

М. С. Похсрамян, В. Г. Саноян

Гидродинамический расчет плоского потока с боковым отводом

В практике встречается свободное деление потока без забрала, а часто и без порога. Отделяемый расход зависит, главным образом, от скорости потока в основном русле, от ширины отверстия и от угла наклона струи. Из-за сложности явления, решение практических задач деления потока является, пока, делом экспериментальных исследований.

Первую попытку теоретического решения этого вопроса сделал А. Я. Милович [1], а затем В. А. Шаумян [2]. Рассматриваемый ими случай характерен тем, что основное русло имеет сравнительно большую ширину, чем ширина отверстия бокового отвода. Иными словами, они не учитывали влияние противоположного берега на структуру потока, которое усиливается при уменьшении ширины основного русла.

Решением задачи истечения жидкости из бокового отверстия в ограниченном потоке занимались В. М. Маккавеев [3], И. М. Коновалов [4], В. Н. Талиев [5] и С. Н. Нумеров [6]. При этом определялся коэффициент сжатия и угол наклона боковой струи.

В предлагаемой статье определяется очертание раздельной линии тока, что представляет большой практический интерес при свободном делении потока.

Далее, учитывая влияние противоположного берега на структуру потока, излагается расчет плоского потока с боковым отводом, пренебрегая влиянием дна.

Постановка задачи. Прямоугольный плоский канал, площадью поперечного сечения B имеет сбоку прямоугольное отверстие шириной b . Общий расход Q , со средней скоростью v_1 вблизи отверстия, делится на две части; отделяемый расход q , который вытекает через отверстие, и транзитный расход $Q - q$, который продолжает двигаться по каналу со средней скоростью v_2 . Даны общий расход Q , ширина отверстия бокового отвода b и угол наклона струи φ . Требуется определить q , v_0 , v_2 , x_0 и построить линию раздела OM (фиг. 1).

Точное решение этой задачи возможно получить используя методы теории функций комплексного переменного. Решение проведем для плоского течения при помощи конформного отображения обла-

сти течения на вспомогательную полуплоскость, используя переменные Жуковского-Митчеля.

Принимаем: на линии тока FEC $\psi = -q$,
на линиях токов MOD и OAC $\psi = 0$,
на линии тока FD $\psi = Q - q$.

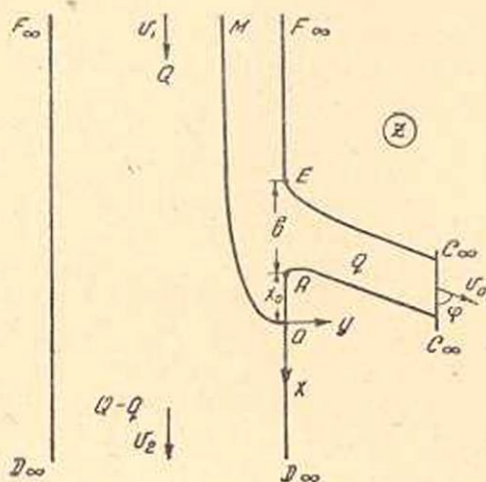
Потенциал скорости φ меняется как на линии FD , так и на линиях MOD , $MOAC$ и FEC от $-\infty$ до $+\infty$. Принимаем также, что в точке O $\varphi = 0$. Тогда, в плоскости комплексного потенциала $z = \varphi + i\psi$, области течения будет соответствовать полоса шириной Q , с горизонтальным вырезом (фиг. 2).

Области течения на плоскости

$$Z = \ln \frac{v_0}{v} =$$

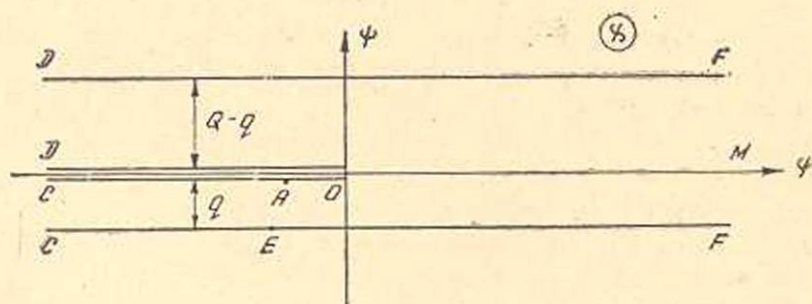
$$= X + iY \left(X = \ln \frac{v_0}{|v|}; Y = \theta \right)$$

соответствует полуполоса, расположенная справа от оси OY , так как $v_0 > |v|$, (v_0 — скорость в сжатом сечении, v — сопряженная скорость в любой точке течения).



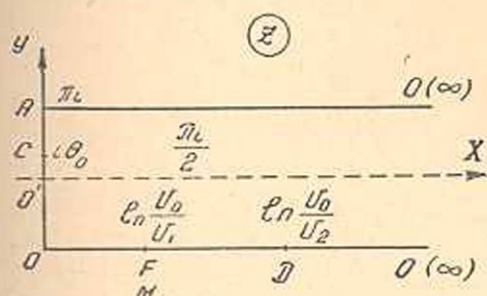
Фиг. 1.

Чтобы получить конформное отображение этой полуполосы на полосу с вырезом на плоскости z , введем еще одну вспомогательную плоскость $w = \xi + i\eta$ и примем, что области течения соответствует на

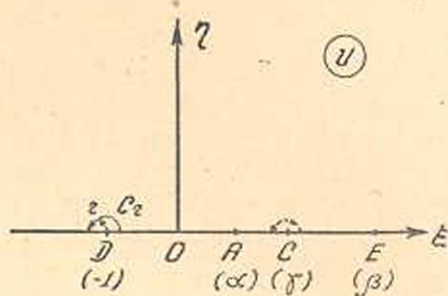


Фиг. 2.

этой плоскости верхняя полуплоскость. Произведем конформное отображение полуплоскости w на область z , для этого заметим, что полоса с горизонтальным вырезом на плоскости z представляет собой четырехугольник, три вершины которого C, D и F находятся в бесконечности. Как известно, такое конформное отображение полностью определяется, если заданы три контурные точки.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Для конформного отображения верхней полуплоскости u на внутренность n -угольника служит формула Шварца-Кристоффеля, имеющая вид:

$$\chi = C_1 \int (u - a_1)^{\frac{\sigma_1}{\pi} - 1} \cdot (u - a_2)^{\frac{\sigma_2}{\pi} - 1} \cdots (u - a_n)^{\frac{\sigma_n}{\pi} - 1} du + C_2, \quad (1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — внутренние углы многоугольника, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — вершины n -угольника на вещественной оси полуплоскости. C_1 и C_2 — вообще комплексные постоянные. В нашем случае в вершинах четырехугольника имеем углы

$$\sigma_C = \sigma_D = \sigma_F = 0; \quad \sigma_O = 2\pi. \quad (2)$$

Соответственно для вершин D, O и F примем в плоскости u точки

$$a_D = -1, \quad a_O = 0, \quad a_F = \infty, \quad a_C = \gamma. \quad (3)$$

Но в случае когда $a_n = \infty$, формула Шварца-Кристоффеля принимает вид:

$$\chi = C_1 \int (u - a_1)^{\frac{\sigma_1}{\pi} - 1} \cdot (u - a_2)^{\frac{\sigma_2}{\pi} - 1} \cdots (u - a_{n-1})^{\frac{\sigma_{n-1}}{\pi} - 1} du + C_2. \quad (1')$$

Применяя ее к нашему случаю и замечая, что $\chi = 0$ при $u = 0$, получим $C_2 = 0$;

$$\begin{aligned} \chi &= C_1 \int (u + 1)^{-1} (u - \gamma)^{-1} u du = C_1 \int_0^u \frac{u du}{(u + 1)(u - \gamma)}; \\ \chi &= C_1 [\ln(u + 1) + \gamma \ln(u - \gamma)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения C_1 и γ воспользуемся следующим соображением: когда u обходит точку $D = -1$ по полуокружности C_r достаточно малого радиуса r (т. е. когда вектор $u + 1 = r e^{i\varphi}$ поворачивается, изменяя свой аргумент от 0 до π), то соответствующая точка χ должна перейти с луча DF на OD и приращение χ должно мало отличаться от $-(Q - q)i$, следовательно

$$^* \Delta\chi = -(Q-q)i + O(r),$$

где $O(r)$ бесконечно малая при $r \rightarrow 0$.

Это соображение оправдывается тем, что образ полуокружности C_r при малых r мало отличается от отрезка прямой соединяющей лучи OD и DF и перпендикулярен им.

С другой стороны, при таком приращении Δu , приращение второго слагаемого из квадратной скобки формулы (5) также будет малым, ибо это слагаемое непрерывно в точке $u = -1$. Приращение первого слагаемого $\ln(u+1) = \ln(r) + \varphi i$ равно πi , следовательно,

$$\Delta\chi = C_1 i\pi + O(r).$$

Приравнявая выражения, полученные для $\Delta\chi$ и переходя к пределу при $r \rightarrow 0$, находим

$$C_1 = -\frac{Q-q}{\pi}. \quad (6)$$

Аналогично, когда u обходит точку $C = \gamma$ по окружности $u = -\gamma = re^{i\varphi}$, (φ — меняется от 0 до π), приращение $\Delta\chi = C_1 \pi i + O(r)$ должно мало отличаться от $-iq$, тогда

$$\gamma = -\frac{q}{\pi C_1} = \frac{q}{Q-q}.$$

Окончательная функция, реализующая конформное отображение полуплоскости $\text{Im} u > 0$ на полосу с вырезом, имеет вид:

$$\chi = -\frac{Q-q}{\pi} \ln(u+1) - \frac{q}{\pi} \left(u - \frac{q}{Q-q} \right). \quad (8)$$

Для отображения полуплоскости $\text{Im} u > 0$ на полосу Z представляющую треугольник одна из вершин которого удалена в бесконечность (фиг. 3), воспользуемся интегралом Шварца-Кристоффеля [1]. В данном случае в вершинах треугольника AOE имеем углы

$$\sigma_A = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_E = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_o = 0, \quad (9)$$

причем вершинам A, O, E соответствуют в плоскости u точки:

$$a_A = \alpha, \quad a_E = \beta, \quad a_o = 0. \quad (10)$$

Переместив начало координат на плоскости Z в точку $O' \left(0, \frac{\pi i}{2} \right)$, по формуле (1') будем иметь:

$$\begin{aligned} Z_1 = Z - \frac{\pi i}{2} &= C_3 \int \frac{du}{u \sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)}} + C_4 = \\ &= \frac{C_3}{i \sqrt{\alpha\beta}} \arcsin \frac{-(\alpha+\beta) + \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha} + C_4. \end{aligned} \quad (11)$$

Для определения произвольных постоянных C_3 и C_4 воспользуемся тем, что в точках A и E при $Z_1 = \frac{\pi i}{2}$ и $Z_1 = -\frac{\pi i}{2}$ соответственно $u = \alpha$ и $u = \beta$.

Подставляя эти значения в (11) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi i}{2} &= \frac{C_3}{i\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{\pi}{2} + C_4, \\ -\frac{\pi i}{2} &= \frac{-C_3}{i\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{\pi}{2} + C_4. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Отсюда

$$C_3 = -\sqrt{\alpha\beta}; \quad C_4 = 0. \quad (13)$$

Подставляя в (11) получим:

$$Z_1 = i \operatorname{arc} \sin \frac{-(\alpha + \beta) + \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha},$$

или

$$Z = i \left(\operatorname{arc} \sin \frac{-(\alpha + \beta) + \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Отсюда, после некоторых преобразований, получим окончательно следующее уравнение:

$$\cos \left(i \ln \frac{v}{v_0} + \theta \right) = \frac{\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha}. \quad (14)$$

Для установления связи между неизвестными величинами v_0 , v_2 , α и β , напомним последнее выражение для точек C , D и F , тогда получим:

$$\alpha + \beta + 2\alpha\beta = (\beta - \alpha) \operatorname{ch} \ln \frac{v_2}{v_0}, \quad (15')$$

$$\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{\gamma} = (\beta - \alpha) \cos \varphi, \quad (15'')$$

$$\alpha + \beta = (\beta - \alpha) \operatorname{ch} \ln \frac{v_1}{v_0}. \quad (15''')$$

Чтобы замкнуть последнюю систему не хватает еще одного условия. Имея в виду зависимости (8) и (14), и помня, что:

$$\bar{v} = \frac{dx}{dz} = \frac{d\chi}{du} \cdot \frac{du}{dz},$$

$$\bar{v} = v_0 e^{-z} = v_0 e^{-i \arccos \frac{\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha}}$$

будем иметь

$$z = \int \frac{1}{v} \frac{dx}{du} du + C = -\frac{1}{v_0} \int e^{i \arccos \frac{\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha}} \left(\frac{Q-q}{\pi} \cdot \frac{1}{1+u} + \frac{q}{\pi} \frac{1}{u-\gamma} \right) du + C. \quad (16)$$

Подинтегральная показательная функция в выражении (16) преобразуется так:

$$\begin{aligned} e^{i \arccos \frac{\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha}} &= \frac{\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha} + i \sin \arccos \frac{\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha} = \\ &= \frac{\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha} \right)^2} = \\ &= \frac{\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha} \pm \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\sqrt{u^2 - (\alpha + \beta)u + \alpha\beta}}{u}. \end{aligned}$$

Согласно последнему преобразованию выражение (16) примет вид:

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{v_0} \left\{ \frac{Q-q}{\pi} \int \left(\frac{\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha} \pm \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\sqrt{u^2 - (\alpha + \beta)u + \alpha\beta}}{u} \right) \times \right. \\ &\times \frac{du}{u+1} + \frac{q}{\pi} \int \left(\frac{\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta - \alpha} \pm \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\sqrt{u^2 - (\alpha + \beta)u + \alpha\beta}}{u} \right) \frac{du}{u-\gamma} + \\ &+ C = -\frac{1}{v_0} \left\{ \frac{Q-q}{\pi} \left[\frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha} \int \frac{du}{u+1} - \frac{2\alpha\beta}{\beta - \alpha} \int \frac{du}{(u+1)u} - \right. \right. \\ &- \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta - \alpha} \int \frac{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)} du}{u(u+1)} \Big] + \frac{q}{\pi} \left[\frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha} \int \frac{du}{u-\gamma} - \right. \\ &- \frac{2\alpha\beta}{\beta - \alpha} \int \frac{du}{u(u-\gamma)} - \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta - \alpha} \int \frac{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)} du}{u(u-\gamma)} \Big] \Big\} + C. \quad (17) \end{aligned}$$

Точка $u = \gamma$ лежащая на вещественной оси, является особой точкой для интегралов входящих в (17). Для этого рассмотрим отдельные области.

Для первой области $0 < u < \gamma$ выражение (17), после интегрирования и некоторых преобразований, примет вид:

$$z = -\frac{Q-q}{\pi v_0} \left[\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \ln(u+1) - \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha} \ln \frac{\gamma-u}{u+1} - \right. \\ \left. - \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} \left[\sqrt{(\alpha+1)(\beta+1)} \ln \frac{t - \sqrt{\frac{1+\beta}{1+\alpha}}}{t + \sqrt{\frac{1+\beta}{1+\alpha}}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \ln \frac{t-1}{t+1} \right] \right] - \frac{q}{\pi v_0} \left[\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \ln(\gamma-u) + \right. \\ \left. - \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} \left[-\frac{i}{\gamma} \sqrt{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)} \ln \frac{t-i\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}}{t+i\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}} + \ln \frac{t-1}{t+1} \right] \right] + C \quad (18)$$

где $t = \sqrt{\frac{\beta-u}{\alpha-u}}$.

Определим C — из условий, что разделяющая линия тока MO проходит через начало координатной системы. Т. е. при $z=0$ должны иметь $u=0$ или $t = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Получим:

$$C = \frac{Q-q}{\pi v_0} \left[-\frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha} \ln \gamma - \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} \left[\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)} \ln \frac{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \ln \frac{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - 1}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + 1} \right] \right] + \frac{q}{\pi v_0} \left[\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} \ln \gamma + \right. \\ \left. + \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} \left[-\frac{i}{\gamma} \sqrt{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)} \ln \frac{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - i\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + i\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln \frac{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - 1}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + 1} \right] \right] \quad (19)$$

Последнее выражение не меняется при переходе от первой области ко второй. Во второй области, когда $\gamma < u \leq \infty$, функция конформного отображения будет:

$$z = -\frac{Q-q}{\pi v_0} \left\{ \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \ln(u+1) - \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha} \ln \frac{u-\gamma}{u+1} - \right. \\ \left. - \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} \left[\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)} \ln \frac{\sqrt{\frac{1+\beta}{1+\alpha}} - t}{\sqrt{\frac{1+\beta}{1+\alpha}} + t} - \right. \right. \\ \left. \left. - \ln \frac{1-t}{1+t} \right] \right\} - \frac{q}{\pi v_0} \left\{ \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \ln(u-\gamma) - \right. \\ \left. - \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} \left[\frac{i}{\gamma} \sqrt{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)} \ln \frac{i \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}} - t}{i \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}} + t} - \ln \frac{1-t}{1+t} \right] \right\} + C, \quad (20)$$

где C определяется по (19). Кроме того определению подлежит и местонахождение нижнего или верхнего ребра отвода. Так, например, при $u = \alpha$, или $t = \infty$ должны иметь $z = -x_0$. Так как $0 < x_0 < \gamma$, согласно условию из (18) получим:

$$x_0 = + \frac{Q-q}{\pi v_0} \left\{ \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \ln(\alpha+1) - \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha} \ln \frac{\gamma-\alpha}{\alpha+1} \right\} + \\ + \frac{q}{\pi v_0} \left\{ \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \ln(\gamma-\alpha) \right\} + C. \quad (21)$$

Имеем также условие: при $u = \beta$, или $t = 0$; $z = -x_0 - b$. Из (20) получим:

$$x_0 + b = \frac{Q-q}{\pi v_0} \left\{ \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \ln(1+\beta) - \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha} \ln \frac{\beta-\alpha}{1+\beta} \right\} + \\ + \frac{q}{\pi v_0} \left\{ \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \ln(\beta-\gamma) \right\} + C. \quad (22)$$

Из условий (21) и (22), считая ширину отверстия бокового отвода заданной, легко можно найти еще одну связь между неизвестными α , β , v_0 , v_2 .

$$b = -\frac{Q-q}{\pi v_0} \left\{ \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \ln \frac{\alpha+1}{\beta+1} - \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha} \ln \frac{(\gamma-\alpha)(\beta+1)}{(\beta-\gamma)(\alpha+1)} \right\} - \\ - \frac{q}{\pi v_0} \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \ln \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Далее, учитывая зависимости (7) (15') и (15'') можно написать последнее выражение в более удобной форме т. е.:

$$\bar{b} = -\frac{\bar{v}_2}{\pi} \left\{ \operatorname{ch} \bar{v}_2 \ln \frac{\alpha+1}{\beta+1} + \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{\bar{v}_2} \cos \varphi \ln \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma} \right\}, \quad (23)$$

где $\bar{b}$ — отношение ширины отверстия к ширине канала.

$\bar{v}_1, \bar{v}_2$ — безразмерные скорости относительно v_0 .

Таким образом, задаваясь общим расходом $Q = v_1 B$, шириной отверстия бокового отвода b и углом отвода φ приводим поставленную нами задачу к решению системы уравнений (15'), (15''), (15''') и (23), где неизвестными являются α, β, v_0, v_2 . Далее с помощью функции (8) можем построить раздельную линию тока на плоскости u (фиг. 4). Конформно отображающие функции (18) и (20) дают нам возможность перевести раздельную линию тока от плоскости u на основную плоскость течения. Таким образом будем иметь положение раздельной линии тока с учетом влияния берега, против которого расположено отверстие.

Покажем на одном примере применение изложенного метода. Предположим общий расход $Q = 0,026 \text{ м}^3/\text{сек}$ $\bar{b} = 0,5$ и угол отвода $\varphi = 45^\circ$. При таких данных система уравнения (15'), (15''), (15''') и (23) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha} + \frac{2\alpha\beta}{\beta - \alpha} &= \operatorname{ch} \ln \bar{v}_2 \\ \frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha} - \frac{2\alpha\beta}{\gamma(\beta - \alpha)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha} = \operatorname{ch} \ln \bar{v}_1$$

$$(\bar{v}_2^2 + 1) \ln \frac{\alpha+1}{\beta+1} + 2(1 - \sqrt{2}\bar{v}_2) \ln \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma} + \pi = 0$$

где, согласно (7),

$$\gamma = \frac{Q - (Q - q)}{Q - q} = \frac{v_1 - v_2}{v_2} = \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{\bar{v}_2}.$$

Решение системы (24) дает следующие значения для неизвестных:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= 0,810 \\ \bar{v}_2 &= 0,604 \\ \alpha &= 0,05 \\ \beta &= 4,83 \end{aligned} \quad (25)$$

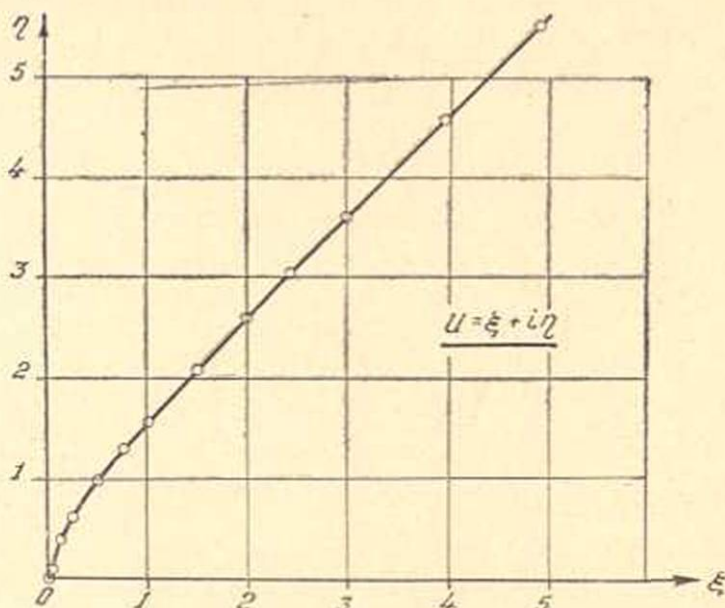
При этом получается $\gamma = 0,34$. Таким образом функция раздельной линии тока на плоскости $u = \xi + i\eta$ по формуле (8) определяется уравнением:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi+1} + \gamma \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi-\gamma} = 0 \quad (26)$$

(при всех значениях $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \alpha, \beta$). Для нашего случая ($\gamma = 0,34$) функцию (26) можно заменить приближенно следующей функцией.

$$\eta = \sqrt{\frac{3\xi(1+\xi)^2}{3\xi+2}}. \quad (27)$$

Значение η при разных значениях $\xi > 0$ приводится в таблице 1. График раздельной линии тока на плоскости u приведен на фиг. 5. Точки соответствующие раздельной линии тока с помощью конформно-отображающей функции (18) переводим на первоначальную плоскость. Отделив вещественные и мнимые части $z = x + iy$, получим x и y как функции от ξ и η . После ряда преобразований и обозначений получается:



Фиг. 5.

$$\begin{aligned} \frac{\pi v_0}{Q-q} x = & -\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \ln \sqrt{\delta} + \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha} \ln \frac{\sqrt{l^2+m^2}}{\gamma\delta} - \\ & - \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} (1+\gamma) \ln \left[\frac{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}+1}}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}-1}} \cdot \frac{[\alpha+\beta-2(\xi+X_0)] \sqrt{1+\frac{\eta^2}{X_0^2}}}{\beta-\alpha} \right] + \\ & + \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} \sqrt{(\alpha+1)(\beta+1)} \ln \sqrt{X_1^2+Y_1^2} - \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \gamma \ln \frac{\sqrt{(\gamma-\xi)^2+\eta^2}}{\gamma} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} \sqrt{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)} \operatorname{arctg} \frac{Y_1}{X_1}, \\
 & \frac{\pi v_0}{Q-q} y = - \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{1+\xi} + \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha} \operatorname{arctg} \left(- \frac{m}{l} \right) - \\
 & - \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} (1+\gamma) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{X_0} + \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} \sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)} \operatorname{arctg} \frac{Y_2}{X_2} - \\
 & - \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \gamma \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi-\gamma} + \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} \sqrt{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)} \ln \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}
 \end{aligned} \quad (28)$$

Эти формулы являются общими для всех значений α, β, v_0, v_2 .
Здесь введен ряд новых обозначений:

$$\delta = (\xi + 1)^2 + \eta^2$$

$$l = (\xi + 1)(\gamma - \xi) - \eta^2$$

$$m = (1 + \gamma)\eta$$

$$n_1 = 0,5 [\alpha\beta - (\alpha + \beta)\xi + \xi^2 - \eta^2]$$

$$n_2 = \eta [\xi - 0,5(\alpha + \beta)]$$

$$X_0 = \sqrt{n_1 + \sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad Y_0 = \frac{n_2}{X_0}$$

$$k_1 = \left[\beta + \frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha} \alpha - \xi \left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha} + 1 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 k_2 = & \left[\beta + \left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha} + 1 \right) \xi - \frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha} \alpha + 2 \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}} Y_0 \right] \cdot \left[1 - \frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \right] - \\
 & - 2 \left[\left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha} + 1 \right) \eta - 2 X_0 \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}} \right] \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}
 \end{aligned}$$

$$k_3 = \eta \left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha} + 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 k_4 = & 2 \left[\beta + \left(\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} + 1 \right) \xi - \frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha} \alpha + 2 \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}} Y_0 \right] + \\
 & + \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \left[\left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha} + 1 \right) \eta - 2 X_0 \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}} \right] \times \\
 & \times \left[1 - \frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \right]
 \end{aligned}$$

$$k_5 = (k_1^2 + k_3^2) \left(1 + \frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

$$X_1 = \frac{k_1 k_2 - k_3 k_4}{k_5}; \quad Y_1 = \frac{k_1 k_4 + k_2 k_3}{k_5}$$

$$\omega_1 = 2\alpha\beta + \alpha + \beta - (2 + \alpha + \beta)\xi - 2X_0\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}$$

$$\omega_2 = (2 + \alpha + \beta)\eta - 2\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}$$

$$X_2 = \frac{\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}\right)[(1+\xi)\omega_1 - \eta\omega_2]}{\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}\right) \cdot \delta \cdot (\beta - \alpha)};$$

$$Y_2 = \frac{\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}\right)[- \omega_1\eta - \omega_2(1+\xi)]}{\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}\right) \cdot \delta \cdot (\beta - \alpha)}$$

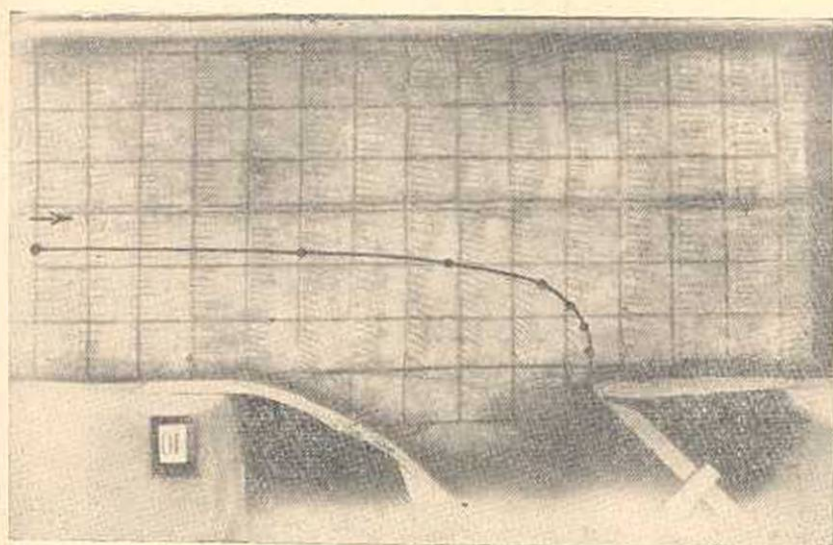
Для нашего примера решение системы (24) дает следующие значения для неизвестных: $\alpha = 0,05$, $\beta = 4,83$, $\bar{v}_1 = 0,81$, $\bar{v}_2 = 0,601$. При таких данных будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{x}{B} = & 0,194 \left\{ -1,02 \ln \sqrt{\delta} + 0,101 \ln \frac{\sqrt{l^2 + m^2}}{0,34\delta} - \right. \\ & \left. - 0,296 \ln 0,512 (2,44 - \xi - X_0) \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{X_0^2}} + \right. \\ & \left. + 0,512 \ln \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} - 0,347 \ln \frac{\sqrt{(0,34 - \xi)^2 + \eta^2}}{0,34} - 0,236 \operatorname{arctg} \frac{Y_1}{X_1} \right\} \\ \frac{y}{B} = & 0,194 \left\{ -1,02 \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi + 1} + 0,101 \operatorname{arctg} \left(-\frac{m}{l} \right) - 0,296 \operatorname{arctg} \frac{\eta}{X_0} + \right. \\ & \left. + 0,512 \operatorname{arctg} \frac{Y_2}{X_2} - 0,347 \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi - \gamma} + 0,236 \ln \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \right\} \end{aligned}$$

Где δ , l , m , X_0 , Y_0 , X_1 , Y_1 , X_2 , Y_2 определяются по вышеприведенным обозначениям, подставляя в них числовые значения α и β . В таблице 1 одновременно приведены x и y при различных ξ и η . Последние формулы характеризуют раздельную линию тока для нашего случая.

На фиг. 6 приведена раздельная линия тока, полученная по изложенному методу и по эксперименту. По формуле (21) нами рассчитано значение x_0 , которое равно $\frac{x_0}{B} = 0,0015$. Как видно из фиг. 6 начало координатной системы расположено на верхнем ребре отвода, так как оно было относительно мало для нашего частного случая.

Приравнивая правую часть уравнения (26) постоянной величине получим семейство линий токов на плоскости u . После чего с помощью отображающей функции (28) перейдем на основную плоскость, получая уже все линии тока в области течения.



Фиг. 6.

Кроме того, по полученным формулам легко определяется отдельный расход q , который равен $v_1 \cdot y_0$, где v_1 — средняя скорость в основном русле, y_0 — расстояние раздельной линии от берега, но выше отверстия, где его действие еще не обнаруживалось. При этом из (28) получается

$$y_0 = \lim_{\substack{\xi \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow \infty}} y = - \frac{Q - q}{\pi v_0} \frac{(\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta})(1 + \gamma)}{\beta - \alpha} \operatorname{arctg} 1 \quad (29)$$

Переходим к сопоставлению $\frac{v_1}{v_0}$, $\frac{v_2}{v_0}$ и q , полученных теоретическим и экспериментальным путем. Как было сказано выше, общий расход в основном русле при эксперименте был 0,026 м³/сек, ширина русла 0,66 м., глубина наполнения потока в основном русле 0,105 м при таких данных средняя скорость потока в основном русле будет $v_1 = 0,375$ м/сек. При эксперименте нами был измерен транзитный расход $Q - q = 0,0157$ м³/сек, следовательно $v_2 = 0,265$ м/сек. Таким образом отношение $\frac{v_2}{v_1}$ при эксперименте было 0,708, а по расчету 0,745, как видно расхождение не превышает 6%.

Чтобы получить среднюю скорость в сжатом сечении при эксперименте пользуемся диаграммой для коэффициента сжатия при раз-

Таблица 1

$\frac{x}{B}$	ξ	η	$\frac{x}{B}$	$\frac{y}{B}$
1	0	0	0	0
2	0,05	0,075	-0,007	-0,029
3	0,10	0,398	-0,014	-0,083
4	0,25	0,653	-0,046	-0,125
5	0,50	0,983	-0,108	-0,162
6	0,75	1,295	-0,171	-0,179
7	1,00	1,5	-0,230	-0,180
8	1,50	2,03	-0,303	-0,206
9	2,00	2,4	-0,373	-0,217
10	2,4	3,01	-0,423	-0,221
11	3,00	3,56	-0,465	-0,227
12	4,00	4,63	-0,51	-0,234
13	5,00	5,62	-0,600	-0,238
14	100	101	-1,37	-0,250
15	∞	∞	$-\infty$	0,252

ных отношениях скоростей $\frac{v_2}{v_1}$ и при различных $\frac{b}{B}$, приведенных в работе [6]. Для нашего случая получается $\varepsilon = 0,38$, последний при умножении на ширину отверстия даст величину сжатого сечения. При этом средняя скорость в сжатом сечении в условиях эксперимента будет: $v_0 = 0,435$.

Расхождение между экспериментальной $\frac{v_1}{v_0} = 0,862$ и ее теоретическим значением (0,81) составляет около 6,5%. С другой стороны расхождение между измеренным расходом (0,0107 м³/сек) и расчетным (0,0114) не превышает 7%. Полученное расхождение считаем допустимым при практическом применении.

З а к л ю ч е н и е

Решена задача по определению скоростей (v_2 , v_0) (следовательно и расходов) в отводном и транзитном каналах при заданных значениях расхода в основном канале (Q), отношения ширины отводного и основного каналов $\left(\frac{b}{B}\right)$ и угла наклона отводного канала к основному (φ).

Решение задачи приводит к системе (24) четырех уравнений с четырьмя неизвестными (α , β , v_0 , v_2).

Получено уравнение раздельной линии тока в параметрическом виде (26), (28).

Сравнение теоретических результатов с экспериментом для одного конкретного случая дало практически удовлетворительное совпадение (расхождение между теоретически-рассчитанных и измеренных скоростей и расходов не превышает 7%).

Водно-энергетический институт

АН Армянской ССР

Поступило 5 VI, 1955

Մ. Ս. Փոխարարյան, Վ. Գ. Սահյան

ԿՈՂՄԱՅԻՆ ԱՆՅՔՈՎ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ՀԻԳՐՈԴԻՆԱՄԻԿ ՀԱՇՎԱՐԿՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հիգրոտեխնիկական կառուցվածքների, ոռոգման սխեմի և ջրամատակարարման նպատակների համար խողովակների նախագծման ժամանակ հաճախ անհրաժեշտ է լինում հաշվել արտահոսող հեղուկի արագությունը և հլքը կողմնային անցքով, ինչպես նաև հեղուկը երկու մասի բաժանող սահմանային հոսքի գիծը մագիստրալ ջրատարում:

Հոգվածում դիտարկվում է ուղղանկյուն ջրատար, որի կողմնային ուղղանկյուն անցքով տեղի է ունենում արտահոսում: Տրված են ջրատարի ընդհանուր հլքը, անցքի լայնությունը և անցքով անցնող շիթի կազմած անկյունը հոսանքի ուղղության հետ: Պահանջվում է գտնել անցքով անցնող հեղուկի արագությունը և այն արագությունը, որը կատարվի ջրատարում՝ անցքից ներքև, ընդունելով, որ ջրատարի սկզբում արագությունը տրված է, և կառուցել հոսքի գծերը անցքի շրջակայքում, մասնավորապես սահմանային հոսքի գիծը, որով հեղուկը բաժանվում է երկու մասի:

Մեղրը լուծվում է կոմպլեքս փոփոխականների ֆունկցիաների տեսության օգնությամբ՝ արտապատկերելով հոսանքի տիրույթը օժանդակ կիսահարթության վրա: Ստացված է հոսքի գծերի և մասնավորապես սահմանային հոսքի գծի (26) հավասարումը օժանդակ հարթության վրա: Այնուհետև արտաքինում են կոնֆորմ արտապատկերող (28) ֆունկցիաները հիմնական հարթության անցնելու համար, իսկ արագությունների (հետևապես և հլքերի) որոշումը րեկվում է (15'), (15''), (15''') և (23) հավասարումների համատեղ լուծմամբ:

Ստացված է սահմանային հոսքի գծի և պատի հատման կետը, որի հետադարձությունը անցքի վերևի կամ ներքևի ծայրերից որոշվում է (21) կամ (22) արտահայտություններով: Ստացված է նաև սահմանային հոսքի գծի ամփոց ունեցած հետադարձության համար ընդհանուր (29) արտահայտությունը: Վերջինը վերաբերվում է անցքից վերև ընկած կտրվածքներին, որտեղ անցքի աղեկցությունը մագիստրալ ջրատարի հոսանքի վրա բոլորովին բացակայում է:

Որպես օրինակ կատարվում է մի մասնավոր դեպքի հաշվարկում: Այդ նույն դեպքի համար Հայկական ՍՍՌ-ի ԳԱ Ջրա-էներգետիկ ինստիտուտի հիգրոտեխնիկական լաբորատորիայում կառուցված մոդելի վրա Մ. Ս. Փոխարարյանի կողմից կատարված են էքսպերիմենտալ ուսումնասիրություններ: Չափված են արագությունները ու հլքերը տարբեր հատվածներում և նկարա-

հանված են հոսքի գծերը համահարկ ջրատարի, ինչպես ազատ մակերևույթի, ու հատակի, այնպես էլ միջանկյալ մի քանի խորությունների վրա: Նկ. 6-ում բերված է փորձից ստացված հոսքի գծերի և տեսականորեն հաշվարկված սահմանային հոսքի գծի համեմատությունը: Արագությունների որոշումը տվյալ դեպքի համար բերվում է (24) հավասարումների սխեմի լուծմանը, որը տալիս է (25) արժեքները:

Հաշվարկված արագությունները և $u_{\text{կ}}^*$ -ը համեմատված են փորձից ստացված արժեքների հետ: Համեմատությունը տվել է միանգամայն բավարար արդյունքներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Милович А. Я. Теория деления и соединения потока. М.—Л., 1947.
2. Шаумян В. А. Научные основы орошения и оросительных сооружений. М., 1948. Сельхозгиз.
3. Маккавеев В. М. О теоретическом определении коэффициента местных гидравлических сопротивлений. Труды ЛИИВТ-а, вып. 1, 1931.
4. Конозалов И. М. Определение коэффициента и линии сжатия при истечении жидкости из бокового отверстия в канале. Труды ЛИИВТ-а, XV, 1949.
5. Талиев Б. Н. Попутное течение жидкости из канала постоянного сечения. ДАН СССР, 94, № 4 (1954).
6. Нумеров С. Н. и Першин С. Б. Теоретическое определение угла наклона и коэффициента сжатия боковой струи. «Известия ВНИИГ», т. 50, 1953.
7. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. М.—Л., 1951.