

М. М. Джрбашян

Теоремы единственности для преобразований Фурье и для бесконечно дифференцируемых функций

1^я. *Введение.* Пусть $f(t)$ и $\Phi(x)$ — функции из класса $L_2(-\infty, +\infty)$ и являются взаимными преобразованиями Фурье в смысле теоремы Планшереля, то есть:

$$\Phi(x) = l.i.m. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t) dt,$$

$$f(t) = l.i.m. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Phi(x) dx.$$

Как впервые было отмечено Винером, „пара функций f и Φ не может быть очень малой в бесконечности“. В работах Харди [1] и Моргана [2] этот принцип Винера был конкретно реализован в терминах порядков убывания функций $f(t)$ и $\Phi(x)$ при больших значениях $|t|$ и $|x|$.

Например, было доказано [2], что если

$$f(t) = O(e^{-|t|^p}), \quad (|t| \rightarrow \infty); \quad \Phi(x) = O(e^{-|x|^q}), \quad (|x| \rightarrow \infty),$$

где $p > 0$, $q > 0$ и $p^{-1} + q^{-1} < 1$, то функции $f(t)$ и $\Phi(x)$ равны нулю почти всюду.

Предельный случай, когда $f(t) \equiv 0$ вне некоторого конечного интервала, был рассмотрен Ингамом [3], доказавшим, что если

$$\Phi(x) = O(e^{-\alpha(|x|)}) \quad (|x| \rightarrow +\infty),$$

где $\alpha(r) > 0$ и $\int_0^{\infty} \alpha(r) r^{-2} dr = +\infty$, то функции $f(t)$ и $\Phi(x)$ равны нулю почти всюду.

В дальнейшем Гиршман [4] доказал теорему такого же рода, рассмотрев случай, когда $f(t)$ при $|t| \rightarrow +\infty$ стремится к нулю очень быстро, а $\Phi(x)$ при $|x| \rightarrow +\infty$ стремится к нулю достаточно медленно. Результат Гиршмана почти полностью содержит теорему Ингама, тогда как результаты Харди или Моргана в какой-либо форме там не содержатся.

Дженкинс [5] пытался установить наиболее общую теорему единственности для пары функций $f(t)$ и $\Phi(x)$, однако, из-за некорректного применения принципа расширения областей для гармонических функций (см. [5], стр. 809), указанное им условие единственности не верно.

В настоящей статье приводится ряд общих теорем о единственности пары преобразований Фурье в бесконечности, содержащих результаты Ингама и Гиршмана. Далее мы приводим достаточные условия для пустоты некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций, рассмотренных ранее при тех или иных ограничениях Гиршманом [4] и К. И. Бабенко [6]. Что касается достаточных условий для непустоты соответствующих классов бесконечно дифференцируемых функций, то при тех или иных ограничениях эти вопросы рассматривались в работах [4], [6].

2°. *Функции, двойственные по Юнгу.* Пусть функция $p(t)$ определена и непрерывно дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$, при этом

$$а) p(0) = p'(0) = 0;$$

$$б) p'(t) \text{ монотонно возрастает на полуоси } [0, +\infty) \text{ и}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p'(t) = +\infty.$$

Заметив что

$$\int_0^t p'(u) du < tp'(t),$$

будем иметь:

$$\left\{ p(t)t^{-1} \right\}' = \left\{ tp'(t) - \int_0^t p'(u) du \right\} t^{-2} > 0.$$

Отсюда следует, что функция $p(t)t^{-1}$ также монотонно возрастает на полуоси $[0, +\infty)$. Но с другой стороны

$$p(t)t^{-1} > t^{-1} \int_{\frac{t}{2}}^t p'(u) du > \frac{1}{2} p' \left(\frac{t}{2} \right)$$

поэтому

$$p(t)t^{-1} \uparrow +\infty, \text{ при } t \uparrow +\infty. \quad (1)$$

Функция $y = p'(t)$ непрерывна и монотонно возрастает на полуоси $[0, +\infty)$, поэтому обратная функция $t = \varphi(y)$ также непрерывна и монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ при $0 \leq y < +\infty$.

Функцию

$$q(x) = \int_0^x \varphi(y) dy \quad (2)$$

назовем двойственной с функцией $p(x)$ по Юнгу. Очевидно, что в свою очередь $q(x)$ удовлетворяет тем же условиям а), б) и функция $p(x)$ двойственна с нею по Юнгу.

Известно, что (7) при любых $\xi > 0, \eta > 0$ справедливо неравенство

$$\xi \cdot \eta \leq p(\xi) + q(\eta). \quad (3)$$

На протяжении данной статьи будем считать, что функции $p(x)$ и $q(x)$ двойственны между собой по Юнгу.

3°. Основная теорема единственности для пары функций $f(t)$ и $\Phi(x)$; некоторые следствия.

Докажем следующую теорему о взаимной связи между порядками убывания функций $f(t)$ и $\Phi(x)$ в бесконечности.

Теорема 1. Пусть $f(t)$ и $\Phi(x)$ — функции из класса $L_2(-\infty, +\infty)$ и являются взаимными преобразованиями Фурье в смысле теоремы Планшереля. Пусть, кроме того

$$f(t)e^{p(|t|)} \in L_1(-\infty, +\infty),$$

тогда, если

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{R} \int_0^{\pi} q(R \sin \theta) \sin \theta d\theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log |\Phi(u)\Phi(-u)|}{u^2} du \right) dx \right\} = -\infty, \quad (4)$$

то $f(t)$ и $\Phi(x)$ оба равны нулю почти всюду.

Доказательство. По условию теоремы $f(t)e^{p(|t|)} \in L_1(-\infty, +\infty)$, поэтому $f(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$ и следовательно функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt \quad (5)$$

непрерывна на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

Но, более того, $\Phi(z)$ — целая функция, удовлетворяющая неравенству

$$|\Phi(x+iy)| \leq C(f)e^{q(|y|)}. \quad (6)$$

Действительно, из (5) имеем

$$|\Phi(x+iy)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|t||y|} |f(t)| dt,$$

но по неравенству Юнга

$$|t| \cdot |y| \leq p(|t|) + q(|y|),$$

откуда имеем:

$$|\Phi(x+iy)| \leq e^{q(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{p(t)} |f(t)| dt,$$

т. е. оценку (6).

Предполагая, что целая функция $\Phi(z) \not\equiv 0$, применим для нее формулу Карлемана в верхней полуплоскости:

$$\sum_{1 < |\lambda_k| < R} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{|\lambda_k|}{R^2} \right) \sin \vartheta_k = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \log |\Phi(Re^{i\vartheta})| \sin \vartheta d\vartheta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_1^R \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log |\Phi(x) \Phi(-x)| dx + O(1), \quad (7)$$

где $|\lambda_k| e^{i\vartheta_k}$ — суть нули функции $\Phi(z)$ в верхней полуплоскости, а член $O(1)$ остается ограниченным при $R \rightarrow +\infty$.

Заметим теперь, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_1^R \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log |\Phi(x) \Phi(-x)| dx = \\ = \frac{1}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log |\Phi(u) \Phi(-u)|}{u^2} du \right) dx \quad (8)$$

а также, что в силу (6)

$$\frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \log |\Phi(Re^{i\vartheta})| \sin \vartheta d\vartheta \leq \\ \leq \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi q(R \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta + O\left(\frac{1}{R}\right). \quad (8'')$$

Из (7), (8) и (8'') следует, что выражение

$$\frac{1}{R} \int_0^\pi q(R \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta + \frac{1}{R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log |\Phi(u) \Phi(-u)|}{u^2} du \right) dx$$

ограничено снизу при $R \rightarrow +\infty$, а это противоречит условию (4) теоремы. Поэтому $\Phi(z) \equiv 0$, т. е. $\Phi(x)$ и, следовательно, $f(t)$ равны нулю почти всюду.

Заметим наконец, что если вместо условия $f(t)e^{p(t)} \in L_1(-\infty, +\infty)$ полагать $f(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$ и $f(t)e^{p(t)} \in L_1(0, +\infty)$, то функция $\Phi(z)$ будет аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, и

оценка (6) останется справедливой при $y \geq 0$. Поэтому, повторяя те же рассуждения опять получим, что при условии (4), $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Следствие 1. Если, при сохранении остальных условий теоремы 1, заменить условие (4) через

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} + \frac{2}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log |\Phi(u) \Phi(-u)|}{u^2} du \right) dx \right\} = -\infty \quad (4')$$

то опять будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Действительно, так как $t = \varphi(y)$ — монотонно возрастающая функция, то функция

$$\frac{q(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(y) dy$$

также монотонно возрастает на полуоси $[0, +\infty)$. Следовательно, справедлива оценка

$$\frac{1}{R} \int_0^\pi q(R \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta < \frac{q(R)}{R} \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{\pi q(R)}{2R}$$

из которой и из (4') вытекает, что условие единственности (4) выполняется.

Следствие 2. Если дополнительно полагать

$$\Phi(x) = O(e^{-\alpha(|x|)}) \text{ при } |x| \rightarrow +\infty, \quad (9')$$

или

$$\Phi(x) = O(e^{-\alpha(x)}) \text{ } x \rightarrow +\infty, \quad (9'')$$

где $\alpha(x)$ — любая непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_1^\infty \frac{\alpha(u)}{u^2} du = +\infty,$$

то соответственно при

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2} du \right) dx \right\} = -\infty, \quad (10')$$

или

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{2}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2} du \right) dx \right\} = -\infty \quad (10'')$$

будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Из (9') следует оценка

$$\int_1^x \frac{\log |\Phi(u) \Phi(-u)|}{u^2} du \leq O(1) - 2 \int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2} du,$$

а из (9'') и ввиду того, что $\Phi(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$, следует оценка

$$\int_1^x \frac{\log |\Phi(u) \Phi(-u)|}{u^2} du \leq O(1) - \int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2} du.$$

Поэтому при (9') или (9'') соответственно будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log |\Phi(u) \Phi(-u)|}{u^2} du \right) dx \leq \\ & \leq -\frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2} du \right) dx + O(1) \end{aligned} \quad (11')$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log |\Phi(u) \Phi(-u)|}{u^2} du \right) dx \leq \\ & \leq -\frac{2}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2} du \right) dx + O(1). \end{aligned} \quad (11'')$$

Из (11') и (10') или (11'') и (10'') следует условие единственности (4').

Следствие 3. (Теорема Ингама [3]). Если $f(t)$ равна нулю вне некоторого конечного интервала, то при условии

$$\int_1^{\infty} \frac{\log |\Phi(x) \Phi(-x)|}{x^2} dx = -\infty, \quad (12)$$

и, следовательно, в случае

$$\Phi(x) = O(e^{-\alpha(|x|)}) \text{ при } |x| \rightarrow +\infty,$$

при условии

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha(x)}{x^2} dx = +\infty, \quad (12')$$

будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Действительно, в данном случае для целой функции $\Phi(z)$ вместо оценки (6) будем иметь

$$|\Phi(x + iy)| \leq C(f)e^{\sigma|y|}, \quad (6')$$

где $\sigma > 0$ — некоторая постоянная. Поэтому полагая, что при условии (12) или (12') $\Phi(z) \neq 0$, и применив формулу Карлемана (7), мы получим противоречие, если будет

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log |\Phi(u)\Phi(-u)|}{u^2} du \right) dx = -\infty \quad (13)$$

или, в случае

$$\Phi(x) = O(e^{-\alpha(|x|)}) \quad (|x| \rightarrow +\infty),$$

если будет

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2} du \right) dx = +\infty. \quad (13')$$

Но легко видеть, что условия (13) и (13') выполняются при выполнении условий (12) и (12') соответственно. Поэтому $\Phi(z) \equiv 0$

и, следовательно, $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Следующее следствие, указанное И. Хачатряном, сформулируем в виде теоремы. Она в частном случае представляет собой, в известном смысле, аналог теоремы Гиршмана [4].

Теорема 2. Пусть функция $y = p(t)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$p'(t) \geq ap(t) \text{ при } t \geq t_0, \quad (14)$$

где $a > 0$ не зависит от t , и положим, что функция $t = Q(y)$ обратна к $y = p(t)$.

Пусть

$$f(t)e^{p(t)} \in L_1(-\infty, +\infty) \quad (15)$$

или

$$f(t) \in L_1(-\infty, +\infty); f(t)e^{p(t)} \in L_1(0, +\infty) \quad (15')$$

при этом

$$H(r) = \frac{2}{\pi} \int_1^r \frac{\alpha(u)}{u^2} du \rightarrow +\infty \text{ при } r \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

Если

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ Q\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{2}{R^2} \int_1^R x H(x) dx \right\} = -\infty, \quad (17)$$

а в частном случае, когда

$$0 \leq \alpha(x) \leq Mx \quad (x \geq 1), \quad (18)$$

если

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{H[ap(r)]}{r} > 1, \quad (17')$$

будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Доказательство. Из (14) следует, что

$$\varphi(y) \leq Q\left(\frac{y}{a}\right) \quad \text{при} \quad y \geq y_0$$

откуда имеем

$$\frac{q(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(y) dy \leq O(1) + Q\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (19)$$

Из следствия 2 и из оценки (19) вытекает, что при условии (17) будем иметь единственность $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Таким образом, нам остается установить, что из условий (18) и (17') следует условие (17).

Действительно, из тождества

$$\frac{2}{R^2} \int_1^R x H(x) dx = H(R) - \frac{2}{\pi R^2} \int_1^R \alpha(x) dx$$

вытекает, что при условии (18)

$$\frac{2}{R^2} \int_1^R x H(x) dx = H(R) + O(1).$$

Поэтому при (18) условие единственности (17) запишется в виде

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ Q\left(\frac{R}{a}\right) - H(R) \right\} = -\infty. \quad (20)$$

Но из (17') вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность возрастающих чисел $r_n = r_n(\varepsilon)$ ($n = 1, 2, \dots$) таких, что

$$H[ap(r_n)] > (1 + \varepsilon) r_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Обозначая $R_n = ap(r_n)$, получим

$$H(R_n) > (1 + \varepsilon) Q\left(\frac{R_n}{a}\right) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

откуда следует условие (17).

Следствие 4. (Теорема Моргана [2]). Пусть.

$$f(t) = O(e^{-A|t|^p}) \quad (|t| \rightarrow +\infty),$$

$$\Phi(x) = O(e^{-A'|x|^{p'}}) \quad (|x| \rightarrow +\infty),$$

где $A, A'; p, p'$ — положительные постоянные, тогда при $p^{-1} + p'^{-1} < 1$ будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

В данном случае $\alpha(x) = A'x^{p'}$

$$\frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2} du \right) dx = \frac{4A'R^{p'-1}}{\pi(p'-1)(p'+1)} + O(1), \quad (R \rightarrow +\infty). \quad (21)$$

Далее, т. к. при любом $0 < \varepsilon < A$, $f(t)e^{(A-\varepsilon)|t|^p} \in L_1(-\infty, +\infty)$, то можно полагать $p(t) = (A - \varepsilon)t^p$, откуда получим

$$\frac{q(R)}{R} = \frac{p-1}{p[p(A-\varepsilon)]^{\frac{1}{p-1}}} R^{\frac{1}{p-1}}. \quad (22)$$

Но $p' - 1 > \frac{1}{p-1}$, поэтому из (21) и (22) вытекает, что выполняется условие (10') следствия 2 при произвольных значениях постоянных A, A' .

Отметим, что при $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, когда $p > 2$, в работе Моргана [2] содержится следующее условие единственности

$$A' > (p-1) \sin \frac{\pi}{2(p-1)} p^{-\frac{p}{p-1}} A^{-\frac{1}{p-1}}.$$

4°. Выше, на функцию $f(t)$ налагалось условие:

$f(t)e^{p(t)} \in L_1(-\infty, +\infty)$ или же условия $f(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$ и $f(t)e^{p(t)} \in L_1(0, +\infty)$, и были установлены признаки единственности для пары функций $f(t)$ и $\Phi(x)$.

В настоящем пункте несколько изменим вид ограничений, налагаемых на функцию $f(t)$; докажем теорему.

Теорема 3. Пусть $f(t)$ удовлетворяет одному из условий

$$f(t) = O(e^{-p(t)}) \quad (|t| \rightarrow +\infty), \quad (24)$$

или

$$f(t) \in L_1(-\infty, +\infty); f(t) = O(e^{-p(t)})(t \rightarrow +\infty), \quad (24')$$

где $p(t)$ — дважды дифференцируемая на $[1, +\infty)$ функция, обладающая свойством

$$p''(x) \geq \frac{C}{x}, \quad x \geq 1 \quad (25)$$

где $C > 1$ — постоянная.

Если

$$\Phi(x) = O(e^{-a(|x|)}) (|x| \rightarrow +\infty), \quad (26)$$

то при условии

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{a(t)}{t^2} dt \right) dx \right\} = -\infty \quad (27)$$

почти всюду имеем $f(t) = \Phi(x) = 0$.

Доказательство. Из (25) следуют оценки

$$p'(x) \geq p'(1) + C \log x \quad (x \geq 1),$$

$$p(x) \geq p(1) + (x-1)p'(1) + C(x(\log x - 1) + 1) \quad (x \geq 1),$$

откуда заключаем, что для данного $\alpha \left(\frac{1}{2} < \alpha < \frac{C}{2} \right)$ существует $x_1 > 1$, такое, что функция

$$p_1(x) = p(x) - \alpha \log(1+x^2) \quad (x \geq x_1)$$

удовлетворяет условиям

$$p_1(x) > 0, \quad p'_1(x) > 0, \quad p''_1(x) > 0 \quad (x \geq x_1).$$

Тогда, очевидно, будем иметь

$$0 < p_1(x) < p(x), \quad 0 < p'_1(x) < p'(x) \quad (x \geq x_1).$$

Определим функцию $p_1(x)$ на отрезке $[0, x_1]$ так, чтобы она была непрерывно дифференцируема на всей оси $[0, +\infty)$ и удовлетворяла условиям а) и б) пункта 2°. Обозначим через $q_1(x)$ функцию, двойственную с $p_1(x)$ по Юнгу, которая, очевидно, существует.

Из условий (24) или (24') соответственно получим

$$f(t)e^{p_1(|t|)} = O(|t|^{-2\alpha}) \quad (|t| \rightarrow \infty),$$

или

$$f(t)e^{p_1(t)} = O(t^{-2\alpha}) \quad (t \rightarrow +\infty)$$

и заметив, что $2\alpha > 1$, соответственно будем иметь

$$f(t)e^{p_1(|t|)} \in L_1(-\infty, +\infty)$$

или

$$f(t) \in L_1(-\infty, +\infty), \quad f(t)e^{p_1(t)} \in L_1(0, +\infty).$$

В обоих случаях по следствию 2 теоремы 1, при условии

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf \left\{ \frac{q_1(R)}{R} - \frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{a(t)}{t^2} dt \right) dx \right\} = -\infty \quad (28)$$

будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Таким образом, если мы покажем, что

$$\frac{q_1(R)}{R} \leq \frac{q(R)}{R} + O(1) \text{ при } R \rightarrow +\infty \quad (29)$$

то из (27) и (29) будет следовать (28), т. е. доказательство теоремы.

Из (25) имеем:

$$p'(x+1) - p'(x) > C \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) > \frac{C}{1+x} \quad (x > 1), \quad (30)$$

а из определения функции $p_1(x)$ имеем:

$$p'_1(x+1) = p'(x+1) - \frac{2\alpha(x+1)}{1+(x+1)^2} \quad (x > x_1). \quad (30')$$

Из (30) и (30') в силу того, что $2\alpha < C$, имеем

$$p'_1(x+1) > p'(x) \text{ при } x > x_1. \quad (31)$$

Пусть $x = \varphi_1(y)$ — функция, обратная к $y = p'_1(x)$. Так как $x = \varphi(y)$ — обратная к $y = p'(x)$ функция, то из (31) следует

$$\varphi_1(y) \leq 1 + \varphi(y),$$

откуда получим

$$\frac{q_1(R)}{R} = \frac{1}{R} \int_0^R \varphi_1(y) dy \leq O(1) + \frac{q(R)}{R}$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие 1. Если при остальных условиях теоремы 3 заменить условие (27) через

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \varphi(R) - \frac{2}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(t)}{t^2} dt \right) dx \right\} = -\infty, \quad (27')$$

то будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

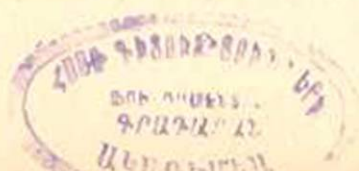
Действительно, так как

$$\frac{q(R)}{R} = \frac{1}{R} \int_0^R \varphi(y) dy \leq \varphi(R)$$

то из (27') следует (27).

Следует отметить, что условие единственности (27') было указано раньше Н. Левинсоном [8], но при значительно более жестком ограничении

$$p''(x) > C > 0.$$



Наконец отметим, что условие (25) можно заменить любым условием вида

$$\rho''(x) \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \dots + \frac{1}{x \log x \dots \log_k x} + \frac{C}{x \log x \dots \log_{k+1} x}, \quad x \geq x_0, \quad C > 1 \quad (25)$$

5°. Единственность бесконечно-дифференцируемых функций.

Приведем теперь теоремы о пустоте некоторых классов бесконечно-дифференцируемых функций.

Семейство бесконечно-дифференцируемых на всей оси $(-\infty, +\infty)$ функций, удовлетворяющих условиям

$$|f^{(n)}(t)| \leq m_n \omega_f(t) \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (32)$$

где $\{m_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел, а функция $\omega_f(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$, вообще говоря, зависит от $f(t)$, обозначим через $LC_{\{m_n\}}$. Введем функцию

$$T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n}$$

тогда справедлива теорема:

Теорема 4. Если функции класса $LC_{\{m_n\}}$ удовлетворяют условию

$$f(t) e^{p(t)} \in L_1(-\infty, +\infty), \quad (32')$$

то при

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log T(u)}{u^2} du \right) dx \right\} = -\infty, \quad (33)$$

класс $LC_{\{m_n\}}$ пуст, т. е. единственная функция класса — тождественный нуль.

Доказательство. Нужно доказать, что, при выполнении условий (32') и (33), любая функция $f(t) \in LC_{\{m_n\}}$ тождественно равна нулю. Действительно, пусть $f(t) \in LC_{\{m_n\}}$, тогда $f(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$, поэтому, как и при доказательстве теоремы 1, отсюда следует, что ее преобразование Фурье

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt \quad (34)$$

не только существует и непрерывно на $(-\infty, +\infty)$, но и является целой функцией с оценкой роста

$$|\Phi(x + iy)| \leq C(f) e^{q(y)}.$$

Но, в силу условия (32) из (34), интегрированием по частям получим:

$$\Phi(x) = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}x^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(t) e^{-ixt} dt$$

$$|\Phi(x)| \leq C_1(f) \frac{m_n}{|x|^n} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

и поэтому

$$|\Phi(x)| \leq C_1(f) T^{-1}(|x|).$$

Это значит, что

$$\Phi(x) = O(e^{-\alpha(|x|)}) \quad (|x| \rightarrow \infty),$$

где

$$\alpha(x) = -\log T(x). \quad (35)$$

Из (32'), (35) и из следствия 2 теоремы 1 вытекает, что при условии (33), $f(t) \equiv 0$.

Отнесем теперь к классу $LC_{\{m_n\}}[p(t)]$ бесконечно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$|f^{(n)}(t)| e^{p(t)} \leq m_n \omega_f(t) \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (36)$$

где $\{m_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел, $\omega_f(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$ зависит от функции $f(t)$. Иначе говоря, в отличие от функций класса $LC_{\{m_n\}}$, здесь функции класса $LC_{\{m_n\}}[p(t)]$ убывают достаточно быстро вместе со всеми своими производными.

Теорема 5. Класс $LC_{\{m_n\}}[p(t)]$ пуст, если

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{4}{\pi R} \log T(R) - \frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log T(u)}{u^2} du \right) dx \right\} = -\infty, \quad (37)$$

в частности, если

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{2}{\pi} \int_1^R \frac{\log T(x)}{x^2} dx \right\} = -\infty. \quad (37')$$

Доказательство. Пусть $f(t) \in LC_{\{m_n\}}[p(t)]$, тогда, очевидно, функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

целая, поэтому, интегрированием по частям, будем иметь

$$\Phi(z) = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi} z^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(t) e^{-izt} dt$$

или, в силу (36),

$$|\Phi(x + iy)| \leq \frac{m_n}{\sqrt{2\pi} |z|^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_f(t) e^{-p(|t|) + |t||y|} dt$$

Но по неравенству Юнга

$$|t||y| \leq p(|t|) + q(|y|),$$

поэтому

$$|\Phi(x + iy)| \leq \frac{m_n}{\sqrt{2\pi} |z|^n} e^{q(|y|)} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_f(t) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

или

$$|\Phi(x + iy)| \leq C_2(f) \frac{e^{q(|y|)}}{T(|z|)}. \quad (38)$$

Предполагая, что $\Phi(z) \neq 0$, применим формулу Карлемана (7) к функции $\Phi(z)$, тогда в силу оценки (38) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \{q(R \sin \vartheta) - \log T(R)\} \sin \vartheta d\vartheta - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_1^R \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log T(x) dx + O(1) \geq 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (39)$$

Но

$$\int_0^\pi q(R \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta < \frac{\pi q(R)}{2}$$

и

$$\int_1^R \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log T(x) dx = \frac{2}{R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log T(u)}{u^2} du \right) dx,$$

поэтому из (39) вытекает также, что

$$\begin{aligned} & \frac{q(R)}{R} - \frac{4}{\pi R} \log T(R) - \\ & - \frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log T(u)}{u^2} du \right) dx + O(1) \geq 0, \end{aligned}$$

что противоречит условию (37) теоремы. Поэтому при условии (37) обязательно будем иметь $\Phi(z) \equiv 0$, т. е. $f(t) \equiv 0$. Таким образом, класс $LC_{\{m_n\}}[p(t)]$ пуст.

Далее, интегрированием по частям, имеем

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{\pi R} \log T(R) - \frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log T(u)}{u^2} du \right) dx = \\ & = -\frac{4}{\pi R} \log T(R) - \frac{2}{\pi} \int_1^R \frac{\log T(u)}{u^2} du + \frac{2}{\pi R^2} \int_1^R \log T(u) du < \\ & < -\frac{2}{\pi} \int_1^R \frac{\log T(u)}{u^2} du, \end{aligned}$$

откуда заключаем, что условие (37) следует из (37'). Поэтому, при условии (37'), класс $LC_{\{m_n\}}[p(t)]$ пуст.

Рассмотрим теперь вопрос о пустоте другого класса бесконечно-дифференцируемых функций, рассмотренного ранее К. И. Бабенко (6).

Пусть $\{m_n\}$ и $\{l_k\}$ — некоторые бесконечные последовательности положительных чисел. Обозначим через $C(l_k, m_n)$ класс функций, бесконечно-дифференцируемых на всей оси $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} |t^{(k)} f^n(t)| & \leq A^k B^n l_k m_n, \quad (-\infty < t < +\infty) \\ (k; n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (40)$$

при некоторых A и B .

В работе К. И. Бабенко [6] были даны достаточные условия как для пустоты, так и для непустоты класса $C(l_k, m_n)$, в предположении, что этот класс состоит из целых функций.

Докажем, наконец, теорему о пустоте класса $C(l_k, m_n)$, не требуя, чтобы функции класса были целыми.

Введем функцию

$$L(x) = \sup_{k \geq 0} \frac{x^k}{l_{k+2}} \quad (x \geq 1), \quad (41)$$

и положим дополнительно, что

$$p(x) = \log L(x)$$

непрерывно дифференцируемая функция на $[1, +\infty)$ удовлетворяющая условию* 6) пункта 2°. Функцию $p(x)$ определим также на $[0, 1]$

* или, просто, выпуклая функция.

так, чтобы она удовлетворяла условиям а) и б) п. 2°, и обозначим через $q(x)$ функцию двойственную с $p(x)$ по Юнгу.

Наконец, обозначим

$$M(x) = \sup_{n \geq 0} \frac{x^n}{m_n} \quad (42)$$

тогда справедлива теорема.

Теорема 6. Класс $C(l_k, m_n)$ пуст, если при любом $a > 0$

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{q(aR)}{R} - \frac{2}{\pi} \int_1^R \frac{\log M(u)}{u^2} du \right\} = -\infty. \quad (43)$$

Доказательство. Если $f(t) \in C(l_k, m_n)$, тогда имеют место неравенства вида (40), откуда следует, что при некоторых $A > 0$ и $B > 0$

$$|f^{(n)}(t)| \leq A^2 \frac{B^n m_n}{L\left(\frac{|t|}{A}\right)} \cdot \frac{1}{|t|^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

иначе говоря, будем иметь

$$f(t) \in C_{\{B^a m_n\}} \left[p\left(\frac{t}{A}\right) \right].$$

Но легко видеть, что функцией двойственной с $p\left(\frac{A}{t}\right)$ по Юнгу будет $q(At)$, отсюда по теореме 5 следует, что класс $C(l_k, m_n)$ пуст, если

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{q(AR)}{R} - \frac{2}{\pi} \int_1^R \frac{\log M\left(\frac{u}{B}\right)}{u^2} du \right\} = -\infty. \quad (43')$$

при всевозможных значениях постоянных A и B . Но легко видеть, что из (43) следует (43'), поэтому теорема доказана.

Ереванский

Поступило 30 X 1957 г.

Государственный Университет

Մ. Մ. Ջրբաշյան

**ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԵՐ ՖՈՒՐՅԵԻ ԶԵԼԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԵՎ ԱՆՎԵՐՋ ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ**

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ենթադրենք, որ $f(t)$ և $\Phi(x)$ ֆունկցիաները հանդիսանում են ֆուրյեի փոխադարձ ձևափոխություններ: Ինչպես առաջին անգամ նշել է Ն. Վիները՝ αf և Φ ֆունկցիաների զույգը չի կարող չափափոքը լինել անվերջության մեջ:

Այս ընդհանուր սկզբունքը, f և Φ ֆունկցիաների զույգի նվազման կարգերի տերմիններով, կոնկրետ իրականացում է զտել մի շարք աշխատություններում [1] — [4], սակայն նվազման կարգերի վրա դրվող այս կամ այն էական սահմանափակումների դեպքում:

Աշխատության մեջ ապացուցված ընդհանուր արդյունքը (թեորեմ 1) f և Φ ֆունկցիաների զույգի միակության մասին, զանազան մասնավոր դեպքերում պարունակում է այս ուղղությամբ մինչև այժմ հայտնի գրեթե բոլոր հիմնական արդյունքները:

Անունակա դիտարկում են անվերջ դիֆերենցիալ ֆունկցիաների որոշ ընդհանուր դասեր, որոնց համար նշվում են միակության բավարար պայմաններ (թեորեմներ 4 և 5):

Մասնավորաբար 5-րդ թեորեմը ներկայացնում է քվադր-անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության մեջ հայտնի Կառլման-Օստրոֆսկո թեորեմի էական ընդհանրացումը:

Այստեղ բերենք 1-ին թեորեմի ձևակերպումը:

Ենթադրենք, որ $p(t)$ ֆունկցիան սահմանված և անընդհատ դիֆերենցիալ է $[0, +\infty)$ կիսաառանցքի վրա, ըստ որում

ա) $p(0) = p'(0) = 0$,

բ) $p'(t)$ մոնոտոն աճող է $[0, +\infty)$ կիսաառանցքի վրա և $\lim_{t \rightarrow +\infty} p'(t) = +\infty$:

Եթե $y = p'(t)$ ֆունկցիայի հակադարձ $t = \varphi(y)$ -ի միջոցով կազմենք

$$q(x) = \int_0^x \varphi(y) dy \quad \text{ֆունկցիան, ապա տեղի ունի}$$

Թեորեմ 1. Ենթադրենք, որ $f(t)$ և $\Phi(x)$ ֆունկցիաները $L_2(-\infty, +\infty)$ դասից են և հանդիսանում են Ֆուրյեի փոխադարձ ձևափոխություններ Պլանշերի բեռնմի իմաստով: Եթե $f(t)e^{p(t)} \in L_1(-\infty, +\infty)$, ապա

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{R} \int_1^R q(R \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta + \frac{1}{R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log |\Phi(u) \Phi(-u)|}{u^2} du \right) dx \right\} = -\infty$$

պայմանի դեպքում, $f(t)\Phi(x) = 0$ համարյա ամենուրեք:

ЛИТЕРАТУРА

1. Hardy G. H., A theorem concerning Fourier transforms, Journal of the London Math. Soc., Vol. 8 (1933), pp. 227—231.
2. Morgan G. W., A note on Fourier transforms, Journal of the London Math. Soc., Vol. 9 (1934), pp. 187—192.
3. Ingham A. E., A note on Fourier transforms, Journal of the London Math. Soc., Vol. 9 (1934), pp. 29—32.

4. *Hirschman J. J., Jr.*, On the behavior of Fourier transforms at infinity and on quasi-analytic classes of functions, *Amer. Journal of Math.*, Vol. 72 (1950), pp. 200—213.
5. *Jenkins J. A.*, Generalization of a theorem of Mandelbrojt, *Amer. Journal of Math.*, Vol. 73 (1951), pp. 807—811.
6. *Бабенко К. И.*, Об одной новой проблеме квазianалитичности и о преобразовании Фурье целых функций, *Труды Московского мат. о-ва*, т. 5, (1956), стр. 523—542.
7. *Харди, Литтльвуд, Полиа*; *Неравенства*; Москва, (1948).
8. *Levinson N.*, Restrictions imposed by certain functions on their Fourier transforms, *Duke Math. Journal*, Vol. 6 (1940), pp. 722—731.