ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 1, 1958 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян, Д. В. Пештмалджян

К нелинейной теории пологих ортотропных оболочек

1. Исходные уравнения и соотношения. Рассмотрим весьма пологие ортотропные оболочки под действием нормально приложенной нагрузки $z = z(\alpha, \beta)$. За координатную поверхность примем срединную поверхность оболочки в ортогональных координатах α, β, совпадающих с линиями главной кривизны. Пусть в каждой точке оболочки одна из плоскостей упругой симметрии материала параллельна срединной поверхности, а остальные две—перпендикулярны к координатным линиям.

Следуя работам [1, 2, 8,], задачу решаем на основании следующих предположений:

1. Нормальный к срединной поверхности линейный элемент оболочки после деформации не меняет своей длины.

2. При определении деформаций $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ считаем, что касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ не отличаются от соответствующих напряжений, найденных в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей.

3. При определении удлинений и сдвигов срединной поверхности учитываем лишь те нелинейные члены, которые происходят от нормального перемещения $w = w(\alpha, \beta)$ [7].

В силу принятых предположений, для деформаций $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ имеем [1, 2]:

$$e_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right)\varphi_0, \qquad e_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right)\psi_0, \tag{1.1}$$

где

$$\varphi_0 = -a_{55}\frac{1}{AB}\left\{B\left(B_{11}\frac{\partial \varkappa_1^0}{\partial \alpha} + B_{12}\frac{\partial \varkappa_2^0}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}\left[(B_{11} - B_{12})\varkappa_1^0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (B_{12} - B_{22})\varkappa_2^0\right] + 2\frac{\partial A}{\partial \beta}B_{66}\tau^0 + AB_{66}\frac{\partial \tau^0}{\partial \beta}\right\}; \tag{1.2}$$

$$\psi_0 = -a_{44}\frac{1}{AB}\left\{A\left(B_{22}\frac{\partial \varkappa_2^0}{\partial \beta} + B_{12}\frac{\partial \varkappa_1^0}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial A}{\partial \beta}\left[(B_{22} - B_{12})\varkappa_2^0 + \right.\right.$$

$$+(B_{12}-B_{11})\kappa_1^0\Big]+2\frac{\partial B}{\partial\alpha}B_{66}\tau^0+BB_{66}\frac{\partial\tau^0}{\partial\alpha}\Big\}. \tag{1.3}$$

Величины с нуликами найдены в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей.

В силу (1.1) и принятых предположений, из общих уравнений теории упругости, для перемещений какой-либо точки оболочки получим:

$$u_\alpha=u-\gamma\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\gamma\left(\frac{h^2}{8}-\frac{\gamma^2}{6}\right)\varphi_0;$$

$$u_\beta=v-\gamma\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}-\gamma\left(\frac{h^2}{8}-\frac{\gamma^2}{6}\right)\psi_0; \tag{1.4}$$

$$u_\gamma=w,$$

где u, v, w — компоненты перемещения соответствующей точки срединной поверхности*.

Подставляя значения перемещений u_α, u_β и u_γ в соответствующие выражения для $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\beta\beta}$, $e_{\alpha\beta}$, получим:

$$e_{\alpha\alpha}=\varepsilon_1+\gamma\kappa_1+\gamma^3\theta_1;$$

$$e_{\beta\beta}=\varepsilon_2+\gamma\kappa_2+\gamma^3\theta_2; \tag{1.5}$$

$$e_{\alpha\beta}=\omega+\gamma\tau+\gamma^3\lambda,$$

где

$$\varepsilon_1=\varepsilon_1^*;\qquad \kappa_1=\kappa_1^*-\frac{3h^2}{4}\theta_1;$$

$$\varepsilon_2=\varepsilon_2^*;\qquad \kappa_2=\kappa_2^*-\frac{3h^2}{4}\theta_2;$$

$$\omega=\omega^*;\qquad \tau=\tau^*-\frac{3h^2}{4}\lambda.$$

$$\theta_1=\frac{1}{6}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\psi_0\right); \tag{1.6}$$

$$\theta_2=\frac{1}{6}\frac{1}{B}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi_0\right);$$

$$\lambda=\frac{1}{6}\left[\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\psi_0\right)+\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\varphi_0\right)\right].$$

Здесь $\varepsilon_1^*\cdots\tau^*$ — соответственно, деформации удлинения и сдвига, изменения кривизны и кручения обычной нелинейной теории оболочек [7].

Пользуясь обычными способами, для внутренних сил и моментов

* Здесь и в дальнейшем будут приняты известные обозначения [1, 2].

получим:

$$T_1 = c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2; \quad T_2 = c_{22}\varepsilon_2 + c_{12}\varepsilon_1;$$
$$S = c_{66}\omega. \tag{1.7}$$

$$M_1 = -D_{11}\varkappa_1^* - D_{12}\varkappa_2^* + \frac{3h^2}{5}\left(D_{11}\theta_1 + D_{12}\theta_2\right);$$

$$M_2 = -D_{22}\varkappa_2^* - D_{12}\varkappa_1^* + \frac{3h^2}{5}\left(D_{22}\theta_2 + D_{12}\theta_1\right); \tag{1.8}$$

$$H = D_{66}\tau^* - \frac{3h^2}{5}D_{66}\lambda,$$

где $c_{ik} = hB_{ik}$, $D_{ik} = \dfrac{h^3}{12}B_{ik}$ — соответственно жесткости растяжения и изгиба.

Уравнения равновесия, которым должны удовлетворять внутренние силы и моменты, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1) - T_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}(AS) + S\frac{\partial A}{\partial\beta} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(AT_2) - T_1\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\alpha}(BS) + S\frac{\partial B}{\partial\alpha} = 0;$$

$$-(k_1T_1 + k_2T_2) + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}(AH) + \frac{1}{A}H\frac{\partial A}{\partial\beta} - \right. \tag{1.9}$$

$$\left. - \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BM_1) + \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2\right] + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BH) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}H - \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}(AM_2) + \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}M_1\right] +$$

$$+ \varkappa_1^*T_1 + \varkappa_2^*T_2 + \tau^*S + z(\alpha, \beta) = 0.$$

Первым двум уравнениям удовлетворим приближенно, вводя функцию напряжений по формулам [4]:

$$T_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial F}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial F}{\partial\alpha};$$

$$T_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial F}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial F}{\partial\beta}; \tag{1.10}$$

$$S = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial F}{\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial F}{\partial\alpha}\right).$$

Из третьего уравнения (1.9), после подстановки значений моментов и усилий (1.7), (1.8), получим первое разрешающее уравнение смешанного метода:

$$L(M_1^*, M_2^*, H^*, F) + f(\varphi_0, \psi_0) + z(\alpha, \beta) = 0, \tag{1.11}$$

где L — нелинейный дифференциальный оператор относительно w и F, а $f(\varphi_0, \psi_0)$ представляет дополнительный грузовой член, появляющийся в результате принятых предположений.

$$f(\varphi_0, \psi_0) = -\frac{3h^2}{5}\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\left[D_{66}\frac{\partial}{\partial\beta}(A\lambda) + D_{66}\frac{\partial A}{\partial\beta}\lambda + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\alpha}B(D_{11}\theta_1 + D_{12}\theta_2) - \frac{\partial B}{\partial\alpha}(D_{22}\theta_2 + D_{12}\theta_1)\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\left[D_{66}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\lambda) + D_{66}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\lambda + \frac{\partial}{\partial\beta}A(D_{22}\theta_2 + D_{12}\theta_1) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial A}{\partial\beta}(D_{11}\theta_1 + D_{12}\theta_2)\right]\right\}. \tag{1.12}$$

Для получения второго уравнения используем условие неразрывности. Оно, как известно [4], представляется в виде:

$$A^2B^2(k_1\bar{\varkappa}_2 + k_2\bar{\varkappa}_1) - AB\frac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial\alpha\partial\beta} - B\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\alpha} - A\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\beta} +$$

$$+ \left(\frac{B}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial B}{\partial\beta} - B\frac{\partial^2 A}{\partial\alpha\partial\beta} - A\frac{\partial^2 B}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\bar{\omega} +$$

$$+ B^2\frac{\partial^2\bar{\varepsilon}_2}{\partial\alpha^2} + A^2\frac{\partial^2\bar{\varepsilon}_1}{\partial\beta^2} + \left(2B\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{B^2}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial\bar{\varepsilon}_2}{\partial\alpha} +$$

$$+ A\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\bar{\varepsilon}_2}{\partial\beta} + \left(2A\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\right)\frac{\partial\bar{\varepsilon}_1}{\partial\beta} - B\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\bar{\varepsilon}_1}{\partial\alpha} -$$

$$-2\left(B\frac{\partial^2 B}{\partial\alpha^2} - \frac{B}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\bar{\varepsilon}_1 - 2\left(A\frac{\partial^2 A}{\partial\beta^2} - \frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)\bar{\varepsilon}_2 = 0, \tag{1.13}$$

где

$$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 - \frac{1}{2}\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2; \quad \bar{\varkappa}_1 = \varkappa_1^*;$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2; \quad \bar{\varkappa}_2 = \varkappa_2^*;$$

$$\bar{\omega} = \omega - \frac{1}{AB}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}; \qquad \bar{\tau} = \tau^*.$$

Если затем ε_1^*, ε_2^* и ω^* представить через усилия, то будем иметь уравнение относительно двух искомых функций w и F. Окончательные выражения уравнений (1.11) и (1.13), после подстановки в них всех величин через w и F, ввиду их громоздкости, не приводим.

Эти уравнения представляют разрешающую систему дифференциальных уравнений нелинейной теории пологих оболочек в ортогональных координатах, отличающуюся лишь грузовым членом от системы уравнений, полученных на основании гипотезы недеформируемых нормалей. Поэтому решение ее математически не представляет трудностей, если подобная задача решена с учетом гипотезы Кирхгоффа.

Исходные уравнения и формулы, использованные при расчете весьма пологих оболочек, аналогичны уравнениям для случая оболочек с большим показателем изменяемости [6]. И поэтому система уравнений (1.11) и (1.13) может быть применена к расчету более широкого класса оболочек.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

2. Сферическая оболочка. Следуя [4], будем считать, что полярные координаты r и β на плоскости являются координатами точки на срединной поверхности весьма пологой сферичечкой оболочки. Тогда будем иметь $A=1$ и $B=r$.

Полагая в общих уравнениях $k_1=k_2=k=\text{const}$, получим основные соотношения для этого случая.

Параметры деформации:

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial r}+kw+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2;$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{1}{r}u+kw+\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2;$$

$$\omega=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\beta};$$

$$\varkappa_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{h^2}{8}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r};$$

$$\varkappa_2=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{h^2}{8}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\beta}+\varphi_0\right);$$

$$\tau=-2\frac{\partial^2}{\partial r\partial\beta}\left(\frac{w}{r}\right)-\frac{h^2}{8}\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\beta}-\psi_0\right)\right];\tag{2.1}$$

$$\theta_1=\frac{1}{6}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r};\quad \theta_2=\frac{1}{6}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\beta}+\varphi_0\right);$$

$$\lambda=\frac{1}{6}\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\beta}-\psi_0\right)\right].$$

Усилия и моменты:

$$T_1=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r};\quad T_2=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2};\quad S=-\frac{\partial^2}{\partial r\partial\beta}\left(\frac{F}{r}\right);$$

$$M_1 = D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + D_{12}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) +$$

$$+\frac{h^2}{10}\left[D_{11}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} + D_{12}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\beta} + \varphi_0\right)\right];$$

$$M_2 = D_{22}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} +$$

$$+\frac{h^2}{10}\left[D_{22}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\beta} + \varphi_0\right) + D_{12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right]; \tag{2.2}$$

$$H = -2D_{66}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\beta}\left(\frac{w}{r}\right) - \frac{h^2}{10}D_{66}\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\beta} - \psi_0\right)\right],$$

где

$$\varphi_0 = a_{55}\frac{1}{r}\left\{B_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\right) + B_{12}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\beta^2}\right) -\right.$$

$$\left.-B_{22}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\beta^2} + \frac{\partial w_0}{\partial r}\right) + 2B_{66}\frac{\partial^3}{\partial r\partial\beta^2}\left(\frac{w_0}{r}\right)\right\};$$

$$\psi_0 = a_{44}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{B_{22}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\beta^2} + \frac{\partial w_0}{\partial r}\right) +\right.$$

$$\left.+B_{12}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + 2B_{66}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w_0}{r} + \frac{\partial w_0}{\partial r}\right)\right\}. \tag{2.3}$$

Система дифференциальных уравнений принимает вид:

$$k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right] + 4D_{66}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\beta}r\left(\frac{\partial^2}{\partial r\partial\beta}\frac{w}{r}\right) +$$

$$+\frac{2}{r^2}D_{12}\frac{\partial}{\partial r}r\left(\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\beta^2}\right) + \frac{2}{r^3}(D_{12}+D_{22})\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + D_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}\right) +$$

$$+D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - D_{22}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + D_{22}\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) +$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\beta} +$$

$$+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial F}{\partial\beta}\right) = rz(\alpha,\beta) - \frac{h^2}{10}\left\{(2D_{66}+D_{12})\left(\frac{\partial^3\psi_0}{\partial r^2\partial\beta} +\right.\right.$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial r\partial\beta^2} + D_{22}\frac{1}{r^3}\left[\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\beta^2} - r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varphi_0}{r}\right) + \frac{\partial^3\psi_0}{\partial\beta^3} - \frac{\partial^2}{\partial r\partial\beta}(r\psi_0)\right] +$$

$$\left.+D_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(r\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r^2}\right) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right]\right\};$$

$$
-(a_{66}+2a_{12})\frac{\partial^3}{\partial r\partial\beta^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}(a_{66}+2a_{12}+2a_{11})\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}-
$$

$$
-a_{22}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}\right)-a_{22}\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}+a_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)-a_{21}\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4}+
$$

$$
+k\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+k\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}+
$$

$$
+\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial r}\right)^2=0. \tag{2.4}
$$

При $k=0$ будем иметь случай круглой пластинки. Для иллюстрации хода расчета рассмотрим осесимметричный изгиб равномерно распределенной нагрузкой q свободно опертой трансверсально изотропной круглой пластинки радиуса c.

При гипотезе Кирхгоффа приближенное решение этой задачи дано в работе [5]. Используя его можно решить, в первом приближении, ту же задачу без учета гипотезы недеформируемых нормалей.

Определяя функцию напряжений формулами

$$
T_1=h\frac{1}{r}\frac{dF}{dr};\qquad T_2=h\frac{d^2F}{dr^2},
$$

получаем систему дифференциальных уравнений в виде:

$$
\frac{d^3F}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2F}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dF}{dr}=-\frac{E}{2r}\left(\frac{dw}{dr}\right);
$$

$$
D\left(\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right)-\frac{h}{r}\frac{dw}{dr}\frac{dF}{dr}=
$$

$$
=\frac{1}{r}\int rq\,dr-\frac{h^2}{10}D\left(\frac{d^2\varphi_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi_0}{dr}-\frac{1}{r^2}\varphi_0\right),
$$

где

$$
\varphi_0=\frac{B}{G'}\left(\frac{d^3w_0}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w_0}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw_0}{dr}\right);
$$

G' — модуль сдвига, характеризующий искажение углов между направлениями в плоскости (α, β) и направлением γ.

Дополнительный грузовой член в уравнении равновесия в этом частном случае равен нулю и влияние G' сказывается при определении постоянных интегрирования.

Как и в [5], функцию w задаем в виде:

$$
w=af\left(\frac{1}{a}-2\frac{r^2}{c^2}+b\frac{r^4}{c^4}\right),
$$

где постоянные a и b определяются из граничных условий (при $r=c$

$w = M_1 = 0$) и равны

$$a = \frac{3+\mu}{5+\mu}\,\frac{1}{1+\Delta} + \frac{\Delta}{2(1+\Delta)}; \qquad b = \frac{2(1+\mu)}{2(3+\mu)+\Delta(5+\mu)}$$

$$\text{и } \Delta = \frac{h^2}{c^2}\,\frac{B}{G'}\,\frac{1{,}6(1+\mu)}{5+\mu}.$$

Вводя обозначение $\zeta = \frac{f}{h}$ и используя метод Бубнова-Галеркина, получаем характеристическое уравнение в виде:

$$\zeta^2 + A\zeta - B = 0.$$

Окончательные результаты расчетов при $\mu = 0{,}3$ и различных значениях $k = \frac{h^2}{c^2}\,\frac{B}{G'}$ помещены в таблице 1.

Таблица 1

K	A	B
0	3,8191	2,6595
0,1	3,6877	2,6653
0,5	3,2667	2,7276
1	2,7596	2,9385

В первой строке помещены соответствующие значения ζ_0 при гипотезе недеформируемых нормалей.

3. Прямоугольная в плане оболочка положительной гауссовой кривизны. Отнесем пространственный прямоугольник к декартовым координатам x и y. При соответствующем выборе последних можем считать коэффициенты первой квадратичной формы равными единице [4, 6].

Функцию напряжений определим здесь формулами:

$$T_1 = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad T_2 = h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \text{и } S = -h\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{3.1}$$

Направим ось γ к центру кривизны и выпишем расчетные формулы для этого случая:

параметры деформации

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2;$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h^2}{8}\,\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}; \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2}{8}\,\frac{\partial \psi_0}{\partial y};$$

$$\tau = 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{8}\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right); \tag{3.2}$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{6}\,\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}; \quad \theta_2 = -\frac{1}{6}\,\frac{\partial \psi_0}{\partial y};$$

$$\lambda = -\frac{1}{6}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right).$$

Усилия и моменты

$$T_1 = c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2; \quad T_2 = c_{22}\varepsilon_2 + c_{12}\varepsilon_1;$$

$$S = c_{66}\omega;$$

$$M_1 = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{h^2}{10}\left(D_{11}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right);$$

$$M_2 = -D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{h^2}{10}\left(D_{22}\frac{\partial\psi_0}{\partial y} + D_{12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right); \tag{3.3}$$

$$H = 2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{h^2}{10}D_{66}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right),$$

где

$$\varphi_0 = -a_{55}\left[B_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right];$$

$$\psi_0 = -a_{44}\left[B_{22}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right]. \tag{3.4}$$

Из (1.11) и (1.13) получим следующую систему уравнений:

$$h\left[a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (a_{66} + 2a_{12})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2} + a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right] +$$

$$+ k_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 = 0;$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(2D_{66} + D_{12})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \tag{3.5}$$

$$+ h\left[2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} -\right.$$

$$\left. - k_1\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] = q - \frac{h^2}{10}\left[D_{11}\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66})\left(\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x\partial y^2} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^3\psi_0}{\partial x^2\partial y}\right) + D_{22}\frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^3}\right].$$

Проведем расчет для некоторой частной задачи. Будем рассматривать тот же пример, что и в работе [3]. Оболочка с двумя кривизнами

$$k_1 = \frac{8f}{a^2(1+c)}, \quad k_2 = \frac{8f}{a^2 c(1+c)},$$

где c — отношение сторон, f — подъем оболочки, изгибается нормальной равномерно распределенной нагрузкой q_0. Предполагается, что в процессе деформации, кромки оболочки не остаются прямолинейными. Задача решается, в первом приближении, методом аппроксимирующих функций [4].

Как известно [3], связь между прогибом w^* в центре оболочки и давлением

$$q^* = q_0^* - \frac{h^2}{10}\left[D_{11}\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^3} + (D_{12}+2D_{66})\left(\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^2\partial y}\right) + D_{22}\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial y^3}\right], \tag{3.6}$$

дается в виде:

$$L_3\left(\frac{w^*}{h}\right)^3 - L_2\left(\frac{w^*}{h}\right)^2\frac{f}{h} + \left[L_1\left(\frac{f}{h}\right)^2 + L_0\right]\frac{w^*}{h} = \frac{\pi^2}{4c}\,\frac{a^2}{E_2h^4}\int\limits_0^a\int\limits_0^b q^*(x, y)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,dxdy. \tag{3.7}$$

Для коэффициентов L_i в работе [3] приведена таблица.

Для определения q^* необходимо иметь решение задачи при гипотезе недеформируемых нормалей, т. е. решение уравнения:

$$L_3\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 - L_2\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\frac{f}{h} + \left[L_1\left(\frac{f}{h}\right)^2 + L_0\right]\left(\frac{w_0}{h}\right) = q_0^*. \tag{3.8}$$

Для простоты расчетов будем рассматривать квадратную оболочку ($c = 1$) при следующих значениях упругих постоянных:

$$E_1 = 0{,}6\times10^5;\quad E_2 = 1{,}2\times10^5;\quad \mu_1 = 0{,}036;\quad \mu_2 = 0{,}071.$$

Тогда, для коэффициентов зависимостей (3.7) и (3.8), будем иметь:

$$L_0 = 18{,}0781;\quad L_1 = 1{,}7409;\quad L_2 = 7{,}1449 \text{ и } L_3 = 4{,}7988.$$

Подставляя полученные решения в формулы (3.4) и (3.6), получим значения грузового члена q^* при различных относительных размерах оболочки (таблица 2). Соответствующие значения $\frac{w^*}{h}$ приводятся в таблице 3.

Таблица 2

	$G' = 0{,}07\times10^5$			$G' = 0{,}14\times10^5$		
q_0^* \ $\frac{h}{a}$	1/5	1/10	1/15	1/5	1/10	1/15
10	12,2599	10,5649	10,2511	11,1299	10,2824	10,1255
20	31,7637	22,9409	21,3070	25,8818	21,4704	20,6535
30	46,2990	34,0747	31,8110	38,1495	32,0373	30,9055

Таблица 3

h/a / q_0^*	$G' = 0{,}07 \times 10^5$			$G = 0{,}14 \times 10^5$			
	1/5	1/10	1/15	1/5	1/10	1/15	
10	0,5073	0,4091	0,3903	0,4348	0,3951	0,3858	0,3788
20	2,7994	2,3290	2,0960	2,5306	2,1535	2,0638	1,9718
30	3,2200	2,9009	2,8000	3,0300	2,8205	2,7700	2,7320

В последнем столбце приведены решения при гипотезе Кирхгоффа. Сравнивая полученные решения с этими значениями, получим ошибку в процентах (таблица 4).

Таблица 4

h/a / q_0^*	$G' = 0{,}07 \times 10^5$			$G' = 0{,}14 \times 10^5$		
	1/5	1/10	1/15	1/5	1/10	1/15
10	25,3	7,4	3,1	12,8	4,1	1,8
20	29,6	15,3	5,9	22,1	8,4	5,4
30	15,2	5,82	2,4	9,8	3,1	1,4

Как и следовало ожидать, эта погрешность и в нелинейной теории, для некоторых случаев анизотропии, может быть существенной.

Институт математики и
механики АН Армянской ССР

Поступило 14 XI 1957

Ս. Ա. Համբարձումյան, Ջ. Վ. Փեշտմալջյան

ՓՈՔՐ ԿՈՐՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՕՐՏՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում տրվում է փոքր կորություն ունեցող օրտոտրոպ թաղանթների հաշվման ոչ գծային մի տեսություն, որը հիմնված է հետևյալ ընդունելությունների վրա։

1. Թաղանթի միջին մակերևույթին նորմալ գծային էլեմենտները դեֆորմացիայից հետո չեն փոխում իրենց երկարությունը։

2. Դեֆորմացիաները որոշելիս ընդունվում է, որ $\tau_{\alpha\gamma}$ և $\tau_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները չեն տարբերվում դեֆորմացիայի չենթարկվող նորմալների հիպոթեզի կիրառման ժամանակ ստացված, համապատասխան լարումներից։

3. *Միջին մակերևույթի դեֆորմացիաները որոշելիս ինկատի ենք առնում միայն այն ոչ գծային անդամները, որոնք ծագում են թաղանթի նորմալ տեղափոխումից:*

Ելնելով բերված ընդունելություններից և առաձգականության ոչ գծային տեսության ընդհանուր դրույթներից, փոքր կորություն ունեցող թաղանթների համար ստացված են ոչ գծային տեսության, որը հայտնի տեսությունից տարբերվում է միայն բեռը ներկայացնող անդամով:

Ելնելով ընդհանուր տեսությունից, բերված են սֆերիկ և ուղղանկյուն պլանով երկակի կորություն ունեցող թաղանթների հիմնական հավասարումները և հաշվային բանաձևերը:

Լուծված են կոնկրետ օրինակներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* К вопросу нелинейной теории анизотропных пластинок. ДАН Армянской ССР, том XXIV, № 4, 1957.

2. *Амбарцумян С. А.* О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек. Изв. АН Армянской ССР, серия Физ.-мат. наук, X, № 2, 1957.

3. *Бурмистров Е. Ф.* Расчет пологих ортотропных оболочек с учетом конечных деформаций. Инж. сб., т XXII, 1955.

4. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложение в технике. Гостехиздат, 1949.

5. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1956.

6. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.

7. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.

8. *Амбарцумян С. А.* К расчету двухслойных ортотропных оболочек. Изв. АН СССР, ОТН, 7, 1957.