

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. О. Гулканян

О кручении призматических стержней прямоугольного сечения с несимметричным прямоугольным вырезом

В работе дано точное решение задачи о кручении полого призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением, имеющим несимметрично расположенный прямоугольный вырез. При решении задачи использован метод введения вспомогательных функций [1]. Уравнения задачи в частных производных сведены к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами, которые определяются из решения бесконечных систем линейных уравнений. Получены формулы для вычисления жесткости и напряжений. В качестве примера рассмотрен случай квадратного сечения с несимметричным квадратным вырезом. Вычислены жесткость и напряжения с оценкой погрешности. Для сравнения приведены значения жесткости и напряжений, вычисленные по формуле Бредта [3,4] для тонкостенных трубчатых стержней. Полученные количественные результаты даны в таблицах 1 и 2.

Решение задачи о кручении призматического стержня прямоугольного сечения с симметричным прямоугольным вырезом дано в работе Б. Л. Абрамяна [2].

§ 1. Постановка задачи

Задача о кручении призматических стержней с двухсвязным поперечным сечением сводится к интегрированию уравнения Пуассона

$$\Delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2, \quad (1)$$

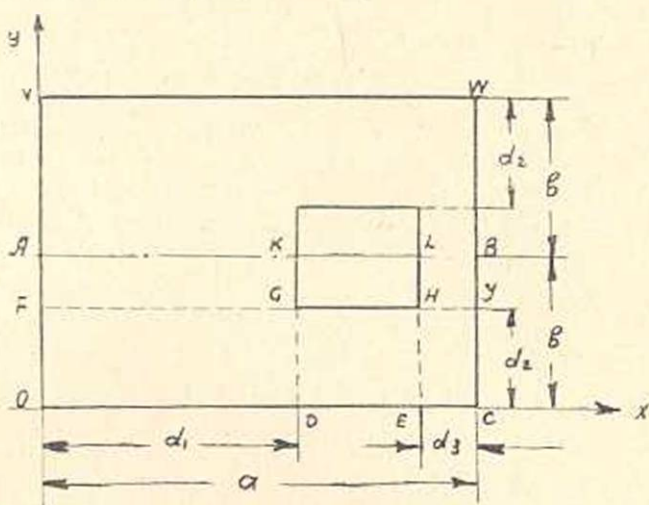
где $U(x, y)$ — функция напряжений, при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= 0 \text{ на внешнем контуре сечения;} \\ U &= U_0 = \text{const на внутреннем контуре сечения.} \end{aligned} \quad (2)$$

В силу симметрии области поперечного сечения решение задачи ищем только на части сечения $ABCOA$ (фиг. 1).

Чтобы распространить решение на всю область сечения, доста-

точно потребовать, чтобы нормальная производная функции напряжений на оси симметрии обращалась в нуль, т. е.



Фиг. 1.

$$\left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \quad (3)$$

Полагаем, что

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{внутри области OAKD} \\ U_2(x, y) & \text{" " OFJC} \\ U_3(x, y) & \text{" " ELBC.} \end{cases} \quad (4)$$

Функции $U_i(x, y)$ ($i=1, 2, 3$) ищем в виде

$$\begin{aligned} U_1(x, y) &= \Psi_1(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области FAKG} \\ \Phi_1(x, y) & \text{" OFGD;} \end{cases} \\ U_2(x, y) &= \Psi_2(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{" DGHE} \\ \Phi_2(x, y) & \text{" OFGD} \\ \Phi_4(x, y) & \text{" EHJC;} \end{cases} \\ U_3(x, y) &= \Psi_3(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{" HLBJ} \\ \Phi_3(x, y) & \text{" EHJC.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Phi_i(x, y)$ — вспомогательные функции, которые внутри области сечения удовлетворяют уравнению Лапласа.

$$\Delta^2 \Phi_i(x, y) = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (6)$$

а функции $\Psi_i(x, y)$ в силу (1) удовлетворяют уравнению

$$\Delta^2 \Psi_i(x, y) = -2 \quad (i=1, 2, 3). \quad (7)$$

В силу (2), (3), (4) и (5) функции $\Phi_i(x, y)$ и $\Psi_i(x, y)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\Psi_1(0, y) = \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right|_{y=b} = \Phi_1(0, y) = \Psi_1(x, 0) + \Phi_1(x, \Gamma) = 0;$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(x, 0) = \Phi_2(x, 0) = \Phi_4(x, 0) = \Phi_2(0, y) + \Psi_2(0, y) = \\ = \Phi_4(a, y) + \Psi_2(a, y) = 0; \quad \Psi_2(x, d_2) = U_0; \quad \Psi_1(d_1, y) = U_0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Psi_3(a, y) = \Phi_3(a, y) = \Phi_3(x, 0) + \Psi_3(x, 0) = \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; \quad \Psi_3(a-d_3, y) = U_0.$$

Для непрерывности и однозначности решения, функции $\Phi_i(x, y)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, d_2) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \Big|_{y=d_2} = 0; \quad \Phi_1(d_1, y) = \Psi_2(d_1, y) - U_0; \\ \Phi_2(d_1, y) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \Big|_{x=d_1} = 0; \quad \Phi_2(x, d_2) = \Psi_1(x, d_2) - U_0; \\ \Phi_4(a-d_3, y) = \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} \Big|_{x=a-d_3} = 0; \quad \Phi_4(x, d_2) = \Psi_3(x, d_2) - U_0; \\ \Phi_3(x, d_2) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \Big|_{y=d_2} = 0; \quad \Phi_3(a-d_3, y) = \Psi_2(a-d_3, y) - U_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные условия для функций $\Phi_i(x, y)$ и $\Psi_i(x, y)$ неоднородны. Следуя идее Гринберга [5], решения для этих функций будем искать в таком же виде, как при однородных граничных условиях, т. е.

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_1}, \quad \text{где } f_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Psi_1(x, y) \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx;$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \quad \text{где } V_k(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Psi_2(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_2} dy;$$

$$\Psi_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(y) \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3},$$

$$\text{где } W_k(y) = \frac{2}{d_3} \int_{a-d_1}^a \Psi_3(x, y) \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3} dx;$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_1}, \quad \text{где } \varphi_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_1(x, y) \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx;$$

(10)

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \quad \text{где } U_k(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_2(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_2} dy;$$

$$\Phi_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(y) \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3}.$$

$$\text{где } G_k(y) = \frac{2}{d_3} \int_{a-d_3}^a \Phi_3(x, y) \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3} dx;$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \text{ где } H_k(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_4(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_2} dy.$$

§ 2. Решение уравнений задачи

Умножая первое из уравнений (6) на $\frac{2}{d_1} \sin \frac{k\pi x}{d_1}$ и интегрируя от 0 до d_1 , второе из уравнений (6) на $\frac{2}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2}$ и интегрируя от 0 до d_2 , третье на $\frac{2}{d_3} \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3}$ и интегрируя от $a-d_3$ до a , а четвертое на $\frac{2}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2}$ и интегрируя от 0 до d_2 , на основании (10), (8) и (9), для определения $\varphi_k(y)$, $U_k(x)$, $G_k(y)$, и $H_k(x)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \varphi_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 \varphi_k(y) &= \frac{2k\pi(-1)^k}{d_1^2} \Psi_2(d_1, y) - \frac{2k\pi U_0}{d_1^2} (-1)^k; \\ U_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 U_k(x) &= \frac{2k\pi(-1)^k}{d_2^2} \Psi_1(x, d_2) - \frac{2k\pi U_0}{d_2^2} (-1)^k; \\ G_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_3}\right)^2 G_k(y) &= \frac{2k\pi(-1)^k}{d_3^2} \Psi_2(a-d_3, y) - \frac{2k\pi U_0}{d_3^2} (-1)^k; \\ H_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 H_k(x) &= \frac{2k\pi(-1)^k}{d_2^2} \Psi_3(x, d_2) - \frac{2k\pi U_0}{d_2^2} (-1)^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (9) получаем следующие граничные условия для функций

$\varphi_k(y)$, $U_k(x)$, $G_k(y)$ и $H_k(x)$:

$$\varphi_k(d_1) = \varphi_k'(d_1) = H_k(a-d_3) = H_k'(a-d_3) = 0; \quad (12)$$

$$U_k(d_1) = U_k'(d_1) = G_k(d_2) = G_k'(d_2) = 0.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} & \frac{4U_0}{k\pi} (-1)^{k+1} \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi}{2d_j} (z-d_l) + \frac{2d_l}{\pi d_j} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_j} (z-d_l) \times \\ & \times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p q_p(u)}{p^2 + \left(\frac{d_l k}{d_j}\right)^2} - \frac{2(-1)^k d_l^2 k}{d_j^2 \pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q_p(u)}{p^2 + \left(\frac{kd_l}{d_j}\right)^2} \sin \frac{p\pi z}{d_l} = \\ & = P_k^{(ij)}(z, q_p(u)). \end{aligned}$$

Решение уравнений (11) на основании (12) имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_k(y) &= P_k^{(21)}(y, V_p(d_1)); \\ U_k(x) &= P_k^{(12)}(x, f_p(d_2)); \\ G_k(y) &= P_k^{(23)}(y, V_p(a-d_3)); \\ H_k(x) &= P_k^{(32)}(a-x, W_p(d_3)). \end{aligned} \quad (13)$$

Умножая первое из уравнений (7) на $\frac{2}{d_1} \sin \frac{k\pi x}{d_1}$ и интегрируя от 0 до d_1 , второе на $\frac{2}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2}$ и интегрируя от 0 до d_2 , а третье на $\frac{2}{d_3} \sin \frac{k\pi (a-x)}{d_3}$ и интегрируя от $a-d_3$ до a , для определения функций $f_k(y)$, $V_k(x)$ и $W_k(y)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} f_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 f_k(y) &= \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 \cdot A_k^{(1)}; \\ V_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 V_k(x) &= \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 \cdot A_k^{(2)}; \\ W_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_3}\right)^2 W_k(y) &= \left(\frac{k\pi}{d_3}\right)^2 \cdot A_k^{(3)}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } \frac{2U_p}{k\pi} (-1)^k + \frac{4d_1^2}{(k\pi)^2} [(-1)^k - 1] = A_k^{(1)}.$$

Из (8) и (10) получаем следующие граничные условия для функций $f_k(y)$, $V_k(x)$ и $W_k(y)$:

$$\begin{aligned} f_k(b) = f_k(0) + \varphi_k(0) &= 0, \quad V_k(0) + U_k(0) = 0; \\ V_k(a) + H_k(a) &= 0, \quad W_k(b) = W_k(0) + G_k(0) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Решения уравнений (14) имеют вид:

$$\begin{aligned} f_k(y) &= B_k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-y) - A_k^{(1)}; \\ V_k(x) &= N_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} + M_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} - A_k^{(2)}; \\ W_k(y) &= R_k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-y) - A_k^{(3)}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$B_k = \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(21)} V_p(d_1) + A_k^{(12)};$$

$$N_k = \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(12)} f_p(d_2) + A_k^{(21)};$$

$$R_k = \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(23)} V_p(a-d_2) + A_k^{(32)};$$

$$M_k = -N_k \operatorname{cth} \frac{k\pi a}{d_2} + \Pi_k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2}, \quad (17)$$

где

$$\Pi_k = \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(32)} W_p(d_2) + A_k^{(23)}.$$

Здесь

$$\frac{4d_i^2}{(k\pi)^2} [(-1)^k - 1] + \frac{2(-1)^k}{k\pi} U_0 \operatorname{ch} \frac{k\pi d_j}{d_i} = A_k^{(ij)};$$

$$\frac{2d_i}{\pi d_j} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_i}{d_j} \cdot \frac{p(-1)^p}{p^2 + \left(\frac{kd_i}{d_j}\right)^2} = Q_{kp}^{(ij)}.$$

На основании (17) выражение для $V_k(x)$ из (16) можно представить в виде:

$$V_k(x) = N_k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) + \Pi_k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} - A_k^{(2)}. \quad (18)$$

§ 3. Исследование бесконечных систем

Подставляя в (17) значения $f_p(d_2)$, $W_p(d_2)$, $V_p(d_1)$ и $V_p(a-d_2)$, согласно (16) и (18), и обозначая

$$\frac{4d_i^2}{(k\pi)^2} [(-1)^k - 1] + \frac{2U_0}{(k\pi)^2} (-1)^k \frac{d_i}{d_j} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_j}{d_i} -$$

$$- \frac{2d_i d_j}{(k\pi)^2} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_j}{d_i} \left(1 - \frac{2d_i}{k\pi d_j} \operatorname{th} \frac{k\pi d_j}{2d_i}\right) = D_k^{(ij)},$$

получим следующую совокупность четырех бесконечных систем линейных уравнений:

$$B_k = \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(21)} \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_2} (a-d_1) N_p +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(21)} \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \Pi_p + D_k^{(12)};$$

$$R_k = \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(23)} \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2} N_p + \\ + \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(23)} \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi (a-d_3)}{d_2} \Pi_p + D_k^{(23)}; \quad (19)$$

$$N_k = \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(12)} \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_1} (b-d_2) B_p + D_k^{(21)};$$

$$\Pi_k = \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(32)} \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_3} (b-d_2) R_p + D_k^{(23)}.$$

Введем обозначения:

$$B_k = \frac{(-1)^k}{k} d_3^2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} F_k; \\ R_k = \frac{(-1)^k}{k} d_3^2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} H_k; \\ N_k = \alpha d_3^2 \cdot \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} L_k; \\ \Pi_k = \alpha \frac{(-1)^k}{k} d_3^2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} E_k. \quad (20)$$

Здесь α — постоянный коэффициент, значение которого будет определено ниже.

Системы (19) примут вид:

$$E_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{11} H_p + b_k^{11}; \\ F_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{21} L_p + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{22} E_p + b_k^{11}; \\ H_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{31} L_p + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{32} E_p + b_k^{11}; \\ L_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{41} F_p + b_k^{11}, \quad (21)$$

где

$$a_{kp}^{11} = \frac{2d_2 k}{\alpha d_3 \pi} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_3}{d_2}\right)^2} \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_3} (b-d_2) \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_3};$$

$$\begin{aligned}
 a_{kp}^{21} &= \frac{2d_2 k z}{\pi d_1} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_2}{d_1}\right)^2} \operatorname{csch} \frac{p \pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi}{d_2} (a - d_1) \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_1}{d_2}; \\
 a_{kp}^{22} &= \frac{2d_2 k z}{\pi d_1} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_2}{d_1}\right)^2} \operatorname{csch} \frac{p \pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_2}{d_2}; \\
 a_{kp}^{31} &= \frac{2d_2 k z}{\pi d_3} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_2}{d_3}\right)^2} \operatorname{csch} \frac{p \pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_3}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_1}{d_2}; \\
 a_{kp}^{32} &= \frac{2d_2 k z}{\pi d_3} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_2}{d_2}\right)^2} \operatorname{csch} \frac{p \pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi (a - d_3)}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_3}{d_2}; \\
 a_{kp}^{41} &= \frac{2d_1 k}{\pi d_2 z} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_1}{d_2}\right)^2} \operatorname{sch} \frac{p \pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p \pi}{d_1} (b - d_2) \operatorname{sh} \frac{p \pi d_2}{d_1}; \\
 b_k^I &= \frac{k}{z} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k \pi d_3}{d_2} \cdot \frac{1}{d_3^2} D_k^{(33)}; \\
 b_k^{II} &= k (-1)^k \frac{1}{d_3^2} \operatorname{csch} \frac{k \pi d_2}{d_1} D_k^{(12)}; \\
 b_k^{III} &= k (-1)^k \cdot \frac{1}{d_3^2} \operatorname{csch} \frac{k \pi d_2}{d_3} D_k^{(32)}; \\
 b_k^{IV} &= \frac{k (-1)^k}{z} \cdot \frac{1}{d_3^2} \operatorname{csch} \frac{k \pi d_1}{d_2} D_k^{(21)}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Совокупность четырех систем (21) можно свести к одной системе

$$Z_\nu = \sum_{p=1}^{\infty} C_{\nu p} Z_p + \gamma_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots), \tag{23}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 E_k &= Z_{4k-3}, \quad F_k = Z_{4k-2}, \quad H_k = Z_{4k-1}, \quad L_k = Z_{4k}; \\
 a_{km}^{II} &= C_{4k-3, 4m-1}; \quad C_{4k-3, 4m} = C_{4k-3, 4m-2} = C_{4k-3, 4m-3} = 0; \\
 b_k^I &= \gamma_{4k-3}, \quad a_{km}^{21} = C_{4k-2, 4m}, \quad a_{km}^{22} = C_{4k-2, 4m-3}, \\
 C_{4k-2, 4m-1} &= C_{4k-2, 4m-2} = 0, \quad b_k^{II} = \gamma_{4k-2}, \quad a_{km}^{31} = C_{4k-1, 4m}, \\
 a_{km}^{32} &= C_{4k-1, 4m-3}, \quad C_{4k-1, 4m-1} = C_{4k-1, 4m-2} = 0, \quad b_k^{III} = \gamma_{4k-1}, \\
 a_{km}^{41} &= C_{4k, 4m-2}; \quad C_{4k, 4m} = C_{4k, 4m-1} = C_{4k, 4m-3} = 0; \quad b_k^{IV} = \gamma_{4k}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Из теории вполне регулярных систем [6] известно, что если

$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\gamma p}| \leq 1 - \theta$ для любого γ и $\theta > 0$ и свободные члены системы ограничены $|\gamma_r| \leq M$, то система имеет ограниченное решение

$$|Z_s| \leq K = \frac{M}{\theta}.$$

1°. Покажем, что система (23) вполне регулярна. Действительно:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k,p}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k,4p-2}| = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{41} = \\ &= \frac{2d_1 k}{\pi d_2 z} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2}\right)^2} \cdot \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_1} \times \\ &\times \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_1} (b-d_2) \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} < \frac{d_1 k}{\pi d_2 z} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{d_1 k}{d_2}\right)^2} \left[1 + \right. \\ &\left. + e^{-\frac{2\pi p}{d_1} (b-d_2)} \right] < \frac{1}{2z} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1} (b-d_2)} \right] \left(\operatorname{cth} \frac{k\pi d_1}{d_2} - \right. \\ &\left. - \frac{d_2}{k\pi d_1} \right) < \frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1} (b-d_2)}}{2z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k-1,p}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k-1,4p}| + \sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k-1,4p-3}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{31}| + \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{32}| \leq \\ &< \frac{4d_2 k z}{\pi d_3} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_3}\right)^2} \cdot \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi}{2d_2} (a-d_3+d_1) \times \\ &\times \operatorname{ch} \frac{p\pi}{2d_2} (a-d_3-d_1) < \frac{d_2 k z}{\pi d_3} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{d_2 k}{d_3}\right)^2} \cdot \operatorname{sch} \frac{p\pi a}{2d_2} \times \\ &\times \operatorname{ch} \frac{p\pi}{2d_2} (a-d_3-d_1) e^{\frac{p\pi}{2d_2} (d_1+d_2)} < \frac{d_2 k z}{\pi d_3} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{z^p}{(z^p - q) \frac{z^p}{zd} - \frac{z^p}{z} + 1} \right] \frac{\left(\frac{z^p}{z^p q} \right) + z^d \frac{1-d}{z} \frac{z^p z}{z^p}}{1} > \\
&> \frac{z^p}{z^p z d} \operatorname{sh} \cdot \left(\frac{z^p}{z^p - q} \right) \frac{z^p}{z d} \operatorname{ch} \cdot \frac{z^p}{q z d} \operatorname{sch} \times \\
&\times \frac{\left(\frac{z^p}{z^p q} \right) + z^d \frac{1-d}{z} \frac{z^p z}{z^p}}{1} \sum_{\infty} \frac{z^p z}{z^p q} = \left| \frac{dy}{dz} \right| \sum_{\infty} \frac{1-d}{z} = \left| 1 - d \frac{z^p}{z^p - q} \right| \sum_{\infty} \frac{1-d}{z} = \left| d \frac{z^p}{z^p - q} \right| \sum_{\infty} \frac{1-d}{z} \\
&\cdot \left[\frac{z^p}{(z^p - 1 p - v) \frac{z^p}{z} - \frac{z^p}{z} + 1} \right] \frac{\bar{z}}{z} \geq \\
&\geq \left(\frac{z^p z q}{z^p} - \frac{1 p}{z^p z q} \operatorname{sch} \right) \left[\frac{z^p}{(z^p - 1 p - v) \frac{z^p}{z} - \frac{z^p}{z} + 1} \right] \frac{\bar{z}}{z} = \\
&= \left[\frac{z^p}{(z^p - 1 p - v) \frac{z^p}{z d} - \frac{z^p}{z} + 1} \right] \frac{\left(\frac{1 p}{z^p q} \right) + z^d \frac{1-d}{z} \frac{1 p z}{z^p}}{1} > \\
&> \frac{z^p}{(z^p + 1 p) \frac{z^p}{z d}} \frac{z^p}{z d} \operatorname{sch} \cdot \frac{z^p}{z d} \operatorname{sch} \times \\
&\times \frac{\left(\frac{1 p}{z^p q} \right) + z^d \frac{1-d}{z} \frac{1 p z}{z^p}}{1} \sum_{\infty} \frac{1 p z}{z^p q} > (z^p - 1 p - v) \frac{z^p}{z d} \operatorname{sch} \cdot \frac{z^p}{1 p z d} \operatorname{sch} \times \\
&\times (z^p + 1 p - v) \frac{z^p}{z d} \operatorname{sch} \cdot \frac{z^p}{z d} \operatorname{sch} \cdot \frac{\left(\frac{1 p}{z^p q} \right) + z^d \frac{1-d}{z} \frac{1 p z}{z^p}}{1} \sum_{\infty} \frac{1 p z}{z^p q} = \\
&= \left| \frac{dy}{dz} \right| \sum_{\infty} \frac{1-d}{z} + \left| \frac{dy}{dz} \right| \sum_{\infty} \frac{1-d}{z} = \left| 1 - d \frac{z^p}{z^p - q} \right| \sum_{\infty} \frac{1-d}{z} + \left| d \frac{z^p}{z^p - q} \right| \sum_{\infty} \frac{1-d}{z} = \left| d \frac{z^p}{z^p - q} \right| \sum_{\infty} \frac{1-d}{z} \\
&\cdot \left[\frac{z^p}{(z^p - 1 p - v) \frac{z^p}{z} - \frac{z^p}{z} + 1} \right] \frac{\bar{z}}{z} \geq \left(\frac{z^p z q}{z^p} - \frac{1 p}{z^p z q} \operatorname{sch} \right) \left[\frac{z^p}{(z^p - 1 p - v) \frac{z^p}{z} - \frac{z^p}{z} + 1} \right] \frac{\bar{z}}{z} = \\
&= \left[\frac{z^p}{(z^p - 1 p - v) \frac{z^p}{z d} - \frac{z^p}{z} + 1} \right] \frac{\left(\frac{z^p}{z^p q} \right) + z^d \frac{1-d}{z} \frac{z^p z}{z^p}}{1} \sum_{\infty} \frac{z^p z}{z^p q} \times
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)} \right] \left(\operatorname{cth} \frac{k\pi d_2}{d_2} - \frac{d_2}{k\pi d_2} \right) < \frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)}}{2\alpha}.$$

Здесь были использованы следующие неравенства:

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_1}(b-d_2) < \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{2p\pi}{d_1}(b-d_2)} \right] \quad (i=1,3);$$

$$\operatorname{sch} \frac{p\pi a}{2d_2} + \operatorname{ch} \frac{p\pi}{2d_2}(a-d_1-d_3) < \left[e^{-\frac{p\pi}{2d_2}(d_1+d_3)} + e^{-\frac{p\pi}{2d_2}(2a-d_1-d_3)} \right];$$

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} < 1 \quad (0 < x < \infty).$$

Если $d_1 > d_2$, выбираем α так, чтобы

$$\frac{\alpha}{2} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(a-d_1-d_3)} \right] = \frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)}}{2\alpha}, \text{ т. е.}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)}}{1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_3)}}}.$$

Тогда для любого ν

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu,p}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)} \right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_3)} \right]}.$$

Если же $d_2 > d_1$, то выбираем α

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)}}{1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_3)}}}.$$

Тогда для любого ν

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu,p}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)} \right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_3)} \right]}.$$

В каждом конкретном случае можно указать определенное значение $\theta > 0$. Значит система (23) вполне регулярна.

2°. Для частного случая $d_1 = a - d_2$, т. е. для случая прямоугольного сечения с внутренней внецентренно расположенной трещиной, система (23) остается вполне регулярной.

3°. Для случая горизонтально расположенной центральной трещины, т. е. когда $b = d_2$, система (23) также вполне регулярна.

4°. Для случая, когда $d_1 = d_2$, т. е. для прямоугольного сечения с центрально расположенным прямоугольным вырезом вместо четырех бесконечных систем (21) получаются две системы, т. к. в этом случае $E_k = L_k$ и $H_k = F_k$. Эти системы можно представить в виде одной системы

$$Z_v = \sum_{p=1}^{\infty} C_{vp} Z_p + \gamma_v \quad (v = 1, 2, \dots), \quad (23')$$

где

$$\begin{aligned} Z_{2p-1} &= L_p = E_p; \quad Z_{2p} = H_p = F_p; \quad \gamma_{2k-1}^I = b_k^I = b_k^{IV}; \\ \gamma_{2k}^I &= b_k^{II} = b_k^{III}; \quad C_{2k-1, 2p-1} = C_{2k, 2p} = 0; \\ C_{2k-1, 2p} &= a_{kp}^{II} = a_{kp}^{III}; \quad C_{2k, 2p-1} = c_{kp}. \end{aligned} \quad (24')$$

Здесь c_{kp} на основании (22) имеет следующее значение:

$$\begin{aligned} c_{kp} &= a_{kp}^{2I} + a_{kp}^{2V} = a_{kp}^{3I} + a_{kp}^{32} = \frac{2d_2 k \pi}{\pi d_1} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_2}{d_1}\right)^2} \times \\ &\times \operatorname{sch} \frac{p \pi a}{2 d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p \pi}{2 d_2} (a - 2 d_1). \end{aligned} \quad (22')$$

5°. Для случая, когда $a = 2b$; $d_1 = d_2 = d_3 = d$, т. е. для случая квадратного сечения с квадратным центрально расположенным вырезом вместо двух бесконечных систем (24') получаем одну бесконечную систему, т. к. вторая система становится следствием первой системы, действительно:

$$\gamma_{2k} = \alpha \gamma_{2k-1}; \quad C_{2k, 2p-1} = \alpha^2 C_{2k-1, 2p}$$

и следовательно

$$Z_{2p} = \alpha Z_{2p-1}.$$

В этом случае

$$Z_v = \sum_{p=1}^{\infty} C_{vp} Z_p + \gamma_v,$$

где

$$C_{vp} = \frac{2v}{2\pi} \cdot \frac{1}{p^2 + v^2} \operatorname{sch} \frac{p \pi b}{d} \operatorname{ch} p \pi \left(\frac{b}{d} - 1 \right) \cdot \operatorname{sh} p \pi;$$

$$\gamma_1 = \frac{4}{\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \gamma \pi} \cdot \frac{1}{\gamma^2 \pi^2} \left[1 - (-1)^{\gamma} \right] + \frac{2U_0}{\alpha \gamma \pi^2} \cdot \frac{1}{d^2} - \\ - \frac{2}{\alpha} \frac{1}{\gamma \pi^2} \left(1 - \frac{2}{\gamma \pi} \operatorname{th} \frac{\gamma \pi}{2} \right).$$

§ 4. Определение постоянной U_0

Постоянная U_0 определяется на основании теоремы Бредта (7) о циркуляции касательного напряжения при кручении. Согласно этой теореме:

$$\int_{C_0} T_s ds = 2G\Omega, \quad (25)$$

где C_0 — внутренний контур сечения, Ω — площадь, ограниченная этим контуром, G — модуль сдвига, τ — угол закручивания на единицу длины, T_s — проекция касательного напряжения в к.-л. точке контура на направление касательной к этому контуру в той же точке

$$T_s = X_z \frac{dx}{ds} + Y_z \frac{dy}{ds} = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) G\tau. \quad (26)$$

Подставляя значение T_s из (26) в (25) и учитывая (5), после некоторых преобразований окончательно для вычисления U_0 получим:

$$\int_{d_2}^b \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)_{y=d_1} dy - \int_{d_2}^b \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)_{x=a-d_2} dy + \int_{d_1}^{a-d_1} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right)_{y=d_2} dx = \\ = 2(b-d_2)(a-d_2-d_1). \quad (27)$$

Из (10), (16), (20) и (24) получаем следующее выражение для функций $\Psi_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$).

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{d_1} \left\{ \frac{(-1)^k}{k} d_3^2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-y) \cdot \right. \\ \left. \cdot Z_{4k-2} - A_k^{(1)} \right\}.$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \left\{ \frac{(-1)^k}{k} \alpha d_3^2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \cdot \right. \\ \left. \cdot Z_{4k} + \alpha d_3^2 \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} Z_{4k-3} - A_k^{(2)} \right\}. \quad (28)$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3} \left[d_3^2 \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \cdot \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3}(b-y) \cdot Z_{4k-1} - A_k^{(3)} \right].$$

Непосредственно дифференцировать эти ряды нельзя, т. к. получаются расходящиеся ряды. Можно улучшить сходимость рядов (28), выделяя из них медленно сходящиеся части и суммируя их на основании известных рядов (4).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\xi}{k} = \begin{cases} \frac{\pi - \xi}{2} & \text{при } 0 < \xi < 2\pi \\ 0 & \text{при } \xi = 0, 2\pi; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\xi}{k} = \begin{cases} \frac{\xi}{2} & \text{при } -\pi < \xi < +\pi \\ 0 & \text{при } \xi = -\pi, +\pi. \end{cases}$$

В результате получим ряды, которые уже можно дифференцировать:

$$\Psi_1(x, y) = \frac{U_0 x}{d_1} + x(d_1 - x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} d_3^2 \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \times \\ \times \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1}(b-y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1} \cdot Z_{4k-2};$$

$$\Psi_2(x, y) = \frac{U_0 y}{d_2} + y(d_2 - y) + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \times \\ \times \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2}(a-x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k} + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_2} \times \quad (29) \\ \times \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \cdot Z_{4k-3};$$

$$\Psi_3(x, y) = \frac{U_0}{d_3} (a-x) + (a-x)(d_3 - a + x) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} d_3^2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3}(b-y) \cdot \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3} \times \\ \times Z_{4k-1};$$

Подставляя (29) в (27) и производя интегрирование, после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 U_0 = & \frac{d_1 d_2 d_3 [2ab - b d_3 - b d_1 - a d_2]}{(b - d_2) (d_2 d_3 + d_1 d_2) + d_1 d_3 (a - d_1 - d_3)} + \\
 & + \frac{d_1 d_2 d_3^3}{(b - d_2) (d_2 d_3 + d_1 d_2) + d_1 d_3 (a - d_3 - d_1)} \times \\
 & \times \left\{ \frac{d_1}{\pi d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k^2} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2) + \right. \\
 & + \frac{d_2 x}{\pi d_3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} + \frac{d_2 x}{\pi d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \times \\
 & \times \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - d_1) \cdot \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} + \\
 & + \frac{d_2 x}{\pi d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - d_3) + \\
 & + \frac{d_2 x}{\pi d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{k^2} \cdot \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} + \\
 & + \frac{d_2}{\pi d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-1}}{k^2} \cdot \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (b - d_2) \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_2} - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [x b_k^I + b_k^{II} + b_k^{III} + x b_k^{IV}] ,
 \end{aligned} \tag{30}$$

где, если ввести обозначение

$$\begin{aligned}
 & \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{d_i}{d_3} \right)^2 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_j}{d_i}} + \frac{1}{3} \frac{d_i}{d_3^2} \left(\frac{U_0}{d_j^2} - 1 \right) + \\
 & + \frac{4}{\pi^3} \left(\frac{d_i}{d_3} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi d_j}{2d_i} = g_k^{(ij)}, \\
 & x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^I}{k} = g_k^{(23)},
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{II}}{k} = g_k^{(12)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{III}}{k} = g_k^{(32)}, \quad \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{IV}}{k} = g_k^{(21)},$$

§ 5. Определение жесткости при кручении

Жесткость при кручении призматических стержней с двухсвязным поперечным сечением определяется по формуле:

$$C = G \left[-2U_1 \Omega_1 + 2U_0 \Omega_0 + 2 \int_{\Omega} U(x, y) dx dy \right], \quad (31)$$

где Ω_1 — полная площадь, ограниченная внешним контуром, Ω_0 — площадь, ограниченная внутренним контуром, G — модуль сдвига, Ω — область поперечного сечения стержня, U_1 — значение функции напряжений на внешнем контуре, U_0 — значение функции напряжений на внутреннем контуре.

Поскольку значение функции напряжений на внешнем контуре принято равным нулю, а также в силу симметрии области поперечного сечения, формула для вычисления жесткости (31) принимает вид:

$$C = 4G \left\{ U_0(a-d_3-d_1)(b-d_2) + \int_0^{d_1} \int_0^b U_1(x, y) dx dy + \right. \\ \left. + \int_0^{a-d_1-d_3} \int_0^{d_2} U_2(x, y) dx dy + \int_{a-d_1}^a \int_0^{d_2} U_3(x, y) dx dy \right\}. \quad (32)$$

На основании (5), (10), (13), (16), (18), (19), (20) и (24) получаются следующие значения для функций напряжений:

$$U_1(x, y) = x(d_1 - x) + \\ + d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \sin \frac{k\pi x}{d_1} Z_{4k-2} + \\ + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_1) \sin \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k} + \\ + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \left| \sin \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k-3} - \right. \\ \left. - \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \sin \frac{k\pi x}{d_1} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} + \\
& + \frac{8d_1^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (y-d_2) \sin \frac{k\pi x}{d_1} + \\
& + \frac{8d_1^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2};
\end{aligned}$$

в области $0 \leq x \leq d_1$, $0 \leq y \leq d_2$.

$$U_3(x, y) = (a-x) [d_3 - (a-x)] +$$

$$\begin{aligned}
& + d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \times \\
& \times \sin \frac{k\pi (a-x)}{d_3} Z_{4k-1} + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (a-x) \times \\
& \times \sin \frac{k\pi y}{a_2} \cdot Z_{4k} + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \times \\
& \times \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_3) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2} \times
\end{aligned}$$

(33)

$$\begin{aligned}
& \times Z_{4k-3} - \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_3} \sin \frac{k\pi}{d_3} (a-x) - \\
& - \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \sin \frac{k\pi y}{d_2} + \\
& + \frac{8d_3^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (y-d_2) \cdot \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \sin \frac{k\pi (a-x)}{d_3} + \\
& + \frac{8d_2^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2};
\end{aligned}$$

в области $a-d_3 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq d_2$.

В силу (5) функции напряжений $U_1(x, y)$ в области $0 \leq x \leq d_1$, $d_2 \leq y \leq b$, $U_2(x, y)$ в области $d_1 \leq x \leq a-d_3$, $0 \leq y \leq d_2$, $U_3(x, y)$ в области $a-d_3 \leq x \leq a$, $d_2 \leq y \leq b$ принимают соответственно значения $\Psi_1(x, y)$, $\Psi_2(x, y)$ и $\Psi_3(x, y)$ из (29).

Подставляя значения $U(x, y)$ из (29) и (33) в (32) и производя интегрирование, окончательно для вычисления жесткости C получим следующую формулу:

$$\begin{aligned}
 C = 4G \left\{ U_0 \left[ab - \frac{d_3 b}{2} - \frac{d_1 b}{2} - \frac{ad_2}{2} \right] + \frac{4U_0}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[d_1^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} + \right. \right. \\
 \left. \left. + d_2^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} + d_3^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + d_2^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2} \right] + \frac{1}{6} [d_1^3 b + d_2^3 (a - d_3 - d_1) + \right. \\
 \left. + d_3^3 b \right] + \frac{16}{\pi^5} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \left[d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} - d_1^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} - d_3^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + \right. \\
 \left. + d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2} \right] - \frac{2\alpha d_2^2 d_3^2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{2d_2} \times \right. \\
 \left. \times \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d_2} (a - 2d_1) \right] Z_{4k} - \frac{2d_3^4}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - d_2) \right] \times \\
 \times Z_{4k-1} - \frac{2d_3^2 d_1^2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2) \right] \times \\
 \times Z_{4k-2} - \frac{2d_2^2 d_3^2 \alpha}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d_2} (a - 2d_3) \right] \cdot Z_{4k-3} \Big\}.
 \end{aligned}$$

В случае центрально расположенного выреза, т. е. когда $d_1 = d_3$ для всех k $Z_{4k} = Z_{4k-3}$, $Z_{4k-1} = Z_{4k-2}$ и формула для определения жесткости C принимает вид:

$$\begin{aligned}
 C = 8G \left\{ \frac{U_0}{2} \left[ab - d_1 b - \frac{ad_2}{2} \right] + \frac{4U_0}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[d_1^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} + \right. \right. \\
 \left. \left. + d_2^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} \right] + \frac{1}{6} \left[d_1^3 b + d_2^3 \left(\frac{a}{2} - d_1 \right) \right] + \frac{16}{\pi^5} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \times \right. \\
 \left. \times \left[d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} - d_1^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} \right] - \frac{2\alpha d_2^2 d_1^2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{2d_2} \times \right. \right. \\
 \left. \left. \times \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d_2} (a - 2d_1) \right] - \frac{2d_1^4}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k-1}}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2) \right] \right\}. \quad (35)
 \end{aligned}$$

Формула (35) для случая квадратного сечения с квадратным вырезом совпадает с формулой для определения жесткости, данной в работе [2] в несколько иной форме.

§ 5. Определения напряжений

Напряжения легко получить из (29) и (33) на основании формул: $X_z = \frac{\partial U}{\partial y} G\tau$, $Y_z = -\frac{\partial U}{\partial x} G\tau$.

$$X_z = \left\{ \frac{d_3^2 \pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b-y) \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sin \frac{k\pi x}{d_1} \times \right. \\ \left. \times Z_{4k-2} \right\} G\tau.$$

$$Y_z = \left\{ \frac{\pi d_3^2}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-y) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cos \frac{k\pi x}{d_1} Z_{4k-2} - \right. \\ \left. - d_1 \left(\frac{U_0}{d_1^2} + 1 \right) + 2x \right\} G\tau \quad 0 \leq x \leq d_1, \quad d_2 \leq y \leq b.$$

$$X_z = \left\{ d_3 \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (y-b) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \times \right. \\ \left. \times Z_{4k-1} \right\} G\tau$$

$$Y_z = \left\{ d_3 \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (y-b) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cos \frac{k\pi (a-x)}{d_2} Z_{4k-1} + \right. \\ \left. + d_2 \left(\frac{U_0}{d_2^2} + 1 \right) - 2(a-x) \right\} G\tau \quad a - d_2 \leq x \leq a, \quad d_2 \leq y \leq b.$$

$$X_z = \left\{ \frac{\pi d_3^2}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k} + \right. \\ \left. + \frac{\pi d_3^2}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k-2} + \right. \\ \left. + d_2 \left(\frac{U_0}{d_2^2} + 1 \right) - 2y \right\} G\tau.$$

$$Y_z = \left\{ \frac{\pi d_3^2}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k} - \right.$$

$$- \frac{ad_3^2\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \cdot Z_{4k-3} \Big\} G\tau.$$

$$d_1 \leq x \leq a - d_3, \quad 0 \leq y \leq d_2.$$

$$X_2 = \left\{ \frac{d_3^2\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2) \sin \frac{k\pi x}{d_1} Z_{4k-2} + \right.$$

$$+ \frac{ad_3^2\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - d_1) \cos \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k} +$$

$$+ \frac{ad_3^2\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k-3} - \frac{2U_0}{d_1} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_1} \sin \frac{k\pi x}{d_1} - \frac{2U_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \times$$

$$\times \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \times \cos \frac{k\pi y}{d_2} + \frac{8d_1}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (y - d_2) \times$$

$$\times \sin \frac{k\pi x}{d_1} + \frac{8d_2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} \Big\} G\tau.$$

$$Y_2 = \left\{ 2x - d_1 - \frac{d_3^2\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2) \cos \frac{k\pi x}{d_1} Z_{4k-2} - \right.$$

$$- \frac{ad_3^2\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - d_1) \sin \frac{k\pi y}{d_2} \cdot Z_{4k} -$$

$$- \frac{ad_3^2\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k-3} +$$

$$+ \frac{2U_0}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \cos \frac{k\pi x}{d_1} +$$

$$+ \frac{2U_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2} -$$

$$- \frac{8d_1}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (y - d_2) \cos \frac{k\pi x}{d_2} -$$

$$- \frac{8d_2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \Big\} G\tau.$$

$$0 \leq x < d_1, \quad 0 \leq y < d_2.$$

$$\begin{aligned}
X_2 = & \left\{ d_3 \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (b-d_2) \sin \frac{k\pi (a-x)}{d_3} Z_{4k-1} + \right. \\
& + \frac{\alpha d_3^2 \pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi (a-x)}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k} + \\
& + \frac{\alpha d_3^2 \pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi (a-x)}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi (a-d_3)}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k-3} - \\
& - \frac{2U_0}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_3} \sin \frac{k\pi (a-x)}{d_2} - \\
& - \frac{2U_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi (a-x)}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} + \\
& + \frac{8d_3}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (y-d_2) \sin \frac{k\pi (a-x)}{d_3} + \\
& + \left. \frac{8d_2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi (a-x)}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} \right\} G\tau.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_2 = & \left\{ d_3 - 2(a-x) + \right. \\
& + d_3 \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi (b-d_2)}{d_3} \cos \frac{k\pi (a-x)}{d_2} Z_{4k-1} + \\
& + \frac{\alpha d_3^2 \pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \cdot Z_{4k} + \\
& + \frac{\alpha d_3^2 \pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi (a-x)}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi (a-d_3)}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \cdot Z_{4k-3} - \\
& - \frac{2U_0}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_3} \cos \frac{k\pi (a-x)}{d_2} - \\
& - \frac{2U_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi (a-x)}{d_2} \times \\
& \times \sin \frac{k\pi y}{d_2} + \frac{8d_3}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (y-d_4) \cos \frac{k\pi (a-x)}{d_3} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{8d_2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi(a-x)}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \Big\} G\tau$$

$$a - d_3 < x \leq a, \quad 0 \leq y < d_2.$$

§ 7. Пример

В качестве примера вычислена жесткость при кручении и определены напряжения для призматического стержня квадратного сечения $a = 2b$ с квадратным вырезом, т. е. при $a - (d_1 + d_3) = 2(b - d_2)$.

Ниже приведены оценки для неизвестных после применения лимитант (6).

$$\text{Если } d_1 = 2d_3, \text{ а } \frac{b}{d_2} = 1,5, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} 1,13185 \ U_0/d_2^2 - 0,02930 &\leq Z_1 \leq 1,16483 \ U_0/d_2^2 + 0,00323 \\ 0,78295 \ U_0/d_2^2 - 0,10287 &\leq Z_2 \leq 0,80638 \ U_0/d_2^2 - 0,07976 \\ 0,55199 \ U_0/d_2^2 - 0,25649 &\leq Z_3 \leq 0,58531 \ U_0/d_2^2 - 0,22362 \\ 0,82238 \ U_0/d_2^2 - 0,57560 &\leq Z_4 \leq 0,87502 \ U_0/d_2^2 - 0,52368 \\ 0,75077 \ U_0/d_2^2 - 0,28954 &\leq Z_5 \leq 0,80623 \ U_0/d_2^2 - 0,23486 \\ 0,51473 \ U_0/d_2^2 - 0,33182 &\leq Z_6 \leq 0,55157 \ U_0/d_2^2 - 0,29548 \\ 0,40527 \ U_0/d_2^2 - 0,23969 &\leq Z_7 \leq 0,45375 \ U_0/d_2^2 - 0,19187 \\ 0,62837 \ U_0/d_2^2 - 0,53426 &\leq Z_8 \leq 0,70909 \ U_0/d_2^2 - 0,45466 \\ 0,63799 \ U_0/d_2^2 - 0,48821 &\leq Z_9 \leq 0,84709 \ U_0/d_2^2 - 0,28200 \quad (\nu \gg 9), \end{aligned}$$

причем

$$1,08147 \leq U_0/d_2^2 \leq 1,10335.$$

$$\text{Если } d_1 = 2d_3, \text{ а } \frac{b}{d_2} = 10, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} 1,05262 \ U_0/d_2^2 + 0,06136 &\leq Z_1 \leq 1,32842 \ U_0/d_2^2 - 0,01153 \\ 0,67579 \ U_0/d_2^2 - 0,03172 &\leq Z_2 \leq 0,84769 \ U_0/d_2^2 - 0,07715 \\ 0,41166 \ U_0/d_2^2 - 0,16632 &\leq Z_3 \leq 0,65446 \ U_0/d_2^2 - 0,23048 \\ 0,62827 \ U_0/d_2^2 - 0,44334 &\leq Z_4 \leq 1,06117 \ U_0/d_2^2 - 0,55775 \\ 0 &\leq Z_5 \leq 1,22814 \ U_0/d_2^2 - 0,32457 \quad (\nu \gg 5) \end{aligned}$$

Здесь

$$9,13235 \leq U_0/d_2^2 \leq 9,19229$$

В таблице 1 приведены верхние $\bar{C}$ и нижние $\bar{C}$ оценки значения жесткости в обоих случаях. За расчетную формулу принято

$$C_0 = \frac{\bar{C} + \bar{C}}{2}. \text{ Для сравнения приведены значения жесткости } C^* \text{ для}$$

случая центрально расположенного выреза из работы (2), значения жесткости C^{**} , вычисленные по формуле (3) для тонкостенных трубчатых стержней.

$$C^{**} = \frac{4F^2 G}{\int \frac{ds}{\delta}}$$

(где δ — толщина стенки, s — длина осевой линии кольцевого сечения трубы, F — площадь, заключенная внутри срединной линии кольцевого сечения), а также относительная погрешность $\beta = \frac{C - C^{**}}{C}$, выраженная в процентах.

Таблица 1

b/d_2	10	1,5
$\bar{C}/Gd_2$	6611,9	10,9070
$\bar{C}/Gd_2^A$	6658,6	10,9448
C^*/Gd_2^A	6635,3	10,9259
C^*/Gd_2^A	7035	11,0515
C^{**}/Gd_2^A	6455,65	7,5294
$\beta\%$	2,7	31,09

Из приведенной таблицы видно, что жесткость стержня с центрально расположенным вырезом больше, чем жесткость стержня со сдвинутым относительно центра вырезом. Формула Бредта дает хорошие результаты для тонкостенных стержней ($b/d_2 = 10$) и не применима для вычисления жесткости толстостенных стержней ($b/d_2 = 1,5$).

В таблице 2 даны значения максимальных напряжений с недостатком $\bar{X}_z$, $\bar{Y}_z$ и с избытком $\bar{X}_z$ и $\bar{Y}_z$, а также значения максимальных напряжений, вычисленных по формуле Бредта (4).

Формула Бредта в применении к данному сечению принимает вид:

$$\tau_{max} = \frac{C_z}{2d_2(2b-d_2) \left[a - \frac{d_1+d_3}{2} \right]} \times \\ \times \left[1 + \frac{d_2}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 \left(2 + \frac{d_3}{d_1} + \frac{d_1}{d_3} \right)}{ab \left[a + b \left(\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_2}{d_3} \right) \right]} \right]$$

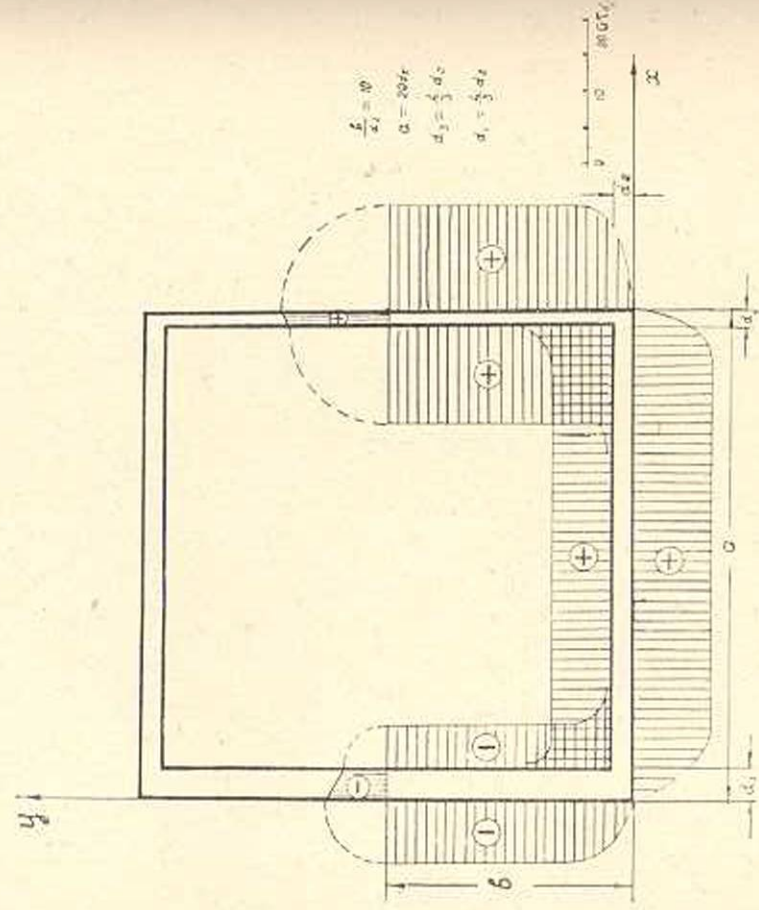
Здесь не принята во внимание концентрация напряжений по входящим углам (см. табл. 2).

$$\text{Здесь } X_z^* = \frac{\bar{X}_z + \bar{X}_z}{2}, \quad Y_z^* = \frac{\bar{Y}_z + \bar{Y}_z}{2}.$$

$$\text{Напряжения } X_z(0, b) = X_z(a, b) = Y_z\left(\frac{5}{9}a, 0\right) = 0$$

Таблица 2

	b/d_2	10	1,5
$q = \gamma_z$	$\bar{Y}_z / G\tau d_2$	- 8,2275	- 1,9544
$q = \gamma_z$	$\bar{Y}_z / G\tau d_2$	- 8,1626	- 1,8883
$q = \gamma_z$	$Y_z^0 / G\tau d_2$	- 8,1950	- 1,9213
$q = \gamma_z$	$\tau_{max}^0 / G\tau d_2$	7,2897	1,3657
$q = \gamma_z, v = \gamma_z$	$\bar{Y}_z / G\tau d_2$	14,3652	2,2098
$q = \gamma_z, v = \gamma_z$	$\bar{Y}_z / G\tau d_2$	14,4551	2,2596
$q = \gamma_z, v = \gamma_z$	$Y_z^0 / G\tau d_2$	14,4102	2,2347
$q = \gamma_z, v = \gamma_z$	$\tau_{max}^0 / G\tau d_2$	14,5735	2,7315
$q = \gamma_z, v = \gamma_z$	$\bar{X}_z / G\tau d_2$	10,1323	1,9186
$q = \gamma_z, v = \gamma_z$	$\bar{X}_z / G\tau d_2$	10,1923	1,9982
$q = \gamma_z, v = \gamma_z$	$X_z^0 / G\tau d_2$	10,1623	1,9584
$q = \gamma_z, v = \gamma_z$	$\tau_{max}^0 / G\tau d_2$	9,7197	1,8210



Фиг. 2.

На фиг. 2 и 3 даны эпюры напряжений для $\frac{b}{d_2} = 10$ и $\frac{b}{d_2} = 1,5$.

դիֆերենցիալ հալասարման լուծումը բերվում է հաստատուն գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հալասարումների սխեմայի լուծմանը:

Ինտեգրման գործակիցները որոշվում են գծային հալասարումների անփերջ սխեմայից, որը լիովին սեպուլլար է:

Որպես թվային օրինակ դիտարկված է քառակուսի լայնական հատվածքով սնամեջ ձողի ուղղման դեպքը:

Հաշված են այդ ձողի կոշտությունը ուղղման մասնանակ և լարումները հատվածքի մի շարք կետերում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Арутюнян. ДАН Арм. ССР, т. IX, № 2, 1948. ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
2. Б. Л. Абрамян. ПММ, т. XIV, н. 3, 1950.
3. А. Фепля и Л. Фепля. Сила и деформация, ОНТИ, НКТП СССР, 1936.
4. И. В. Геккелер. Статика упругого тела, ОНТИ, ГТТИ, 1934.
5. Г. А. Гринберг. Изв. АН СССР, серия физическая, 1946, т. X, вып. 2.
6. Л. В. Канторович и В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа, ОТНИ, М., 1949.
7. Л. С. Лейбензон. Курс теории упругости, Гостехиздат, М.—Л., 1947.