

Г. С. Кочарян

Об одном обобщении рядов Лорана и Фурье

В настоящей заметке приводится решение следующей задачи: для функций, заданных в двухсвязной области, и для функций, заданных только на замкнутой жордановой кривой, построить аппараты приближения, которые являлись бы обобщениями рядов Лорана и Фурье соответственно. Для этой цели мы строим системы многочленов от z , $\phi_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и от $\frac{1}{z}$, $F_n\left(\frac{1}{z}\right)$ ($n = 1, 2, \dots$) и, при определенных ограничениях, устанавливаем теоремы разложения по этой системе для функций, аналитических в двухсвязной области, а также для функций, заданных только на замкнутой жордановой кривой.

Пусть на плоскости z дана двухсвязная область D , ограниченная замкнутыми кривыми L_1 и L_2 (L_2 находится внутри L_1). Для простоты допустим, что нулевая точка находится внутри L_2 . Область, находящуюся внутри кривой L_1 , обозначим через G_1^0 , ее дополнение — через G_1^∞ . Введем аналогичные обозначения G_2^0 и G_2^∞ для кривой L_2 .

Пусть функция $w = \phi(z)$ конформно отображает G_1^∞ на область $|\bar{w}| > \rho$ так, что $\phi(\infty) = \infty$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\phi(z)}{z} = 1$, а $z = \psi(w)$ — обратная функция. Пусть, далее, $w = F(z)$ конформно отображает G_2^0 на область $|\bar{w}| > r$ так, что $F(0) = \infty$, $\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot F(z) = 1$, а $z = \varphi(w)$ — обратная функция. Обозначим через C_{ρ_0} образ окружности $|\bar{w}| = \rho_0 > \rho$ при отображении $w = F(z)$, а через Γ_{r_0} , $r_0 > r$ — образ окружности $|\bar{w}| = r_0$ при отображении $w = F(z)$.

Очевидно, в окрестности бесконечно удаленной точки функция $\phi(z)$ будет иметь разложение вида:

$$\phi(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots,$$

а функция $F(z)$ в окрестности нулевой точки будет иметь разложение вида:

$$F(z) = \frac{1}{z} + \beta_0 + \beta_1 z + \dots$$

Обозначим через $\phi_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) многочлен, представляющий совокупность членов с неотрицательными степенями z в лорановском разложении функции $[\phi(z)]^n$, а через $F_n\left(\frac{1}{z}\right)$ ($n = 1, 2, \dots$) обозначим многочлен, представляющий совокупность членов с отрицательными степенями z в разложении $[F(z)]^n$.

Функции $\phi_n(z)$ являются многочленами Фабера, порожденными областью G_1^0 . Известны следующие интегральные представления для $\phi_n(z)$ (см. [1]):

а) если z — любая точка внутри C_{ρ_0} , то

$$\phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_0}} \frac{[\phi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho_0} \frac{\psi'(w) w^n}{\psi(w) - z} dw \quad \text{и} \quad (1)$$

б) если z — любая точка вне C_{ρ_0} , то

$$\phi_n(z) = [\phi(z)]^n + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_0}} \frac{[\phi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta. \quad (2)$$

Аналогично выводятся следующие интегральные представления:

в) если $z \neq 0$ — любая точка внутри C_{r_0} , то

$$F_n\left(\frac{1}{z}\right) = [F(z)]^n - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_0}} \frac{[F(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{и} \quad (3)$$

г) если z — любая точка вне C_{r_0} , то

$$F_n\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_0}} \frac{[F(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_0} \frac{\varphi'(w) w^n}{\varphi(w) - z} dw. \quad (4)$$

Теорема 1. Всякая функция $f(z)$, аналитическая в двухсвязной области, заключенной между кривыми C_{ρ_0} , $\rho_0 > \rho$ и Γ_r , $r_0 > r$, может быть представлена в этой области в виде суммы ряда:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k F_k\left(\frac{1}{z}\right), \quad (5)$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_1}} \frac{f(z) \phi'_k(z)}{[\phi(z)]^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho_1} \frac{f[\psi(w)]}{w^{k+1}} dw \quad (\rho < \rho_1 < \rho_0)$$

и

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(z) F'_k(z)}{[F(z)]^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{f[\varphi(w)]}{w^{k+1}} dw \quad (r < r_1 < r_0). \quad (6)$$

Доказательство. По теореме Коши внутри двухсвязной области имеем:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}} \frac{f(t)}{t-z} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z} f[\psi(w)] dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_2} \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)-z} f[\varphi(w)] dw. \end{aligned} \quad (7)$$

При фиксированном z внутри кривой C_{r_1} имеется равномерно сходящееся разложение (см. [1]):

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_k(z)}{w^{k+1}} \quad (|w| \geq r_1 > r). \quad (8)$$

По свойствам функции $F(z)$ убеждаемся, что функция $\varphi(w)$ удовлетворяет условиям:

$$\varphi(\infty) = 0, \quad \lim_{w \rightarrow \infty} w\varphi(w) = 1,$$

следовательно, в окрестности бесконечно удаленной точки имеется разложение Лорана

$$\varphi(w) = \frac{1}{w} + \frac{\gamma_1}{w^2} + \dots$$

Откуда

$$\varphi'(w) = -\frac{1}{w^2} - \frac{2\gamma_1}{w^3} - \dots$$

Эти разложения показывают, что функция $\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}$ при фиксированном z вне кривой C_{r_2} аналитична в области $|w| > r$ и имеет в бесконечности нуль второго порядка, поэтому в окрестности бесконечно удаленной точки будем иметь разложение:

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(z)}{w^{k+1}}.$$

Отсюда, учитывая (4), получаем равномерно сходящееся в области $|w| \geq r_1 > r$ разложение:

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)-z} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k\left(\frac{1}{z}\right)}{w^{k+1}}. \quad (9)$$

Подставляя в (7) выражения (8) и (9), приходим к (5).

В случае кругового кольца многочлен $\phi_k(z)$ обращается в z^k , а $F_k\left(\frac{1}{z}\right)$ в $\frac{1}{z^k}$, следовательно, в этом случае ряд (5) обращается в ряд Лорана.

Мы получили разложение в ряд функций в двухсвязной области при условии, что функция аналитична в более широкой области. Применяя метод С. Я. Альпера [2], можно получить теоремы разложения при более слабых условиях, налагаемых на функцию, но зато накладываются дополнительные условия на область.

Следуя С. Я. Альперу, будем говорить, что односвязная область G или ее граница Γ удовлетворяют условию j , если Γ представляет собой замкнутую гладкую кривую Жордана, у которой угол $\vartheta(s)$ наклона касательной к вещественной оси, как функция длины дуги s , на Γ имеет модуль непрерывности $j(h)$, удовлетворяющий условию:

$$\int_0^{\epsilon} \frac{j(h)}{h} |\lg h| dh < \infty.$$

Далее, будем говорить, что двухсвязная область D удовлетворяет условию j , если области G_1^0 и G_2^0 одновременно удовлетворяют условию j .

Теперь докажем лемму, подобную лемме 3. С. Я. Альпера.

Лемма. Пусть область D удовлетворяет условию j и функция $f(z)$, аналитическая в D , непрерывна в $\bar{D}$. Пусть функции $\theta_1(w)$, аналитическая в $|w| < \rho$, $\theta_2(w)$, аналитическая в $|w| > \rho$, определены интегралом типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \frac{f(\tau)}{\tau-w} d\tau,$$

а функции $\chi_1(w)$, аналитическая в $|w| < r$, $\chi_2(w)$, аналитическая в $|w| > r$, определены интегралом типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(t)}{t-w} dt.$$

Тогда функции $\theta_1(w)$ и $\theta_2(w)$ непрерывны, соответственно, в областях $|w| \leq \rho$ и $|w| \geq \rho$, а $\chi_1(w)$ и $\chi_2(w)$ непрерывны, соответственно, в областях $|w| \leq r$, $|w| \geq r$, и справедливы неравенства:

$$\omega_1(\delta) < A_1 \omega(\delta); \quad \omega_2(\delta) < A_2 \omega(\delta),$$

$$\Omega_1(\delta) < A_3 \omega(\delta); \quad \Omega_2(\delta) < A_4 \omega(\delta),$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(z)$ в $\bar{D}$, $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$ — модули непрерывностей функций $\theta_1(w)$ и $\theta_2(w)$ на $|w| = \rho$, а $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ — модули непрерывностей функций $\chi_1(w)$ и $\chi_2(w)$ на $|w| = r$.

Доказательство. По теореме Коши, при $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (10)$$

а если z находится внутри L_2 и вне L_1 , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0. \quad (11)$$

Положим

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad I_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

$I_1(z)$ определяет две функции $I_1^{(i)}(z)$ и $I_1^{(e)}(z)$, аналитические, соответственно, внутри L_1 и вне L_1 , а $I_2(z)$ определяет функции $I_2^{(i)}(z)$ и $I_2^{(e)}(z)$, аналитические, соответственно, внутри и вне L_2 .

Пусть $\zeta^* \in L_1$. В равенстве (11) функция $I_2^{(e)}(\zeta^*)$ будет иметь определенное значение, следовательно, существуют угловые граничные значения для $I_1(z)$ и, по основной лемме И. И. Привалова [3],

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta^*} d\zeta = \frac{1}{2} f(\zeta^*) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - \zeta^*} d\xi. \quad (12)$$

Аналогично, при $\xi^* \in L_2$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - \xi^*} d\xi = -\frac{1}{2} f(\xi^*) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \xi^*} d\zeta. \quad (13)$$

После замены переменной в (12) и (13), полагая $\tau^* = \phi(\zeta^*)$ и $t^* = F(\xi^*)$, получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \frac{f[\psi(\tau)]}{\psi(\tau) - \psi(\tau^*)} \psi'(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - \psi(\tau^*)} d\xi + \frac{1}{2} f[\psi(\tau^*)], \quad (12')$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{f[\varphi(t)]}{\varphi(t) - \varphi(t^*)} \varphi'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \varphi(t^*)} d\zeta - \frac{1}{2} f[\varphi(t^*)]. \quad (13')$$

Опять по лемме И. И. Привалова для предельных значений $\theta_2(\tau^*)$ имеем:

$$\theta_2(\tau^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \frac{f[\psi(\tau)]}{\tau - \tau^*} d\tau - \frac{1}{2} f[\psi(\tau^*)],$$

что вместе с (12') дает:

$$\theta_2(\tau^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \left[\frac{1}{\tau - \tau^*} - \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(\tau^*)} \right] [f[\psi(\tau)] - f[\psi(\tau^*)]] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - \psi(\tau^*)} d\xi. \quad (14)$$

Если $|\tau_1^*| = |\tau^*| = \rho$, то имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - \psi(\tau^*)} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - \psi(\tau_1^*)} d\xi \right| = \\ & = \left| \frac{\psi(\tau^*) - \psi(\tau_1^*)}{2\pi} \cdot \int_{L_1} \frac{f(\xi)}{[\xi - \psi(\tau^*)][\xi - \psi(\tau_1^*)]} d\xi \right| < A_2 |\tau^* - \tau_1^*|, \end{aligned}$$

ибо функция $\psi(w)$ имеет ограниченную производную на $|w| = \rho$. Используя дальнейший ход доказательства леммы 3. С. Я. Альпера, приходим к доказательству сформулированной нами леммы.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ — аналитическая в двухсвязной области D , непрерывная в $\bar{D}$ функция, удовлетворяющая в $\bar{D}$ условию Липшица с показателем $\alpha > 0$. Если область D удовлетворяет условию j , то средние арифметические частных сумм ряда по полиномам Фабера дают оценку для всех $z \in \bar{D}$ и $n \geq 1$:

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} \phi_k(z) - \sum_{k=1}^n b_k \rho_k^{(n)} F_k\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{A_2}{n^\alpha}. \quad (15)$$

где $\rho_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}$, a_k и b_k определяются как в (6).

Доказательство. Условия теоремы позволяют в формулах (1)–(4) и (6) в качестве контуров интегрирования взять, соответственно, кривые L_1 , L_2 , $|w| = \rho$, $|w| = r$. Далее, по лемме И. И. Привалова, в обозначениях леммы на окружности $|z| = \rho$ будем иметь: $f[\psi(\tau)] = \theta_1(\tau) - \theta_2(\tau)$, а на $|t| = r$, $f[\varphi(t)] = \chi_1(t) - \chi_2(t)$. Отсюда, введя обозначения $\theta_1[\phi(\zeta)] = \lambda(\zeta)$, $\theta_2[\phi(\zeta)] = \mu(\zeta)$, $\chi_1[F(\xi)] = \lambda^*(\xi)$, $\chi_2[F(\xi)] = \mu^*(\xi)$, где $\zeta \in L_1$, $\xi \in L_2$, будем иметь:

$$f(\zeta) = \lambda(\zeta) - \mu(\zeta); \quad f(\xi) = \lambda^*(\xi) - \mu^*(\xi). \quad (16)$$

По условиям теоремы, в силу доказанной леммы, убеждаемся, что функции $\theta_1(\tau)$ на $|z| = \rho$ и $\chi_1(t)$ на $|t| = r$ удовлетворяют условию Липшица с показателем α . Отметим, что функция $\lambda(z)$ определена только на L_1 , а $\mu(z)$ аналитична в области G_1^+ . Аналогично, функция $\lambda^*(z)$ определена только на L_2 , а $\mu^*(z)$ аналитична в области G_2^+ .

По теореме С. Н. Бернштейна (см. [4]) имеем:

$$\left| \theta_1(w) - \sum_{k=0}^n \rho_k^{(n)} a_k w^k \right| < \frac{A_2}{n^\alpha} \quad \text{при } |w| \leq \rho, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f[\psi(\tau)]}{\tau^{k+1}} d\tau, \quad (17)$$

и

$$\left| \chi_1(w) - \sum_{k=0}^n \rho_k^{(n)} b_k w^k \right| < \frac{A_s}{n^s} \quad \text{при } |w| \leq r, \quad b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(\varphi(t))}{t^{k+1}} dt. \quad (18)$$

Для z , лежащих вне L_1 , из (2) имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} \phi_k(z) &= \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} [\phi(z)]^k + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} [\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (16), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} \phi_k(z) &= \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} [\phi(z)]^k + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} [\phi(\zeta)]^k - \lambda(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \mu(z). \end{aligned} \quad (19)$$

Далее, для z , лежащих вне L_2 , из (4) имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k \rho_k^{(n)} F_k\left(\frac{1}{z}\right) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\sum_{k=1}^n b_k \rho_k^{(n)} [F(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\sum_{k=0}^n b_k \rho_k^{(n)} [F(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi, \end{aligned}$$

или, учитывая (16),

$$\sum_{k=1}^n b_k \rho_k^{(n)} F_k\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\lambda^*(\xi) - \sum_{k=0}^n b_k \rho_k^{(n)} [F(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (20)$$

Из (19), (20) и (11) для z вне L_1 получим:

$$\sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} \phi_k(z) + \sum_{k=1}^n b_k \rho_k^{(n)} F_k\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} [\phi(z)]^k - \mu(z) -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\lambda(\zeta) - \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} [\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\lambda^*(\xi) - \sum_{k=0}^n b_k \rho_k^{(n)} [F(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi.$$

Отсюда, при $z \rightarrow \zeta^* \in L_1$,

$$f(\zeta^*) - \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} \phi_k(\zeta^*) - \sum_{k=1}^n b_k \rho_k^{(n)} F_k\left(\frac{1}{\zeta^*}\right) = \lambda(\zeta^*) -$$

$$- \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} [\phi(\zeta^*)]^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=p} \left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(\zeta^*)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\tau - \zeta^*} \right] \left[\theta_1(t) - \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} \tau^k \right] d\tau -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\lambda^*(\xi) - \sum_{k=0}^n b_k \rho_k^{(n)} [F(\xi)]^k}{\xi - \zeta^*} d\xi, \quad \zeta^* = \phi(\zeta^*). \quad (21)$$

Из (21), (17), (18) и леммы 2 С. Я. Альпера на L_1 будем иметь:

$$\left| f(\zeta) - \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} \phi_k(\zeta) - \sum_{k=1}^n b_k \rho_k^{(n)} F_k\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right| < \frac{A_9}{n^2}.$$

Пользуясь формулами (1) и (3), аналогичную оценку можно получить и на L_2 после чего остается применить принцип максимума.

Теорема 3. Если $f(z)$ — аналитическая функция в двухсвязной области D , удовлетворяющей условию i , непрерывна в $\bar{D}$ и удовлетворяет в $\bar{D}$ условию Липшица с показателем $\alpha > 0$, то для всех $z \in \bar{D}$,

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(z) - \sum_{k=1}^n b_k F_k\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{A_{10}}{n^2} \lg n. \quad (22)$$

Доказательство. Достаточно в доказательстве теоремы 2 вместо оценок (17) и (18) взять оценки:

$$\left| \theta_1(\tau) - \sum_{k=0}^n a_k \tau^k \right| < A_{11} \frac{3 + \lg n}{n^2}$$

и

$$\left| \chi_1(t) - \sum_{k=0}^n b_k t^k \right| < A_{12} \frac{3 + \lg n}{n^2},$$

которые, по теореме А. Лебега (см. [4]), верны для функций, удовлетворяющих условию Липшица с показателем $\alpha > 0$.

Следствие. Всякая функция $f(z)$, аналитическая в двухсвязной области D , удовлетворяющей условию j , непрерывная и удовлетворяющая условию Липшица с показателем $\alpha > 0$ в $\bar{D}$, разлагается в замкнутой области в равномерно сходящийся ряд:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k F_k\left(\frac{1}{z}\right).$$

Идеи доказательства теорем 2 и 3 можно применить к разложению функций, заданных на замкнутой линии. Пусть дана замкнутая жорданова кривая Γ , ограничивающая область G^0 , которая удовлетворяет условию j и содержит точку $z=0$ внутри себя. Дополнение к G^0 обозначим через G^{∞} . Сохраняя прежние обозначения, обозначим через $w = \phi(z)$ функцию, конформно отображающую G^{∞} на область $|w| > r$, а через $w = F(z)$ — функцию, отображающую G^0 на $|w| > r$.

Теорема 4. Если непрерывная функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha > 0$ на замкнутой жордановой кривой Γ , удовлетворяющей условию j , то для всех $z \in \Gamma$,

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} \phi_k(z) - \sum_{k=1}^n b_k \rho_k^{(n)} F_k\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{A_{13}}{n^2}.$$

Доказательство. Как и в (19) и (20), для z , лежащих вне Γ , имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} \phi_k(z) &= \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} [\phi(z)]^k + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} [\phi(\xi)]^k - \lambda(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \mu(z), \end{aligned}$$

и

$$\sum_{k=1}^n b_k \rho_k^{(n)} F_k \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda^*(\zeta) - \sum_{k=0}^n b_k \rho_k^{(n)} [F(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Слагая эти равенства, для z вне Γ получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} \phi_k(z) + \sum_{k=1}^n a_k \rho_k^{(n)} F_k \left(\frac{1}{z} \right) &= \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} [\phi(z)]^k - \mu(z) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} [\phi(\zeta)]^k - \lambda^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda^*(\zeta) - \sum_{k=0}^n b_k \rho_k^{(n)} [F(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Далее повторяются рассуждения теоремы 2. Этим же путем получается:

Теорема 5. Если непрерывная функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha > 0$ на замкнутой жордановой линии Γ , удовлетворяющей условию j , то

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(z) - \sum_{k=1}^n b_k F_k \left(\frac{1}{z} \right) \right| < \frac{A_{14}}{n^\alpha} \lg n, \quad z \in \Gamma.$$

Следствие. Всякая непрерывная функция $f(z)$, удовлетворяющая условию Липшица с показателем $\alpha > 0$ на замкнутой жордановой линии Γ , удовлетворяющей условию j , разлагается в равномерно сходящийся ряд:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k \left(\frac{1}{z} \right), \quad z \in \Gamma.$$

В случае, когда кривая Γ совпадает с окружностью $|z| = R$, этот ряд обращается в ряд Фурье, если положить $z = Re^{i\theta}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$).

В заключение пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность академику АН Арм. ССР, профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и за руководство.

Ереванский Государственный
университет

Поступило 21 XI 1957

2. Ս. Քոչարյան

ԼՈՐԱՆԻ ԵՎ ՖՈՒՐՅԵԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՅՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում կառուցվում են $\phi_n(z)$ ($n = 0, 1, \dots$) և $F_n\left(\frac{1}{z}\right)$ ($n = 1, 2, \dots$) բազմանդամների սխեմները և բերվում են ըստ այդ սխեմների վերածման թեորեմներ՝ երկկապ տիրույթում անալիտիկ, կամ միայն ժողովանյալ փակ կորի վրա տրված ֆունկցիաների համար: Ստացված շարքերը ներկայացնում են համապատասխանաբար Լորանի և Ֆուրյեի շարքերի բնական ընդհանրացումները: Ս. Յա. Ալպերի [2] j պայմանին բավարարող տիրույթների համար ստացվում է այսպիսի արդյունք՝

Թեորեմ 2. Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է j պայմանին բավարարող $\bar{D}$ երկկապ տիրույթում, անընդհատ է $\bar{D}$ փակ տիրույթում և այնտեղ բավարարում է Լիպշիցի α ($\alpha > 0$) պայմանին, ապա ըստ Ֆաբերի բազմանդամների շարքի մասնակի գումարների միջին քվարանտիլները բոլոր $z \in D$ -երի և $n \geq 1$ համար ապիս են այսպիսի գնահատական.

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k \phi_k^{(n)}(z) - \sum_{k=1}^n b_k \rho_k^{(n)} F_k\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{C_1}{n^\alpha},$$

որտեղ $\rho_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}$, իսկ a_k և b_k գործակիցները որոշվում են (6) բանաձևերով:

Թեորեմ 3. Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է j պայմանին բավարարող D երկկապ տիրույթում, անընդհատ է $\bar{D}$ փակ տիրույթում և այնտեղ բավարարում է Լիպշիցի α պայմանին, ապա բոլոր $z \in \bar{D}$ -երի համար՝

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(z) - \sum_{k=1}^n b_k F_k\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{C_2}{n^\alpha} \lg n;$$

Հետևության ք. j պայմանին բավարարող D երկկապ տիրույթում անալիտիկ ամեն մի $f(z)$ ֆունկցիա, որն անընդհատ է և բավարարում է Լիպշիցի α պայմանին $\bar{D}$ տիրույթում, վեր է ածվում $\bar{D}$ -ում համապատասխան դուգամետ շարքի.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k F_k\left(\frac{1}{z}\right);$$

Մասնավոր դեպքում, երբ D տիրույթը դառնում է շրջանային օղակ, վերջին շարքն էլ դառնում է Լորանի շարք:

Տեղի ունեն հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 4. Եթե $f(z)$ անընդհատ ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի α պայմանին j պայմանին բավարարող Γ ժորդանյան փակ կորի վրա, ապա բոլոր $z \in \Gamma$ -երի համար՝

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k \rho_k^{(n)} \phi_k(z) - \sum_{k=1}^n b_k \rho_k^{(n)} F_k \left(\frac{1}{z} \right) \right| < \frac{C_2}{n^\alpha};$$

Թեորեմ 5. Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անընդհատ է և բավարարում է Լիպշիցի α պայմանին j պայմանին բավարարող Γ ժորդանյան փակ կորի վրա, ապա

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(z) - \sum_{k=0}^n b_k F_k \left(\frac{1}{z} \right) \right| < \frac{C}{n^\alpha} \lg n, \quad z \in \Gamma$$

որտեղ a_k և b_k գործակիցները որոշվում են (6) բանաձևերով:

Հետևելի է, որ j պայմանի բավարարող Γ ժորդանյան փակ կորի վրա տրված ամեն մի անընդհատ և Լիպշիցի որևէ α ($\alpha > 0$) պայմանին բավարարող ֆունկցիա վեր է ածվում հավասարաչափ զուգամետ շարքի՝

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k \left(\frac{1}{z} \right), \quad z \in \Gamma;$$

երբ Γ կորը դառնում է $|z| = R$ շրջանագիծը, ստացվում է Ֆուրիեի շարք ($z = Re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$):

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, М., 1950.
2. Альпер С. Я. О равномерных приближениях в замкнутой области. Изв. АН СССР, серия мат., т. 19, № 6, 1955.
3. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., 1949.
4. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., 1949.