кривыми, тогда

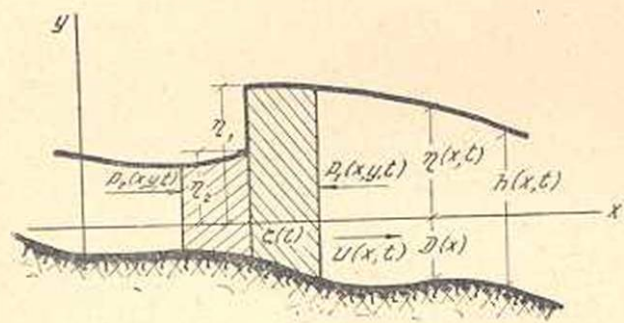
обычные уравнения теории мелководья будут удовлетворены во всех точках непрерывности профиля волны в поезде, а в точках разрыва будут удовлетворены условия разрыва.

Действительно, наблюдения показывают, что волны на быстротоке имеют разрывной характер, особенно в голове волны, остальная часть волны позволяет делать все допущения теории мелководья, а потому хорошо описывается ею, как это показано Томасом [5].

Итак, катящиеся волны рассматриваются как движение разрывов постоянной высоты, на постоянном расстоянии друг от друга и с постоянной скоростью, причем для определения профиля волны будем пользоваться обычными уравнениями теории мелководья, а в разрывах — условиями разрыва.

§ 1. Условия разрыва

Эти условия выводятся почти во всех учебниках, их вывод приводится также в [1].



Фиг. 1. Схема движения разрыва по наклонному каналу.

Картина движения схематически представлена на фиг. 1.

Здесь $\xi(t)$ — абсцисса разрыва, p — давление воды,

$\eta(x, t)$ — высота свободной поверхности над осью x ,

$D = D(x)$ — уравнение дна канала.

Указанные условия разрыва имеют вид:

$$\bar{p}_1 v_1 = \bar{p}_2 v_2 = M, \quad (\text{для масс}) \quad (1.1)$$

$$M(v_1 - v_2) = \bar{p}_2 - \bar{p}_1, \quad (\text{для количества движения}) \quad (1.2)$$

$$\lim \frac{dE}{dt} = \frac{Mg}{\rho} \frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)^3}{4\bar{p}_1 \bar{p}_2} \quad (\text{для энергии}). \quad (1.3)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \rho(\eta_1 + D), & \bar{p}_2 &= \rho(\eta_2 + D), \\ v_1 &= u_1 - \frac{d\xi}{dt}, & v_2 &= u_2 - \frac{d\xi}{dt}, \\ \bar{p}_1 &= \frac{1}{2} g \rho (\eta_1 + D)^2, & \bar{p}_2 &= \frac{1}{2} g \rho (\eta_2 + D)^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Отметим одно замечательное обстоятельство. Эти условия, выведенные для канала с произвольным очертанием дна и с учетом со-

противления, совершенно тождественны с таковыми для случая движения идеальной жидкости по каналу с горизонтальным дном.

Так как частица при пересечении разрыва может только терять энергию, но не приобрести ее, то должно быть

$$\frac{dE}{dt} < 0. \quad (1.5)$$

Условиями разрыва (1.1), (1.2) и (1.5) мы и будем в дальнейшем пользоваться для построения разрывного решения задачи о катящихся волнах.

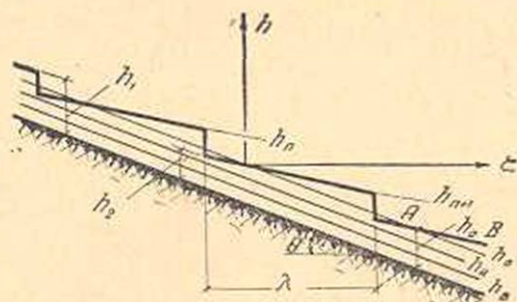
§ 2. Основные уравнения задачи

Рассмотрим канал широкого прямоугольного сечения, с плоским дном и с углом наклона к горизонту, равным θ (см. фиг. 2).

Согласно теории мелководья вертикальное ускорение частицы мало по сравнению с гравитационным ускорением и поэтому давление распределяется по гидростатическому закону

$$p = g\eta(\eta - y). \quad (2.1)$$

Кроме того, скорость частицы по оси x не зависит от y . Тогда, беря уравнение движения по оси x и уравнение неразрывности, учитывая сопротивление по Шези, будем иметь:



Фиг. 2. Схема движения поезда волн по быстротоку.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = gi - \frac{k^2 u^2}{4h}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uh) = 0, \quad (2.3)$$

где $h(x, t) = \eta(x, t) + D(x)$, k — коэффициент сопротивления, причем $k^2 = \frac{4g}{C^2}$, где C — коэффициент Шези, g — ускорение силы тяжести, i — уклон дна.

Два уравнения (2.2) и (2.3), служат для определения двух неизвестных функций — скорости — $u(x, t)$ и глубины свободной поверхности над дном канала — $h(x, t)$.

Обозначим:

$$c = \frac{dx}{dt} \text{ — скорость распространения волны,} \quad (2.4)$$

λ — длина волны,

q — погонный расход воды.

Введем следующие величины

$$\begin{aligned}
 x &= \bar{x} \frac{c^2}{g}, \quad \zeta = \bar{\zeta} \frac{c^2}{g}, \quad h = \bar{h} \frac{c^2}{g}, \quad \lambda = \bar{\lambda} \frac{c^2}{g}, \\
 t &= \bar{t} \frac{c}{g}, \quad q = \bar{q} \frac{c^3}{g}, \quad v_1 = \bar{v}_1 c, \quad u = \bar{u} c, \\
 M &= \bar{M} \rho \frac{c^3}{g}, \quad E = \bar{E} \rho \frac{c^4}{g^2},
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

где черточками сверху обозначены соответствующие величины в безразмерном виде.

Введя эти величины в условия разрыва (1.1) — (1.3) и в основные уравнения (2.2) — (2.3) и отбрасывая, для простоты, черточки, получим для условий разрыва

$$\begin{aligned}
 q &= h_1 v_1 = h_2 v_2 \\
 q(v_2 - v_1) &= \frac{h_2^2 - h_1^2}{2},
 \end{aligned}
 \tag{1.1'}$$

или согласно (1.4)

$$q(u_1 - u_2) = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2}, \tag{1.2'}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2}. \tag{1.3'}$$

Основные уравнения примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = i \left(1 - \frac{k^2 u^2}{4ih} \right), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uh) = 0. \tag{2.7}$$

Сообщим координатной системе постоянную скорость, равную скорости распространения волн в поезде в положительном направлении оси x , т. е. сделаем преобразование координат

$$\zeta = x - t, \quad t = t, \tag{2.8}$$

причем все величины безразмерные по (2.5).

Следовательно, система (2.6) — (2.7) примет следующий вид:

$$\frac{du}{d\zeta} = \frac{i(u-1) \left(1 - \frac{\zeta^2 u^2}{4h} \right)}{(u-1)^2 - h}, \tag{2.9}$$

$$\frac{dh}{d\zeta} = - \frac{ih \left(1 - \frac{\zeta^2 u^2}{4h} \right)}{(u-1)^2 - h}. \tag{2.10}$$

Здесь и далее введена безразмерная величина

$$\xi = \frac{k}{V i} ; \quad (2.11)$$

Задача свелась к установившейся; наши неизвестные функции (u и h) зависят теперь только от одной переменной ξ .

Прежде чем перейти к исследованию вида свободной поверхности, найдем связь между скоростью частиц воды и глубиной свободной поверхности над дном в подвижной системе координат. Для этой цели исключим $d\xi$ из (2.9) и (2.10), получим простое дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dh} = -\frac{u-1}{h} = \frac{1-u}{h},$$

которое легко интегрируется и дает

$$(1-u)h = q = \text{const}, \quad (2.12)$$

где q — погонный расход, наблюдаемый из подвижной системы координат (прогрессивный погонный расход [1]).

Подставляя u из (2.12) в (2.10), получим уравнение свободной поверхности в дифференциальной форме

$$\frac{dh}{d\xi} = -\frac{ih \left[1 - \frac{\xi^2 (h-q)^2}{4h^3} \right]}{\frac{q^2}{h^2} - h}. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) в несколько иной форме изучалось Томасом [5], Дресслером [1] и другими, причем протабулированы важнейшие черты всех возможных профилей свободной поверхности, которые даются этим уравнением.

Для нас здесь важно отметить, что во всех этих решениях нет, периодических по расстоянию, непрерывных решений, могущих быть использованными для получения катящихся волн на быстротоке. Но еще Томас [5] обратил внимание на то, что два из полученных им профилей свободной поверхности, а именно профили 5 и 6, имеют одинаковую кривизну, при подходе к некоторой постоянной глубине. Используя это, Дресслер [1] выдвинул идею построить, периодическое по расстоянию, разрывное решение для получения установившегося поезда катящихся волн на быстротоке.

Идея эта такова. По быстротоку двигаются на определенном одинаковом расстоянии одинаковой высоты разрывы непрерывности свободной поверхности с постоянной скоростью поезда волн.

Эти разрывы соединены между собой непрерывными кривыми типа 5 и 6, полученными из уравнения (2.13).

Эта картина схематически представлена на фиг. 2.

Здесь h_0 — глубина специального решения.

Непрерывное решение должно обладать таким свойством, чтобы в части A — поток был сверхкритическим, а в B — докритическим, если движение его наблюдается из подвижной системы координат, т. е. действительные скорости частицы должны быть больше в области больших глубин. На профиле в какой-то точке мы должны иметь глубину h_0 , отделяющую указанные области движения.

Эти части должны быть расположены именно так, как это показано на фиг. 2, чтобы частица в теле волны, имеющая скорость меньшую, чем скорость самой волны, пересекала разрыв из области малых глубин в область больших.

В этом случае, очевидно, неравенство (1.5) будет удовлетворено автоматически.

Итак, мы должны построить такой профиль, в точках непрерывности которого удовлетворится уравнение (2.13), а в точках разрыва непрерывности — условия (1.1) — (1.2), поскольку неравенство энергии (1.5) удовлетворено.

§ 3. Условия образования поезда катящихся волн

Назовем специальным решением то решение, при котором обращаются в нуль одновременно числитель и знаменатель в уравнении (2.10).

Глубина h_0 , соответствующая этому решению найдется из условия равенства нулю знаменателя в (2.10), т. е.

$$(u_0 - 1)^2 - h_0 = 0. \quad (3.1)$$

(Здесь и в дальнейшем индексом „нуль“ отмечаются соответствующие величины, относящиеся к специальному решению).

Но в [1] и [5] показано, что из этого случая катящиеся волны получены быть не могут, т. е. из наблюдений и теоретических рассуждений известно, что в окрестности указанной точки h_0 производная $\frac{\partial h}{\partial \xi}$ остается ограниченной, а не бесконечна, как это следует из

(2.10). Для этого необходимо и достаточно, чтобы числитель в (2.10) тоже обращался бы в нуль в точке h_0 , т. е. мы приходим к специальному решению.

Из сказанного следует, что только из этого специального случая подходящим соединением движущихся разрывов могут быть получены катящиеся волны на быстротоке.

Итак, мы приходим к выводу, что числитель и знаменатель правой части уравнения (2.10) имеют один общий корень h_0 . Полагая в (2.10) числитель равным нулю при $h = h_0$, $u = u_0$, получим:

$$1 - \frac{\xi^2 u_0^2}{4h_0} = 0. \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) легко найдем

$$u_0 = \left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^{-1}, \quad (3.3)$$

$$h_0 = \left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^{-2}. \quad (3.4)$$

Поскольку $\xi > 0$, то $u_0 < 1$ по (3.3), что подтверждается наблюдениями, согласно которым скорость частиц в теле волны меньше скорости самой волны.

При $\xi = 0$ (сопротивление отсутствует) имеем $u_0 = 1$, т. е. частица движется со скоростью волны, что противоречит указанному выше факту. Следовательно, для образования катящихся волн необходимо (но недостаточно), чтобы

$$\xi > 0. \quad (3.5)$$

Этим подтверждается факт, что катящиеся волны не образуются, если трение отсутствует.

Используя (3.1) в (2.12), найдем

$$q_0 = \left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^{-3}. \quad (3.6)$$

Используя (3.3), (3.4) и (3.6) в (2.10) и сокращая числитель и знаменатель на $(h - h_0)$, получим

$$\frac{dh}{d\xi} = i \frac{h^2 + h \left(h_0 - \frac{\xi^2}{4}\right) + h_0^2 \frac{\xi^2}{4}}{h^2 + hh_0 + h_0^2}. \quad (3.7)$$

Чтобы получить действительный профиль для катящихся волн, согласно соображениям, приведенным выше, мы должны иметь:

$$\left. \frac{dh}{d\xi} \right|_{h=h_0} > 0.$$

Из (3.7) видно, что для этого необходимо, чтобы

$$\xi < i. \quad (3.8)$$

Возвращаясь к параметрам водовода, получаем следующее важное соотношение между ними

$$k^2 < 1. \quad (3.9)$$

Этот результат найден Джеффрисом [6], а позднее, Томасом [5] несколько другим способом. Условие (3.9) совпадает с результатом Дресслера [1], только написано в несколько иной форме.

Объединяя (3.5) и (3.8), получаем следующий основной критерий образования установившегося поезда волн на быстротоке

$$0 < \xi < 1. \quad (3.10)$$

При $\xi = 0$ и $\xi \geq 1$ волны не образуются.

§ 4. Построение разрывного решения для катящихся волн

Обратимся теперь к основному уравнению (3.7), представим его в следующем виде:

$$\frac{dh}{d\xi} = i \frac{(h - h_A)(h - h_B)}{h^2 + hh_0 + h_0^2}. \quad (4.1)$$

Здесь h_A и h_B — корни числителя (3.7), имеющие выражения

$$h_A = F_A h_0 = h_0 \left[\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{8} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\xi}} \right) \right], \quad (4.2)$$

$$h_B = F_B h_0 = h_0 \left[\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{8} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8}{\xi}} \right) \right]. \quad (4.3)$$

Простое исследование показывает, что имеет место следующее условие между этими величинами

$$0 < h_B < h_A < h_0. \quad (4.4)$$

в чем легко убедиться, пользуясь основным критерием (3.10). Функции F_A и F_B представлены на фиг. 3.

Уравнение (4.1) легко интегрируется и дает

$$\begin{aligned} \xi = (h - h_0) + \frac{h_A^2 + h_A h_0 + h_0^2}{h_A - h_B} \ln \frac{h - h_A}{h_0 - h_A} - \\ - \frac{h_B^2 + h_B h_0 + h_0^2}{h_A - h_B} \ln \frac{h - h_B}{h_0 - h_B}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Начало координат выбрано так, чтобы иметь условие $\xi = 0$ при $h = h_0$ и из этого условия определена постоянная интегрирования.

Пользуясь этой формулой, легко построить профиль для первой волны, т. е. кривую $h = h(\xi)$; следующая волна получается из первой, перемещением всех точек по оси ξ на расстояние, равное безразмерной длине волны λ , причем для получения размерной длины согласно (2.5) следует λ умножать на $\frac{c^2}{g}$.

На фиг. 2 схематически показаны кривые $h_n = h_n(\xi)$, которые даются формулой (4.5) указанным выше способом, причем непрерывные кривые соединены разрывами неизвестной высоты.

Здесь h_1 — максимальная высота волны,

h_2 — минимальная высота волны,

λ — длина волны.

$$H = h_1 - h_2. \quad (4.6)$$

H — называется высотой разрыва.

Для определения неизвестных высот h_1 и h_2 обратимся к условиям разрыва. Из них условие энергии, как показано выше, удовлетворяется.

Условие для масс (1.1') дает

$$(1 - u_1) h_1 = (1 - u_2) h_2 = q_0, \quad (4.7)$$

т. е. условие для масс также выполняется, если мы параметр q — прогрессивный погонный расход воды, ограничиваем его значением q_0 , которое дается формулой (3.6).

Остается условие (1.2') для количества движения.

Из уравнения (4.7) имеем

$$u_1 = 1 - \frac{q_0}{h_1}, \quad u_2 = 1 - \frac{q_0}{h_2}.$$

Подставляя это в (1.2), получим

$$2q_0^2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2} = h_1^2 - h_2^2.$$

или, сокращая на $h_1 - h_2 \neq 0$,

$$2q_0^2 \frac{1}{h_1 h_2} = h_1 + h_2. \quad (4.8)$$

Мы получили одно соотношение между двумя неизвестными, другое соотношение между ними найдется из геометрических соображений, используя тот факт, что разрыв, который встречается в некоторой точке ζ , принадлежит одновременно двум кривым, т. е. $\zeta = h_A(h_1) = h_{A+1}(h_2)$.

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} (h_1 - h_0) + \frac{h_A^2 + h_A h_0 + h_0^2}{h_A - h_B} \ln \frac{h_1 - h_A}{h_0 - h_A} - \frac{h_B^2 + h_B h_0 + h_0^2}{h_A - h_B} \ln \frac{h_1 - h_B}{h_0 - h_B} = \\ = (h_2 - h_0) + \frac{h_A^2 + h_A h_0 + h_0^2}{h_A - h_B} \ln \frac{h_2 - h_A}{h_0 - h_A} - \\ - \frac{h_B^2 + h_B h_0 + h_0^2}{h_A - h_B} \ln \frac{h_2 - h_B}{h_0 - h_B} + \bar{D}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из двух соотношений (4.8) и (4.9) можно найти h_1 и h_2 .

Пользуясь тем, что $h_1 > h_2$, легко найдем

$$h_2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{h_1^2 - \frac{a_3}{h_1}} - h_1 \right], \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{D} = \frac{3}{2} h_1 - \frac{1}{2} F(h_1) + a_4 \left\{ a_1 \lg \frac{h_1 - h_A}{\frac{1}{2} [F(h_1) - h_1] - h_A} - \right. \\ \left. - a_2 \lg \frac{h_1 - h_B}{\frac{1}{2} [F(h_1) - h_1] - h_B} \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$H = h_1 - h_2 = \frac{3}{2}h_1 - \frac{1}{2}F(h_1), \quad F(h_1) = \sqrt{h_1^2 + \frac{a_2}{h_1}}, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= F_A^2 + F_A + 1, & a_2 &= F_B^2 + F_B + 1, \\ h_A &= \frac{F_A}{\left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^2}, & h_B &= \frac{F_B}{\left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^2}, \\ a_3 &= \frac{8}{\left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^6}, & a_4 &= \frac{2,303}{\frac{\xi^2}{4} \left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^2 \sqrt{1 + \frac{8}{\xi}}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

F_A и F_B берутся по (4.2).

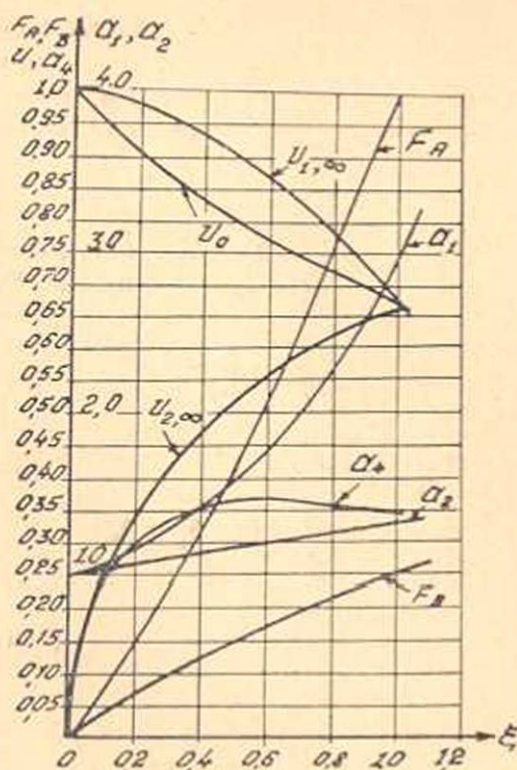
§ 5. Исследование полученного решения

Все величины: F_A , F_B , h_A , h_B , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 являются только функциями безразмерной характеристики быстроготока — ξ , сами являясь тоже безразмерными. Пользуясь основным критерием (3.10) и соотношениями (4.3) и (4.13), мы рассчитали все эти коэффициенты и представили на фиг. 3 и 4.

На этих же рисунках представлены u_0 , h_0 , q_0 в зависимости от ξ , рассчитанные по формулам (3.3), (3.4) и (3.6).

Графики на фиг. 3 и 4 носят вспомогательный характер, в дальнейшем будет показано как ими пользоваться.

Обратимся теперь к соотношениям (4.10), (4.11) и (4.12). Из них видно, что безразмерные максимальная и минимальная высоты волны, а также высота разрыва являются функциями безразмерной характеристики быстроготока — ξ и величины $\tilde{h}$, где i — уклон дна, λ — безразмерная длина волны в поезде.



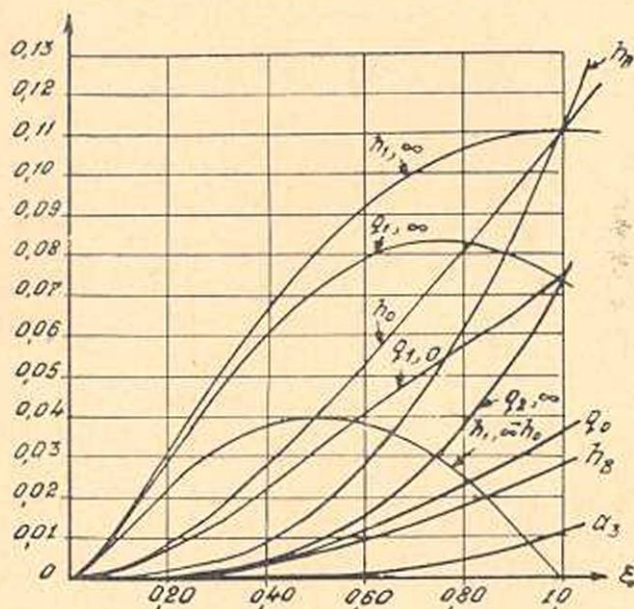
Фиг. 3. Зависимость различных величин от характеристик быстроготока.

Рассмотрим сперва волны нулевой длины при различных значе-

ниях ξ , определяемых (3.10). Соотношение (4.11) показывает, что при $\lambda \rightarrow 0$ ($i > 0$) имеем

$$h_{1,0} = h_0, \quad (5.1)$$

где $h_{1,0}$ — максимальная высота волны при $\lambda = 0$. (Здесь и далее вторыми индексами снабжаются соответствующие величины, отвечающие той или иной длине волны).



Фиг. 4. Зависимость различных величин от характеристик быстрого тока.

Пользуясь (4.10) и (4.12), легко найдем при $\lambda = 0$.

$$h_{1,0} = h_{2,0} = h_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^2}, \quad (5.2)$$

$$H_0 = h_{1,0} - h_{2,0} = 0. \quad (5.3)$$

Рассмотрим теперь другой крайний случай, когда $\lambda \rightarrow \infty$. В этом случае имеем

$$\frac{1}{2} [F(h_1) - h_1] - h_A = 0.$$

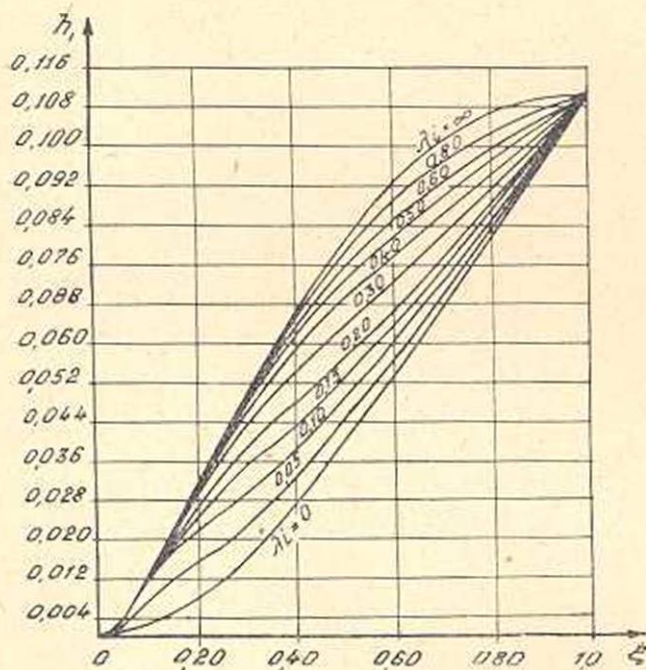
Откуда

$$\left. \begin{aligned} h_{1,\infty} &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{h_A^2 + \frac{a_3}{h_A}} - h_A \right], \\ H_\infty &= \frac{3}{2} h_{1,\infty} - \frac{1}{2} \sqrt{h_{1,\infty}^2 + \frac{a_3}{h_{1,\infty}}}, \\ h_{2,\infty} &= h_{1,\infty} - H_\infty. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Графики $h_{1,\infty}$ — максимальной высоты волны при бесконечной ее длине и $h_{1,0} = h_0$, зависящих от ξ , представлены на той же фиг. 4. При $\xi = 0$ имеем $h_{1,0} = h_{2,0} = 0$, $H_0 = 0$ (как и при любой длине волны),

$$h_{1,\infty} = h_{2,\infty} = 0, \quad H_\infty = 0.$$

При $\xi = 1$ имеем $h_{1,\infty} = h_{1,0} = h_{2,0} = 0,1111$, $H_0 = H_\infty = 0$. Разность $h_{1,\infty} - h_{1,0}$, при любом значении ξ , показанная на той же фиг. 4, представляет собой изменение максимальной высоты волны при изменении длины волны от бесконечности до нуля; она достигает величины порядка 0,04 при $\xi = 0,50 - 0,52$ и является одним из основных и важных результатов, показывающим в каком именно направлении нужно вести экспериментальные исследования.



Фиг. 5. Зависимость максимальной высоты волны от характеристик быстрого тока и длины волны $h_1 = h_1(\xi, \lambda)$.

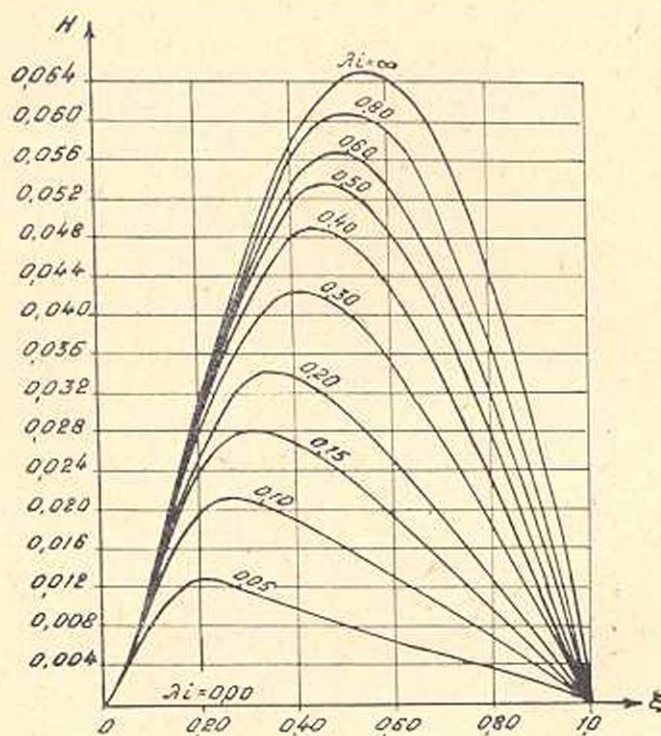
Задавая ξ — различные постоянные значения в интервале (3.10) и h_1 — различные значения в пределах $h_{1,0} - h_{1,\infty}$ для данного значения ξ , мы по (4.11) рассчитывали λ , а по (4.12) — H . Результаты представили на рисунках, которые за недостатком места мы здесь не приводим.

Желая в дальнейшем в качестве параметра принимать λ , пользуясь этими графиками, мы при заданном постоянном значении λ определяли h_1 и H в зависимости от ξ и результаты представили на фиг. 5 и 6, причем для построения крайних кривых, соответствующих $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$, мы воспользовались соотношениями (5.2) и (5.4).

Обращают на себя внимание графики на фиг. 6. Для всех λ имеем $H = 0$ как при $\xi = 0$, так и при $\xi = 1$. Кроме того, для любого значения λ имеется определенное значение ξ , при котором высота разрыва становится максимальной, причем эти значения параметра ξ , назовем их $\xi_{\max}$, увеличиваются с увеличением уклона, при постоянной длине волны, или с увеличением длины волны при $i = \text{const}$. Эту закономерность, напоминавшую известный из физики закон смещения,

Обращают на себя внимание графики на фиг. 6. Для всех λ имеем $H = 0$ как при $\xi = 0$, так и при $\xi = 1$. Кроме того, для любого значения λ имеется определенное значение ξ , при котором высота разрыва становится максимальной, причем эти значения параметра ξ , назовем их $\xi_{\max}$, увеличиваются с увеличением уклона, при постоянной длине волны, или с увеличением длины волны при $i = \text{const}$. Эту закономерность, напоминавшую известный из физики закон смещения,

аналитическим путем мы не находили из-за громоздких вычислений, но фиг. 6 показывает, что эти максимумы располагаются на некоторой кривой, очень близкой к прямой.



Фиг. 6. Зависимость высоты разрыва от характеристик быстротока и длины волны, $H = H(\xi, \lambda_i)$.

Согласно (4.7) имеем

$$u_1 = 1 - \frac{q_0}{h_1}, \quad u_2 = 1 - \frac{q_0}{h_2}. \quad (5.5)$$

В случае, когда $\lambda \rightarrow 0$ имеем $h_{1,0} = h_{2,0} = h_0$ т. е.

$$u_{1,0} = u_{2,0} = u_0 = \frac{1}{1 + \frac{\xi}{2}}, \quad (5.6)$$

что легко получить, пользуясь формулами (3.4) и (3.6).

В случае, когда $\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$h_1 = h_{1,\infty}, \quad h_2 = h_{2,\infty} = h_{1,\infty} - H_\infty, \\ u_{1,\infty} = 1 - \frac{q_0}{h_{1,\infty}} \quad \text{и} \quad u_{2,\infty} = 1 - \frac{q_0}{h_{2,\infty}} \quad (5.7)$$

Величины $u_{1,\infty}$ и $u_{2,\infty}$, зависящие только от ξ представлены на фиг. 3.

Действительный волновой расход определяется формулой

$$q(\zeta) = uh = h - q_0. \quad (5.8)$$

Волновые расходы в голове волны — q_1 и в хвосте волны — q_2 определяются соотношениями

$$q_1 = h_1 - q_0, \quad q_2 = h_2 - q_0. \quad (5.9)$$

В случае, когда $\lambda \rightarrow 0$ имеем $h_{1,0} = h_{2,0} = h_0$ и, как легко убедиться, получаем

$$q_{1,0} = q_{2,0} = h_0 - q_0 = u_0 h_0. \quad (5.10)$$

В случае, когда $\lambda \rightarrow \infty$, имеем

$$q_{1,\infty} = u_{1,\infty} h_{1,\infty} = h_{1,\infty} - q_0, \quad (5.11)$$

$$q_{2,\infty} = u_{2,\infty} h_{2,\infty} = h_{2,\infty} - q_0 = h_{1,\infty} - H_\infty - q_0.$$

Величины $q_{1,0}$, $q_{1,\infty}$ и $q_{2,\infty}$ также зависят только от ξ .

Графики этих функций представлены на фиг. 4. Кривые $q_{1,\infty}$ и $q_{2,\infty}$ пересекаются в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1,0$ точно также, как и кривые h_0 , $h_{1,\infty}$ и $h_{2,\infty}$.

Представляет определенный интерес подсчитать диссипацию энергии при разрыве.

Для этого пользуемся формулой (4.3). Очень важно подсчитать потери энергии при разрыве на единицу длины волны.

Обозначим

$$e = - \frac{dE}{dt} \frac{1}{i\lambda q_0}. \quad (5.12)$$

Тогда получим

$$e = \frac{H^3}{4h_1(h_1 - H)i\lambda}. \quad (5.13)$$

Задавая ξ постоянные значения, $i\lambda$ — различные значения и пользуясь произведенными расчетами для h_1 и H , легко подсчитать e . Результаты этих вычислений представлены на фиг. 7.

Прежде чем переходить к расчетам, определим скорость распространения поезда волн. Для этого воспользуемся выражением (5.8) для волнового расхода. Это выражение мы напомним в размерных величинах

$$q_b(\zeta) = uh = ch - q_0, \quad (5.14)$$

где $q_0 = m^2/\text{сек}$ — прогрессивный погонный расход;

q_b — волновой расход, являющийся периодической переменной величиной, имеющей ту же размерность, что и q_0 ;

h — глубина свободной поверхности над дном в метрах;

c — скорость распространения волны по (2.4); $\zeta = x - ct$.

Осредним величину q_b , чтобы найти средний по времени погон-

ный расход, проходящий через данное фиксированное сечение, равный, очевидно, расходу подаваемому в голове быстрогока. Обозначим этот расход через q .

Имеем

$$q = \frac{c}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{c}} q_0(\zeta) dt = \frac{c}{\lambda} \int_0^{\lambda} h(\xi, \tilde{\zeta}) d\tilde{\zeta} - q_0. \quad (5.15)$$

Переходя в правой части к тем же безразмерным величинам (2.5), и вводя новую переменную

$$\tilde{\zeta} = \zeta_1, \quad (5.16)$$

получим вместо (5.15)

$$q = \frac{c^3}{g} \left[\frac{1}{\lambda_1} \int_0^{\lambda_1} h(\tilde{\zeta}, \zeta_1) d\zeta_1 - q_0 \right]$$

где $\lambda_1 = \tilde{\lambda}$. Черточки над буквами в квадратных скобках снова опущены.

Отсюда

$$c = (gq)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{1}{\lambda_1} \int_0^{\lambda_1} h d\zeta - q_0 \right]^{-\frac{1}{3}}. \quad (5.17)$$

$q_0(\zeta)$ определяется по (3.6), q обычно задается, поэтому (5.17) может быть использовано для определения скорости c , если известно λ . Представим эту формулу в следующем виде [1]:

$$c = \alpha g^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{3}}, \quad (5.18)$$

причем для безразмерного коэффициента α , назовем его коэффициентом быстроты волны, имеем

$$\alpha = \alpha(\xi, \tilde{\lambda}) = \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} \int_0^{\tilde{\lambda}} h d\zeta_1 - q_0 \right)^{-\frac{1}{3}}. \quad (5.19)$$

Пользуясь (5.19), для α можно получить следующие асимптотические выражения.

Когда $\lambda \rightarrow 0$, $h \rightarrow h_0$ и мы получаем

$$\alpha_0 = \alpha_0(\xi) = (h_0 - q_0)^{-\frac{1}{3}}. \quad (5.20)$$

Или, согласно (3.4) и (3.6),

$$\alpha_0 = \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \left(\frac{\xi}{2} \right)^{-\frac{2}{3}}. \quad (5.20')$$

В случае, когда $\lambda \rightarrow \infty$, $h \rightarrow h_{1,\infty}$ справа, причем $h_{1,\infty}$ ограничена сверху, $h \rightarrow h_A$ слева. Площадь, ограниченная волной стремится к $h_A \cdot \lambda$, а интеграл — к h_A .

Поэтому

$$\alpha_\infty = \alpha_\infty(\xi) = (h_0 F_A - q_0)^{-\frac{1}{3}}, \quad (5.21)$$

или, согласно (3.4) и (3.6),

$$\alpha_\infty = \left(1 + \frac{2}{\xi}\right) \left[\left(1 + \frac{2}{\xi}\right) F_A - 1\right]^{-\frac{1}{3}}. \quad (5.21')$$

В общем случае α определяется по (5.19). Для этого предварительно нужно вычислить значение интеграла

$$I = \frac{1}{i\hbar} \int_0^{\tilde{\lambda}} h(\xi, i\zeta) d\zeta_1.$$

Воспользуемся теми расчетами, которые уже были произведены выше. Задаем ξ постоянные значения в пределах (3.10), а $i\hbar$ — различные значения; пользуясь графиками на фиг. 5 и 6 определяем h_1 и H , а также $h_2 = h_1 - H$; q_0 и h_0 берем по фиг. 4. Далее, задаем h различные значения в пределах от h_2 до h_1 , причем берем значения h как больше, так и меньше h_0 . По формуле

$$i\zeta = (h - h_0) + a_1 \lg \frac{h - h_A}{h_0 - h_A} - a_2 \lg \frac{h - h_B}{h_0 - h_B} \quad (5.22)$$

определяем, $i\zeta$ т. е. по существу строим профиль волны, а значение интеграла I определяем, беря площадь, ограниченную дном, профилем волны и глубинами h_1 и h_2 , причем пользуемся методом трапеций.

Пользуясь этим расчетом, строим кривые α в функции от $i\hbar$ при различных постоянных значениях параметра ξ . Пользуясь же последними кривыми, мы строим графики α в функции от ξ при различных постоянных значениях параметра $i\hbar$. Кривые, соответствующие α при $\lambda = 0$ (α_0) и $\lambda = \infty$ (α_∞) строим, пользуясь асимптотическими выражениями (5.20) и (5.21) или (5.20') и (5.21').

Результаты вычислений представлены на фиг. 8. Эти функции исследованы нами для всех положительных значений ξ ; получено следующее:

1) при $\xi \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$ для всех длин волн; 2) при $\xi = 1$ $\alpha = 2,381$, в этой последней точке все кривые пересекаются; первое означает, что в канале без сопротивления поезд волн должен обладать бесконечно большой скоростью, т. е. физически невозможно существование волн в случае отсутствия сопротивления; второе же означает, что поезд любой длины волн имеет одну и ту же скорость для канала данного уклона и такого сопротивления, что $\xi = 1$, что возможно в том единственном случае, когда волны отсутствуют, т. е. при достаточно большом сопротивлении волны снова исчезают.

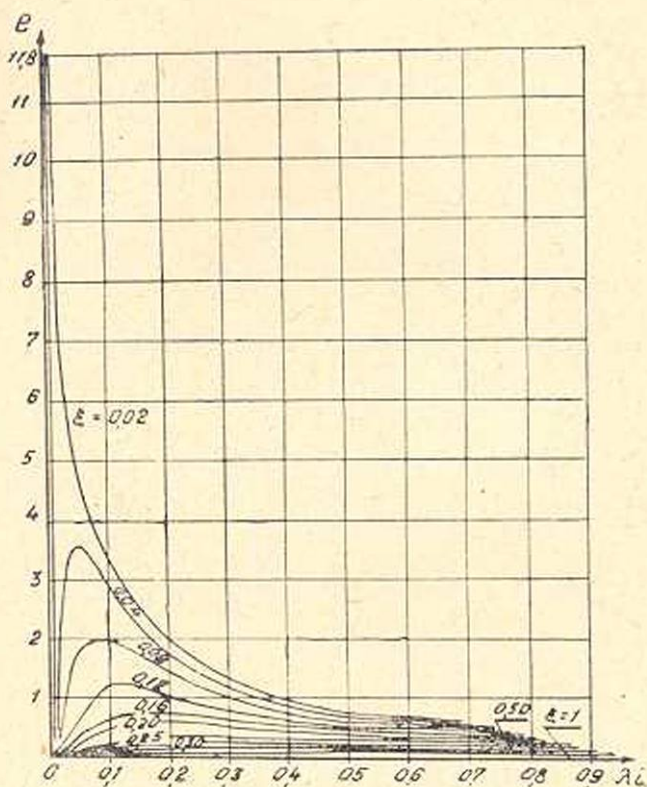
Кривые на фиг. 8 показывают, что в пределах, часто встречающихся на практике ($\xi=0,6-0,8$) α_0 и α_∞ достаточно близки. Чем меньше сопротивление и больше уклон, тем больше отличаются пределы коэффициента α , и наоборот. Графики также показывают, что при одном и том же ξ , с увеличением il коэффициент α растет. Анализ позволяет утверждать, что скорость волны монотонно растет с увеличением длины волны, а по фиг. 5 растет и высота волны. Наблюдения подтверждают этот вывод; известно, что волны большой высоты распространяются с большими скоростями.

Весь расчет проводится следующим образом:

По заданному погонному расходу q и характеристикам канала уклону и сопротивлению, т. е. параметру ξ определяется скорость распространения волн по формуле (8.18), причем для определения коэффициента быстроты волны по фиг. 8, кроме ξ должна быть также длина волны.

Имея длину волны и скорость, определяем безразмерную длину волны (2.5).

По фигурам 5, 6, 7 для данных значений il и ξ определяем безразмерные характеристики поезда волн — максимальную и минимальную высоты, высоту разрыва и потери энергии при разрыве. По формулам (5.5) и (5.9) определяем скорости частиц воды в голове и хвосте волны, а также волновые расходы. Чтобы перейти к размерным величинам, пользуемся (2.5). Профиль волны строим по формуле (5.22).



Фиг. 7. Зависимость отношения диссипации энергии при разрыве к длине волны от характеристик быстротока и длины волны, $e = e(\xi, il)$.

§ 6. Заключение

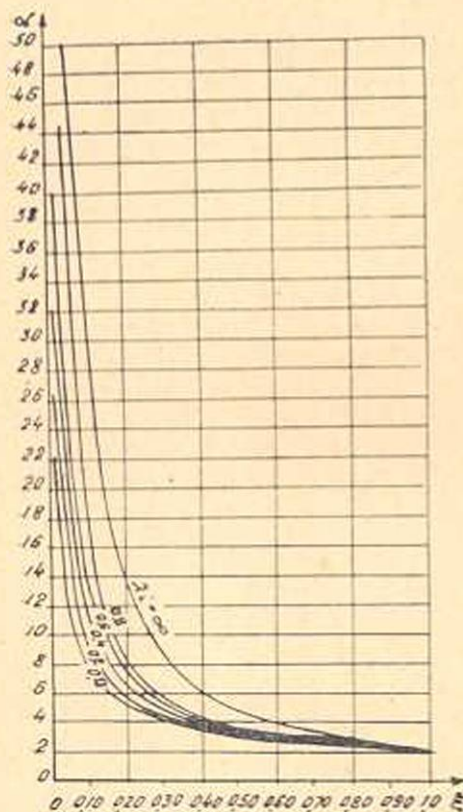
Специальное решение уравнения (2.10), из которого построено периодическое по расстоянию разрывное решение для установивше-

гося поезда катящихся волн на быстротоке, ставит ограничение на прогрессивный погонный расход q , введенный в (2.12). При удовлетворении одного из условий разрыва, а именно условия масс (1.1), мы видели, что достаточно ограничить значение прогрессивного расхода q его значением q_0 , определяемым (3.6), чтобы указанное условие было удовлетворено. Этот вывод находится в полном согласии

с наблюдениями, по которым катящиеся волны образуются только при определенных значениях этого расхода при прочих одинаковых условиях.

Фиг. 5 показывает, что, как для малых, так и для больших длин волн максимальная волновая высота увеличивается с увеличением сопротивления и уменьшением уклона, а при одном и том же уклоне и сопротивлении, эта высота монотонно растет до некоторого предела с увеличением длины волны. При различных значениях уклона и сопротивления, подобранных так, чтобы иметь $\xi = \text{const}$, максимальная высота будет больше при большем уклоне.

Действительно, как показывают наблюдения, для образования катящихся волн необходимо иметь большие глубины при малых уклонах и, наоборот, малые глубины при больших уклонах. Этот результат проливает некоторый свет на вопрос о дальнейшем экспериментальном исследовании воп-



Фиг. 8. Зависимость коэффициента скорости волны от характеристик быстротока и длины волны, $\alpha = \alpha(\xi, i)$

роса об образовании самих волн.

Фиг. 6, показывающая, что высота разрыва $H = 0$ при отсутствии сопротивления ($\xi = 0$) и при достаточно большом сопротивлении ($\xi > 1$) для всех длин волн и уклонов, является прекрасным подтверждением основного замечания Джеффриса в книге Корниша [7] о том, что катящиеся волны, повидимому, формируются сопротивлением.

Фиг. 8 показывает, что коэффициент α монотонно растет как с увеличением длины волны, так и с уменьшением сопротивления и с увеличением уклона, причем уклон влияет в одном и том же направлении как через ξ , так и непосредственно через i . Следовательно, при увеличении параметра ξ , скорость распространения волны, при том

же погонном расходе, уменьшается и наоборот, чем меньше сопротивление и больше уклон, тем больше эта скорость.

При значительных сопротивлениях и малых уклонах, т. е. при больших значениях параметра ξ ($\xi = 0,50 - 0,85$) длина волны меньше влияет на скорость ее распространения и, наоборот, при малых сопротивлениях и больших уклонах волны различных длин распространяются со скоростями, значительно зависящими от их длин, причем совершенно очевидно, что эта скорость монотонно растет с увеличением длины волны, а по фиг. 5 увеличение длины волны сопровождается увеличением ее максимальной высоты. Этим подтверждается известный из наблюдений факт, согласно которому волны большей глубины распространяются с большей скоростью.

Более того, кривые на фиг. 8 показывают, что если взять канал с малым уклоном и малым сопротивлением с тем, чтобы иметь $\xi = 0,5 - 0,95$ и другой канал большего уклона и, соответственно, большего сопротивления, но с тем же значением ξ , то при одном и том же погонном расходе в голове канала, волны на этих двух каналах будут двигаться с почти одинаковыми скоростями. Если же при тех же условиях $\xi < 0,5$, то скорость будет больше в канале большего уклона.

Этот важный результат следует проверить экспериментальным путем.

Водно-энергетический
институт АН Армянской ССР

Поступило 10 II 1957

Ա. Մ. Մխիթարյան

ԱՐԱԳԱՀՈՍՆԵՐԻ ՎՐԱ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ԳՆԱՑՔԻ ԽՆԴՐԻ ԽՉՎՈՂ ԼՈՒԾՄԱՆ ՔԱՆԱԿԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգվածում բերվում է ի թեքությունն ու ի դիմադրության գործակիցն ունեցող, բաղախանաչափ լայն, համասեռ խորդուրորդություններով անվերջ երկար արագահոսի վրա առաջացող ալիքների հաստատված գնացքի խնդրի լուծումը: Օգտվելով Իրենսլերի [1] մեթոդից, ընդունվում է, որ ալք լուծումը խզվող է, ընդ որում ալիքի պրոֆիլի բոլոր կետերում բախարարվում են ջրի փոքր խորությունների հոսանքի սովորական հավասարումները (2.2)–(2.3) տեսքով, բացի այն կետերից, որտեղ ազատ մակերևույթի կորը խզվում է, իսկ ալք խզման կետերում բախարարվում են (1.1)–(1.3) խզման պայմանները: Հոսանքի կտրվածքում ձնշումը ըստ խորության բաշխված է հիդրոստատիկ օրենքով: (2.5) արտահայտությունների միջոցով անցնում ենք չափազուրկ մեծությունների և կատարելով կոորդինատների (2.8) ձեափոխումը, ստանում ենք (2.9)–(2.10) սիստեմը, որտեղից կապ է ստացվում արագության և խորության միջև:

Այնուհետև ցույց է տրվում, որ (2.10) հավասարման հալտարարն ու համարիչն ունեն մի ընդհանուր արմատ, ինչ, որը կոչվում է հատուկ լուծմանը համապատասխանող խորութիւն:

Քանի որ ջրի մասնիկները շարժվում են ավելի փոքր արագությամբ, քան ալիքի ձևը, իսկ ազատ մակերևույթի կորը h_0 խորութիւն շրջակայքում անընդհատ է, ուստի ալիքի առաջացման համար ստացվում է (3.10) հալտարանիչը ընդ որում մտցված է հատուկ չափազուրկ պարամետր (2.11) տեսքով:

Օղավելով (4.1) հավասարման (4.5) ինտեգրալից և խզման պարամետրից ստացվող (4.8) հավասարումից, ալիքի ամենամեծ (h_1) և ամենափոքր (h_2) խորութիւնների ու խզման (H) բարձրութիւն համար ստացվում են (4.10) — (4.12) արտահայտութիւնները: Այնուհետև համառոտակի հետազոտվում են ստացված արդյունքները:

Այն դեպքում, երբ $\lambda \rightarrow 0$, որտեղ λ ալիքի երկարութիւնն է, ստացվում է մի հաստատուն խորութիւն, որը հավասար է հատուկ լուծման խորութիւնը (5.2), բայց որի $H=0$: Այն դեպքում, երբ $\lambda \rightarrow \infty$, ստացվում են (5.4) արտահայտութիւնները: Դիտարկված են նաև դեպքերը արագահոսք բնութագրող է պարամետրի սահմանալին արժեքների համար: Ամենամեծ խորութիւնների և խզման բարձրութիւն համար բերվում են գրաֆիկները 5-ում և 6-ում: Նույն ալիք սահմանալին արժեքների համար հաշված են նաև ջրի ելքերը և մասնիկի արագութիւնները, որոնք բերված են գրաֆիկներ 3-ի և 4-ի վրա: Էներգիայի կորուստները ներկայացված են գրաֆիկ 7-ի վրա:

Ջրի իրական ալիքային ելքը որոշվում է 5.8 հավասարումից, ընդ որում ալիք ելքը պարբերական ֆունկցիա է: Այնուհետև ստացվում են (5.18) արտահայտութիւնը ալիքի տարածման արագութիւն համար, իսկ α գործակիցը համար՝ (5.19)-ը: Վերջինիս համար ստացված են նաև (5.20) և (5.21) ասիմպտոտիկ արտահայտութիւնները՝ շատ կարճ և շատ երկար ալիքների դեպքում:

Կառուցելով ալիքի պրոֆիլը և հաշվելով նրա մակերեսը, հաշվվում է α -ն կամայական λ -ի համար: Արդյունքները ներկայացված են գրաֆիկ 8-ի վրա:

Վերջում համառոտ կերպով շարադրված են աշխատութիւն հիմնական արդյունքները և ցույց է տրված, թե ինչ ուղղութիւնով պետք է շարունակվեն հետադա տեսական և փորձնական հետազոտութիւնները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Dressler R. Mathematical solution of the problem of Roll—Waves in inclined open channels. Comm. of pure and appl. math., v. 2, 1949.
2. Fridrichs. On the derivation of shallow-water Theory. Comm. of pure and appl. math. v. 1, 1948.
3. Keller. The solitary wave and Periodic Waves on Shallow—Water. Comm. of pure and appl. math., v. I, 1948.
4. Korteweg and Vries. On the change of Long: Waves. Phil. mag., ser. 5. v. 1, 1895.
5. Thomas H. Propagation of waves in steep channels. Proc. Hydr. Conf., Iowa, 1940.
6. Jeffreys H. Phil. mag., ser. 6, v. 49, 1925.
7. Cornish B. Ocean Waves. Cambridge, 1934.