

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Х. Арутюнян, К. С. Чобанян

Изгиб призматических стержней составленных из различных материалов, с учетом ползучести

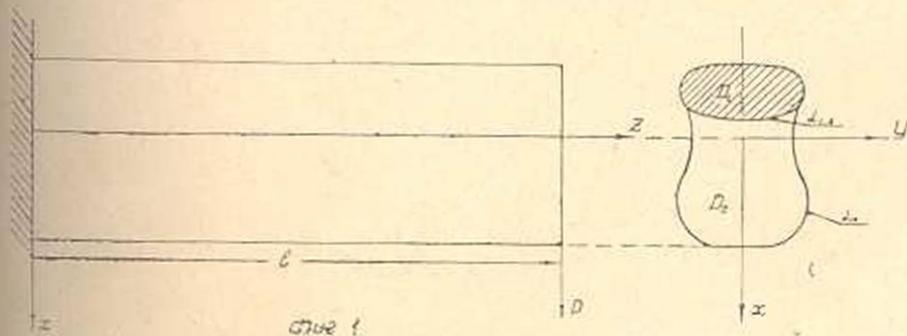
Задача об изгибе упругого составного стержня была исследована в работах [1,2].

В настоящей статье рассматривается задача об изгибе составного стержня поперечной силой с учетом ползучести материалов тел, составляющих стержень. Обобщена формула для циркуляции касательных напряжений изгиба. Получено также контурное условие задачи об изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием в ее приближенной постановке.

В качестве примера рассмотрен изгиб составного стержня прямоугольного сечения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим призматический стержень, состоящий из двух призматических тел, спаянных по боковым поверхностям. Пусть попереч-



Фиг. 1.

ное сечение стержня состоит из двух областей D_1 и D_2 . Обозначим через L_0 контур области D_0 поперечного сечения изгибаемого стержня, а через $L_{1,2}$ — линию раздела областей D_1 и D_2 . Предположим, что поперечное сечение стержня обладает одной осью симметрии.

Пусть один конец стержня заделан, а к другому концу приложена сила P , направленная параллельно одной из приведенных главных осей инерции поперечного сечения стержня.

Начало координат поместим в произвольной точке оси симметрии сечения заделанного конца стержня, направляя ось z параллельно образующей цилиндрической поверхности стержня, а оси x и y — главным приведенным осям инерции его поперечного сечения.

Предположим, что коэффициенты Пуассона материалов составляющих тел одинаковы. Тогда при изгибе стержня, боковая поверхность которого свободна от внешних воздействий, можно положить

$$\tau_{xy} = \tau_x = \sigma_y = 0 \quad (1.1)$$

Компоненты тензоров напряжения и деформации в областях D_i ($i = 1, 2$) обозначим соответственно через $\sigma_z^{(i)}$, $\tau_{xz}^{(i)}$, $\tau_{yz}^{(i)}$, $\varepsilon_z^{(i)}$, $\gamma_{xz}^{(i)}$ и $\gamma_{yz}^{(i)}$.

Связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений в областях D_i , как известно [3], можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^{(i)} &= \frac{1}{E_i} \sigma_z^{(i)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_z^{(i)} \frac{\partial}{\partial \tau} C_i(t, \tau) d\tau; \\ \gamma_{xz}^{(i)} &= \frac{1}{G_i} \tau_{xz}^{(i)} - \int_{\tau_1}^t \tau_{xz}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_i(t, \tau) d\tau; \\ \gamma_{yz}^{(i)} &= \frac{1}{G_i} \tau_{yz}^{(i)} - \int_{\tau_1}^t \tau_{yz}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_i(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $C_i(t, \tau)$ и $\omega_i(t, \tau)$ обозначают меры ползучести материалов в соответствующих областях D_i ($i = 1, 2$) при осевой деформации и чистом сдвиге. Между C_i и ω_i , как известно, имеет место зависимость

$$\omega_i(t, \tau) = 2(1 + \nu) C_i(t, \tau). \quad (1.3)$$

Продольную деформацию ε_z и, следовательно, нормальные напряжения $\sigma_z^{(1)}$ и $\sigma_z^{(2)}$ в соответствующих областях D_1 и D_2 , при поперечном изгибе составного стержня, представим в следующей форме:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_2} [A_0(t)x + B_0(t)](l - z); \quad (1.4)$$

$$\sigma_z^{(i)} = [A_i(t)x + B_i(t)](l - z), \quad i = 1, 2. \quad (1.5)$$

Рассматривая условия равновесия части стержня, заключенной между свободным концом $z = l$ и произвольным сечением $z = \text{const}$, будем иметь

$$\int \int_{D_2} \sigma_z dx dy = 0, \quad \int \int_{D_2} x \sigma_z dx dy = -M. \quad (1.6)$$

Здесь M — изгибающий момент в данном сечении $z = \text{const}$ стержня, равный

$$M = P(l - z). \quad (1.7)$$

Подставляя (1.4) в первое соотношение (1.2), получаем систему четырех интегральных уравнений относительно шести функций $A_i(t)$ и $B_i(t)$, ($i = 0, 1, 2$).

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_i} A_i(t) - \int_{\tau_1}^t A_i(\tau) \frac{\partial \hat{\sigma}_i}{\partial \tau} d\tau &= \frac{1}{E_2} A_0(t); \\ \frac{1}{E_i} B_i(t) - \int_{\tau_1}^t B_i(\tau) \frac{\partial \hat{\sigma}_i}{\partial \tau} d\tau &= \frac{1}{E_2} B_0(t), \end{aligned} \quad (1.8)$$

Остальные два уравнения для определения функций A_i и B_i получаем из условий равновесия (1.5), используя в них (1.4).

$$\begin{aligned} S_{1y} A_1(t) + S_{1y} B_1(t) + S_{2y} A_2(t) + S_{2y} B_2(t) &= 0; \\ I_{1y} A_1(t) + S_{1y} B_1(t) + I_{2y} A_2(t) + S_{2y} B_2(t) &= -M, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $S_i = \iint_{D_i} dx dy$ — площадь области D_i , $S_{iy} = \iint_{D_i} x dx dy$ — статический момент площади D_i относительно оси y , а $I_{iy} = \iint_{D_i} x^2 dx dy$ — момент инерции площади D_i относительно той же оси.

Система уравнений (1.7) и (1.8) достаточна для определения функций A_i и B_i ($i = 0, 1, 2$), через которые определяются осевая деформация ε_z и нормальные напряжения $\sigma_z^{(1)}$ и $\sigma_z^{(2)}$ в областях D_1 и D_2 .

Перейдем теперь к определению касательных напряжений $\tau_{yz}^{(1)}$ и $\tau_{yz}^{(2)}$ ($i = 1, 2$). Обратимся к уравнениям равновесия. Используя в этих уравнениях (1.1) и (1.5), находим

$$\frac{\partial \tau_{xz}^{(i)}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}^{(i)}}{\partial z} = 0; \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(i)}}{\partial y} - A_i(t) x - B_i(t) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (1.11)$$

Соотношения (1.10) показывают, что касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} не зависят от координаты z .

Уравнение (1.11) будет удовлетворено, если напряжения $\tau_{xz}^{(i)}$ и $\tau_{yz}^{(i)}$ представить через некоторую функцию $F(x, y, t)$, не зависящую от координаты z , в следующем виде

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(i)} &= \frac{\partial F_i}{\partial y} + A_i(t) \frac{x^2}{2} + B_i(t) x + \varphi_i(y, t); \\ \tau_{yz}^{(i)} &= -\frac{\partial F_i}{\partial x} + \psi_i(x, t), \end{aligned} \quad (1.12)$$

($i = 1, 2$).

Здесь через F_i обозначена функция напряжения $F(x, y, t)$ в области D_i ($i=1, 2$), а $z_i(x, t)$ и $\psi_i(x, t)$ — произвольные функции.

Условие совместности деформаций для рассматриваемой здесь задачи будет выражаться следующими соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z_i^{(i)}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i^{(i)}}{\partial x} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z_i^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i^{(i)}}{\partial y} \right) = \frac{2\nu}{E_i} A_i(t) - 2\nu \int_{z_i}^t A_i(\tau) \frac{\partial C_i(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.13)$$

$(i=1, 2)$.

На основании (1.2) и (1.12) из (1.13) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_i} \frac{\partial}{\partial x} \Delta F_i - \int_{z_i}^t \frac{\partial}{\partial x} \Delta F_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau - \frac{1}{G_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \int_{z_i}^t \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau = 0; \\ \frac{1}{G_i} \frac{\partial}{\partial y} \Delta F_i - \int_{z_i}^t \frac{\partial}{\partial y} \Delta F_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau + \frac{1}{G_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} - \int_{z_i}^t \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau + \\ + \frac{2\nu}{E_i} A_i(t) - 2\nu \int_{z_i}^t A_i(\tau) \frac{\partial C_i}{\partial \tau} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Принимая во внимание (1.3) и интегрируя соотношения (1.14), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_i} \Delta F_i - \int_{z_i}^t \Delta F_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau + \frac{1}{G_i} \left(\frac{\partial z_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) - \int_{z_i}^t \left(\frac{\partial z_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau + \\ + \frac{\nu y}{G_i(1+\nu)} A_i(t) - \frac{\nu y}{1+\nu} \int_{z_i}^t A_i(\tau) \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau + C_i(t) - G_i \int_{z_i}^t C_i(\tau) \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$(i=1, 2)$

где $C_i(t)$ — произвольные функции интегрирования.

Соотношение (1.15) является однородным интегральным уравнением Вольтерра, которое, кроме нулевого, других решений не имеет. Следовательно, из (1.15) находим

$$\Delta F_i + \frac{\partial z_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\nu}{1+\nu} A_i y + G_i C_i = 0, \quad (i=1, 2). \quad (1.16)$$

Таким образом функция напряжений $F_i(x, y, t)$ в областях D_i ($i=1, 2$) удовлетворяет уравнениям (1.16).

Для выяснения физического смысла функций $C_1(t)$ и $C_2(t)$ обратимся к понятию о среднем вращении бесконечно малого элемента поперечного сечения изгибаемого стержня в плоскости xy .

Обозначая компоненты вектора перемещений в областях D_i соответственно через u_i , v_i и w_i ($i=1,2$) имеем

$$\gamma_{xz}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^{(i)} = \frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial y}. \quad (1.17)$$

Внося значения $\gamma_{xz}^{(i)}$ и $\gamma_{yz}^{(i)}$ из (1.3) в (1.17) и принимая во внимание (1.12), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial x} &= \frac{1}{G_i} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y} + A_i \frac{x^2}{2} + B_i x + \varphi_i \right) - \\ &- \int_{z_1}^z \left[\frac{\partial F_i}{\partial y} + A_i \frac{x^2}{2} + B_i x + \varphi_i \right] \frac{\partial}{\partial z} \omega_i dz - \frac{\partial u_i}{\partial z}; \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial y} &= -\frac{1}{G_i} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} - \psi_i \right) + \int_{z_1}^z \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} - \psi_i \right) \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz - \frac{\partial v_i}{\partial z}, \\ &(i=1,2). \end{aligned}$$

Составляя и приравнявая смешанные производные w_i , на основании (1.18) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_i} \left(\Delta F_i + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) - \int_{z_1}^z \left(\Delta F_i + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Сравнивая (1.19) с (1.15), имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} \Omega_i = \frac{\nu}{(1+\nu)} \left(A_i \frac{1}{G_i} - \int_{z_1}^z A_i \frac{\partial}{\partial z} \omega_i dz \right) y + c_i - G_i \int_{z_1}^z c_i \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz. \quad (1.20)$$

Здесь введено обозначение $\Omega_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \right)$, которое является средним вращением элементов поперечного сечения стержня в плоскости xu . Как показывает соотношение (1.20), изменение Ω_i по длине изгибаемого стержня состоит из двух частей: одна часть, обусловленная произвольной функцией $c_i(t)$ и общая для всех элементов, зависит только от времени и соответствует чистому кручению, а вторая часть, линейно зависящая от координаты y , соответствует искажению поперечного сечения стержня вследствие его изгиба.

Так как на поверхности раздела $L_{1,2}$ имеет место полное сцепление, то на основании (1.7) получим

$$c_1 - G_1 \int_{\tau_1}^{\tau} c_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_1 d\tau = c_2 - G_2 \int_{\tau_1}^{\tau} c_2 \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_2 d\tau = \vartheta(t), \quad (1.21)$$

где ϑ — степень кручения изгибаемого стержня. В случае, когда изгибающая сила проходит через центр изгиба стержня, т. е. изгиб не сопровождается кручением, будем иметь

$$\vartheta = c_1 = c_2 = 0. \quad (1.22)$$

Так как боковая поверхность изгибаемого стержня свободна от внешних сил, должно выполняться условие

$$\tau_{xz}^{(i)} l + \tau_{yz}^{(i)} m = 0 \quad \text{на } L_0. \quad (1.23)$$

где l и m — направляющие косинусы внешней нормали к контуру L_0 .

$$l = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}. \quad (1.24)$$

Здесь x и y — координаты точек контура L_0 , которые зависят только от длины его дуги s , а n — нормаль к L_0 .

Внося значения $\tau_{xz}^{(i)}$ и $\tau_{yz}^{(i)}$ из (1.12) в (1.23) и принимая во внимание (1.24), получаем

$$\frac{\partial F_i}{\partial s} = - \left[A_i \frac{x^2}{2} + B_i x + \varphi_i \right] \frac{dy}{ds} + \psi_i \frac{dx}{ds}. \quad (1.25)$$

Рассматривая равновесие элемента поверхности раздела, находим

$$\tau_{xz}^{(1)} l + \tau_{yz}^{(1)} m = \tau_{xz}^{(2)} l + \tau_{yz}^{(2)} m. \quad (1.26)$$

Здесь l и m — направляющие косинусы нормали к линии раздела $L_{1,2}$, которые через координаты ее точек выражаются формулами (1.24).

Используя (1.12) и (1.24), из (1.26) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial s} - \frac{\partial F_2}{\partial s} = & \left[(A_2 - A_1) \frac{x^2}{2} + (B_2 - B_1) x + \varphi_2 - \varphi_1 \right] \frac{dy}{ds} + \\ & + (\psi_1 - \psi_2) \frac{dx}{ds} \quad \text{на } L_{1,2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

На поверхности раздела имеем полное сцепление, поэтому перемещения u , v и w , следовательно и $\frac{dw}{ds}$, при переходе через линию раздела должны быть непрерывны.

Умножая первое соотношение (1.18) на $\frac{dx}{ds}$, а второе на $\frac{dy}{ds}$ и складывая для $i=1,2$, находим

$$\frac{\partial w_i}{\partial s} = - \frac{1}{G_i} \left[\frac{\partial F_i}{\partial n} - \left(A_i \frac{x^2}{2} + B_i x \right) \frac{dx}{ds} - \varphi_i \frac{dx}{ds} - \psi_i \frac{dy}{ds} \right] +$$

$$+ \int_{\gamma_i}^l \left[\frac{\partial F_i}{\partial n} - \left(A_i \frac{x^2}{2} + B_i x \right) \frac{dx}{ds} - \varphi_i \frac{dx}{ds} - \psi_i \frac{dy}{ds} \right] \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau -$$

$$- \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial v_i}{\partial z} \frac{dy}{ds} \quad (1.28)$$

На основании непрерывности $\frac{\partial \omega_i}{\partial s}$ и двухчленного выражения (1.28), зависящего от производных перемещений, получаем

$$\sum_{i=1,2} (-1)^i \left[\frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial n} - \int_{\gamma_i}^l \frac{\partial F_i}{\partial n} \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau \right] =$$

$$= \sum_{i=1,2} (-1)^i \left[\frac{1}{G_i} \left(\varphi_i \frac{dx}{ds} + \psi_i \frac{dy}{ds} \right) - \int_{\gamma_i}^l \left(\varphi_i \frac{dx}{ds} + \psi_i \frac{dy}{ds} \right) \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau \right] \quad (1.29)$$

Здесь использованы соотношения (1.3) и (1.8).

Таким образом задача об изгибе составного стержня поперечной силой с учетом ползучести свелась к отысканию функции напряжений $F(x, y, t)$, удовлетворяющей уравнениям (1.16) в областях D_1 и D_2 соответственно контурному условию (1.25) и условиям (1.27) и (1.29) на линии раздела $L_{1,2}$.

В случае если изгиб не сопровождается кручением, в уравнениях (1.16) на основании (1.22) можно положить $c_1 = c_2 = 0$.

Произвольные функции $\varphi_i(y, t)$ и $\psi_i(x, t)$ ($i=1,2$) должны быть подобраны так, чтобы задача определения функции $F(x, y, t)$ была разрешимой и не имела особенностей.

2. Обобщение теоремы о циркуляции касательных напряжений при изгибе с учетом ползучести

Если область поперечного сечения D_0 состоит из многосвязных областей D_1 и D_2 , при решении задачи изгиба составного стержня появляются произвольные функции, зависящие только от времени, которые должны быть определены из условия единственности решения рассматриваемой задачи. В задачах кручения и изгиба упругих стержней без учета явления ползучести это условие выражается при помощи теоремы о циркуляции касательных напряжений, являющейся следствием однозначности перемещений. Эта теорема для изгиба составных стержней обобщена в работе [2].

Эту теорему можно обобщить и для изгиба составных балок поперечной силой с учетом явления ползучести.

Вычислим циркуляцию касательных напряжений по замкнутому контуру C , целиком лежащему внутри одной из областей D_i ($i=1,2$).

На основании (1.12) и (1.24) находим:

$$I_C = \int_C z_{,xz}^{(i)} dx + z_{,yz}^{(i)} dy = - \int_C \frac{\partial F_i}{\partial n} ds + \int_C \varphi_i dx + \psi_i dy. \quad (2)$$

Из (1.2), (1.18) и (2.1) получаем

$$I_C = \int_C d\omega_i + \frac{\partial}{\partial z} \int_C \mu_i dx + \nu_i dy. \quad (2)$$

Интеграл от $d\omega_i(x, y, t)$ по любому замкнутому контуру C , лежащему внутри области поперечного сечения D_0 , должен быть равен нулю, так как перемещение w_i является однозначной и непрерывной функцией координат x и y в любой момент времени t .

Используя (1.20) и (1.21) и применяя формулу Грина-Отрогавского, из (2.1) и (2.2) находим

$$\begin{aligned} I_C - G_i \int_C I_C \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz - \frac{2\nu}{1+\nu} \left[A_i - G_i \int_C A_i \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz \right] \iint_S y dx dy = \\ = 2G_i \nu S, \end{aligned} \quad (2)$$

где $S = \iint y dx dy$ — площадь области, ограниченной контуром C .

Соотношение (2.3) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра, которое выражает теорему о циркуляции касательных напряжений изгиба составного стержня с учетом ползучести составляющих данный стержень материалов в случае, когда контур по которому вычисляется циркуляция не пересекается с линией раздела, т. е. целиком лежит в одной из областей D_i ($i = 1, 2$).

Для контуров C , пересекающих линию раздела $L_{1,2}$, соотношение (2.3) обобщается легко. Область, ограниченная контуром C и частью линии раздела $L_{1,2}$, разбивается на две части, для каждой из которых будет справедлива формула (2.3). На основании этих формул и соотношений (1.7) находим

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial n} ds - \int_C \int_C \frac{\partial F_i}{\partial n} \frac{\partial \omega_i}{\partial z} ds dz - \int_C \frac{1}{G_i} (\varphi_i dx + \psi_i dy) + \\ + \int_C \int_C \frac{1}{G_i} (\varphi_i dx + \psi_i dy) \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz + \frac{2\nu}{1+\nu} \iint_S \left[\frac{1}{G_i} A_i - \int_C A_i \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz \right] y dx dy = \\ = -2\nu S. \end{aligned} \quad (2)$$

При решении задач об изгибе стержней многосвязного поперечного сечения с учетом ползучести материалов постоянные интегрирования должны быть определены или формулой (2.3), в случае когда внутренний контур является частью границ только одной из областей D_i , или обобщенной формулой (2.4) в противном случае.

Изгиб стержня с тонким усиливающим покрытием с учетом ползучести.

Рассмотрим задачу об изгибе призматического стержня, который имеет тонкое усиливающее покрытие постоянной толщины. Предположим, что материал покрытия ползучестью не обладает. Для краткости изложения примем еще, что произвольные функции $\varphi_i(y, t)$ и $\psi_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) равны нулю.

Область поперечного сечения, соответствующую основному материалу изгибаемого стержня, обозначим через D_1 , а область, соответствующую покрытию — через D_2 . Тогда для функции F_2 будем иметь следующие условия, вытекающие из (1.25), (1.27), (1.29)

$$\frac{\partial F_2}{\partial s} = - \left[A_2 \frac{x^2}{2} + B_2 x \right] \frac{dy}{ds}; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} - \frac{\partial F_2}{\partial s} = \left[(A_2 - A_1) \frac{x^2}{2} + (B_2 - B_1)x \right] \frac{dy}{ds}; \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{G_1} \frac{\partial F_1}{\partial n} - \int_{\gamma} \frac{\partial F_1}{\partial n} \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{G_2} \frac{\partial F_2}{\partial n}. \quad (3.3)$$

Через δ обозначим постоянную толщину покрытия и введем местную криволинейную координатную систему s и n для области D_2 , где s — длина дуги линии раздела $L_{1,2}$, отсчитываемая от произвольно выбранной на ней точки, а n — длина нормали к $L_{1,2}$, направленной в сторону области D_2 (фиг. 2).

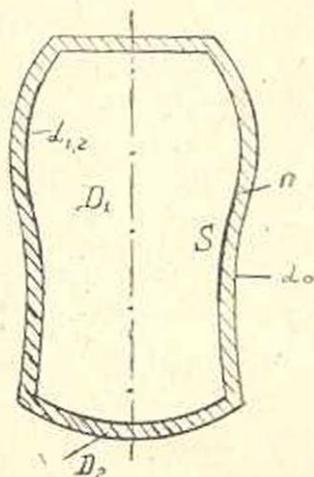
На основании условия о малости толщины покрытия δ по сравнению с размерами поперечного сечения стержня можно положить, что функция напряжений F_2 в области D_2 от координаты n зависит линейно:

$$F_2 = A(s, t)n + B(s, t). \quad (3.4)$$

Используя (3.4), из условий (3.1) — (3.3) получим:

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial A(s, t)}{\partial s} + \frac{\partial B(s, t)}{\partial s} &= \\ &= - \left[A_2 \frac{x^2}{2} + B_2 x \right] \frac{dy}{ds}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} = \frac{\partial B(s, t)}{\partial s} + \left[(A_2 - A_1) \frac{x^2}{2} + (B_2 - B_1)x \right] \frac{dy}{ds}; \quad (3.6)$$



Фиг. 2.

$$\frac{1}{G_2} A(s_1, t) = \frac{1}{G_1} \frac{\partial F_1}{\partial n} - \int_{z_1}^t \frac{\partial F_1}{\partial n} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} dz. \quad (3.7)$$

Интегрируя условие (3.6) по длине линии раздела и используя условия (3.5) и (3.7), после исключения функций $A(s, t)$ и $B(s, t)$, получаем следующее контурное условие для функции $F_1(x, y, t)$:

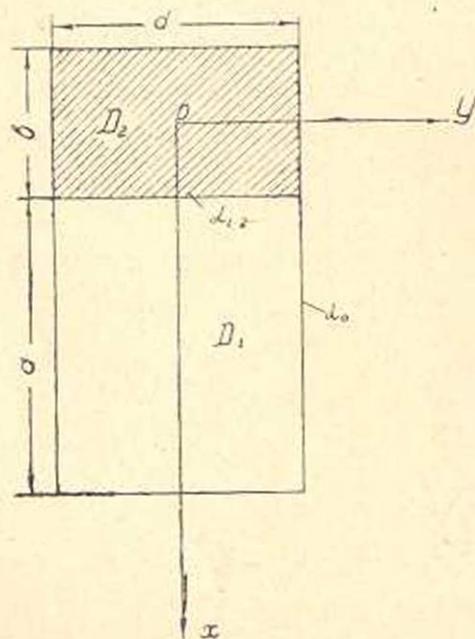
$$G_1 F_1 + G_2 \delta \frac{\partial F_1}{\partial n} - G_1 G_2 \int_{z_1}^t \frac{\partial F_1}{\partial n} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} dz = c(t) - \frac{1}{2} A_1 \int x^2 dy + B_1 \int x dy, \quad (3.8)$$

где $c(t)$ — произвольная функция интегрирования.

Таким образом, при решении задач об изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием, контурное условие (1.26) можно заменить приближенным контурным условием (3.8). Функции $A_1(t)$ и $B_1(t)$ должны быть определены из системы уравнений (1.8) и (1.9), а $c(t)$ — в случае многосвязного поперечного сечения изгибаемого стержня — из условия (2.3). Заметим, что функцию $c(t)$ при решении задачи изгиба можно оставить произвольной, если область поперечного сечения стержня односвязна.

4. Распределение касательных напряжений при изгибе составного прямоугольного стержня.

В качестве приложения результатов, полученных в предыдущих параграфах, рассмотрим следующий пример. Пусть прямоугольный



Фиг. 3.

стержень состоит из двух прямоугольных стержней, спаянных по боковым поверхностям. Область поперечного сечения такого стержня изображена на фиг. 3. Предположим, что в области D_2 материал стержня не обладает ползучестью. Через $c(t, \tau)$ и $\omega(t, \tau)$ обозначим меры ползучести материала в области D_1 соответственно при осевой деформации и сдвиге: Функции A_1, A_2, B_1 и B_2 определяются из системы уравнений (1.8) и (1.9).

Если изгибающая сила направлена по оси ox , изгиб составной консоли не будет сопровождаться кручением и уравнения (1.16) для рассматриваемой задачи примут следующий вид:

$$\Delta F_i + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\nu}{1+\nu} y A_i = 0. \quad (4.1)$$

Для произвольных функций $\varphi_i(y, t)$ и $\psi_i(x, t)$ примем

$$\begin{aligned} \varphi_i(y, t) &= - \left[\frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{2} \right) A_i + (a+b) B_i \right]; \\ \varphi_2(y, t) &= - \frac{b^2}{8} A_2 + \frac{b}{2} B_2(t); \\ \psi_1(x, t) &= \psi_3(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Тогда уравнения (4.1) примут вид

$$\Delta F_i = - \frac{\nu}{1+\nu} A_i y. \quad (4.3)$$

Используя (4.2) в условиях (1.26), (1.28) и (1.30), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0, & \quad \text{при } y = \pm \frac{d}{2}; \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, & \quad \text{при } x = a + \frac{b}{2}; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 0, \quad \text{при } x = -\frac{b}{2};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial y}, \quad \text{при } x = \frac{b}{2}; \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{G_1} \frac{\partial F_1}{\partial x} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} dz = \frac{1}{G_2} \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \text{при } x = \frac{b}{2}. \quad (4.6)$$

Функции $F_1(x, y, t)$ и $F_2(x, y, t)$, удовлетворяющие уравнениям (4.3) в соответствующих областях D_1 и D_2 и условиям (4.4) — (4.6), ищем в виде следующих тригонометрических рядов:

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x, t) \sin \frac{k\pi}{d} \left(y + \frac{d}{2} \right); \quad (4.7)$$

$$F_2 = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(x, t) \sin \frac{k\pi}{d} \left(y + \frac{d}{2} \right).$$

Внося (4.7) в дифференциальное уравнение (4.3), получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 p_k}{\partial x^2} - \left(\frac{k\pi}{d} \right)^2 p_k \right] \sin \frac{k\pi}{d} \left(y + \frac{d}{2} \right) = - \frac{\nu}{1+\nu} A_1 y; \quad (4.8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 q_k}{\partial x^2} - \left(\frac{k\pi}{d} \right)^2 q_k \right] \sin \frac{k\pi}{d} \left(y + \frac{d}{2} \right) = - \frac{\nu}{1+\nu} A_2 y.$$

Разлагая правые части соотношений (4.8) в ряд и приравнявая соответствующие коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получаем следующую систему дифференциальных уравнений для определения функций $p_k(x, t)$ и $q_k(x, t)$ ($k=1, 2, 3, \dots$):

$$\frac{\partial^2 p_k}{\partial x^2} - \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 p_k = \frac{\nu}{1+\nu} [1 + (-1)^k] A_1; \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^2 q_k}{\partial x^2} - \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 q_k = \frac{\nu}{1+\nu} [1 + (-1)^k] A_2.$$

Решение уравнений (4.9) имеет следующий вид:

$$p_k(x, t) = C_k(t) \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(a + \frac{b}{2} - x\right)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{d}} - \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{d^2}{(k\pi)^2} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(a + \frac{b}{2}\right)} \right] A_1(t); \quad (4.10)$$

$$q_k(x, t) = D_k(t) \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(x + \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d}} - \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{d^2}{(k\pi)^2} \left[1 + \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2d}} \right] A_2(t).$$

Здесь использованы условия (4.5).

На основании условий (4.5) и (4.6) относительно искомых функций $C_k(t)$ и $D_k(t)$ получаем уравнения

$$D_k = C_k + \frac{4\nu}{1+\nu} \frac{d^2}{(k\pi)^2} \left\{ A_2 - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(a - \frac{b}{2}\right)} \right] A_1 \right\}; \quad (4.11)$$

$$C_k - \lambda_k G_1 \int_0^t C_k \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} d\tau = \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{d^2}{(k\pi)^2} \lambda_k f_k \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d}; \quad (4.12)$$

где

$$\lambda_k = \frac{1}{1 + \frac{G_1}{G_2} \frac{\operatorname{cth} \frac{k\pi b}{d}}{\operatorname{cth} \frac{k\pi a}{d}}};$$

$$f_k = \left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(a + \frac{b}{2} \right)} + \frac{G_1}{G_2} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(a + \frac{b}{2} \right)} \right] \right\} A_1(t) -$$

$$- \frac{G_1}{G_2} \left[2 \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{d} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{2d} \right] A_2(t) -$$

$$- \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(a + \frac{b}{2} \right)} G_1 \int_0^t A_1(\tau) \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} d\tau.$$

Таким образом рассматриваемая задача свелась к решению интегрального уравнения Вольтерра (4.12).

Численный пример. В качестве примера рассмотрим изгиб железобетонной балки прямоугольного поперечного сечения, армированной с одной стороны, при отношениях размеров $a = 2d = 8b$. Для меры ползучести бетона $\omega(t, \tau)$ при чистом сдвиге принимаем следующую зависимость [3]

$$\omega(t, \tau) = 2(1 + \nu) C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\tau/\tau_1}],$$

$$\left[\varphi(\tau) = \omega_0 + \frac{\omega_1}{\tau} \right].$$

Для параметров, характеризующих механические свойства железа и бетона, возьмем следующие значения: $G_k = 8 \cdot 10^9 \text{ кг/см}^2$; $G_0 = 8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$; $\omega_1 = 12,05 \cdot 10^{-5}$; $\omega_0 = 2,25 \cdot 10^{-5}$; $\gamma = 0,026$; $\tau_1 = 28$ дней.

Функции $A_k(t) B_k(t)$ определяются из системы уравнений (1.8) и (1.9). Далее, определяя из (4.11) и (4.12) $C_k(t) D_k(t)$, на основании соотношений (1.12), (4.7) и (4.10) получаем значения касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} .

В таблице 1 приведены значения τ_{xz} в нескольких точках поперечного сечения изгибаемого стержня для различных моментов времени.

Анализ полученных формул, а также результаты рассматриваемого выше примера позволяют сделать следующие выводы.

В случае составных стержней, если наибольшая ширина b поперечного сечения мала по сравнению с высотой h , то элементарная теория изгиба балок дает очень точные результаты при определении

Таблица 1

Значения $\frac{a^2}{\rho} \tau_{xz}(x, y, t) \cdot 10^2$

t \ x, y	0,0	$\frac{b}{2}, 0$	$\frac{b}{2} + \frac{a}{4}, 0$	$\frac{b}{2} + \frac{a}{2}, 0$	$\frac{b}{2} + \frac{3}{4}a, 0$
28 дней	1,3104	2,3750	2,5012	2,1422	1,3036
45 "	1,4693	2,5657	2,5176	2,0688	1,2258
60 "	1,5078	2,6039	2,5197	2,0502	1,2066
90 "	1,6727	2,6249	2,5107	2,0384	1,1959
180 "	1,6021	2,6218	2,5137	2,0358	1,1944
	1,6031	2,6244	2,5156	2,0371	1,1950

значения касательных напряжений. Заметим, что деформация ползучести материала в этом случае также мало влияет на изменение величин этих напряжений во времени.

Если же ширина балки велика по сравнению с ее высотой $b > h$ то элементарные формулы сопротивления материалов оказываются неудовлетворительными, и величина касательных напряжений, найденная по этим формулам, получается гораздо меньше их истинного значения.

Институт математики
и механики АН Армянской ССР

Поступило 5 VII 1957

Կ. Ս. Հարությունյան, Կ. Ս. Չոբանյան

ՏԱՐԲԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ԶՈՂԵՐԻ ԾՌՈՒՄԸ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա հոդվածում քննարկվում է բաղադրյալ ձողի լայնական ուժով ծաման խնդիրը՝ ձողը կազմող մարմինների նյութերի սողքի հաշվառումով: Ընդհանրացված է ծաման շոշափող լարումների ցիրկուլյացիայի բանաձևը: Ստացված է նաև ուժեղացնող բնրակ ծածկույթով ձողի ծաման խնդրի կարտիճի պայմանը՝ մոտավոր դրվածքով:

Որպես օրինակ գիտարկված է ուղղանկյուն հաստվածքով բաղադրյալ ձողի ծամումը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. К задаче кручения и изгиба упругих брусьев, составленных из различных материалов. Изв. АН СССР, № 7, 1932 г.
2. Чобанян К. С. Об изгибе составного стержня. Доклады АН Арм ССР, т. XXIII, № 3, 1956 г.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952 г.