

Б. М. Левитан и И. С. Саргсян

Асимптотические оценки производных собственных функций уравнения Шредингера

§ 1 Некоторые предварительные оценки

Пусть функция $q(x) = q(x_1, x_2, x_3)$ определена во всем трехмерном пространстве E_3 и снизу ограничена, т. е. существует такая константа m , что для всех x

$$q(x) > m. \quad (1.1)$$

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + \{\lambda - q(x)\} u = 0. \quad (1.2)$$

Предположим, что при $|x| \rightarrow \infty$, $q(x) \rightarrow +\infty$. Как известно, в этом случае уравнение (1.2), рассматриваемое во всем пространстве E_3 , имеет чисто точечный спектр. Предположим для простоты, что спектр неотрицателен. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ собственные значения, а через $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$ — соответствующие собственные функции уравнения (1.2).

Основная цель настоящей работы — доказать следующую теорему:

Теорема. Если в точке x функция $q(x)$ имеет $(\alpha - 1)$ -ю производную, то при $\mu \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\sum_{\mu < \mu_n < \mu + 1} |D_x^\alpha \psi_n(x)|^2 = O(\mu^{2\alpha+2}),$$

где $\mu_n^2 = \lambda_n$, а

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha).$$

Эта теорема играет в вопросах дифференцирования разложений по собственным функциям уравнения Шредингера весьма важную роль.

Обозначим через $G(x, y; \mu)$ функцию Грина уравнения (1.2), которая существует в силу условия (1.1) для $\mu < m$, ($\mu = -\lambda$). Далее предположим, что существуют такие постоянные c и C , что для достаточно больших $|\xi|$ выполняется неравенство

$$|q(\xi)| < C e^{c|\xi|}. \quad (1.3)$$

Для $\mu > 0$ положим

$$g(x, \xi; \mu) = \frac{e^{-\sqrt{\mu} r}}{4\pi r}, \quad (1.4)$$

где $r = |x - \xi|$. Функция $g(x, \xi; \mu)$ есть функция Грина уравнения (1.2) при $q(x) = 0$.

При таких предположениях, как известно, справедливы тождества [1]:

$$\frac{\psi_n(x)}{\lambda_n + \mu} = \int_{E_3} g(x, \xi; \mu) \psi_n(\xi) d\xi - \frac{1}{\lambda_n + \mu} \int_{E_3} q(\xi) g(x, \xi; \mu) \psi_n(\xi) d\xi; \quad (A)$$

$$G(x, \eta; \mu) = g(x, \eta; \mu) - \int_{E_3} q(\xi) g(x, \xi; \mu) G(\xi, \eta; \mu) d\xi. \quad (B)$$

Дифференцируя тождество (A) по μ и по x_i (где i — одно из чисел 1, 2, 3) и применяя элементарное неравенство $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_i} \right]^2 &\leq 3 \left\{ \left[\int_{E_3} \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int_{E_3} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\int_{E_3} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} \psi_n(\xi) d\xi \right] \Big\} = 3(I_1^{(n)} + I_2^{(n)} + I_3^{(n)}). \quad (1.5) \end{aligned}$$

Полагая в неравенстве (1.5) $n = 1, 2, 3, \dots, N$ и суммируя, получим

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_i} \right]^2 \leq 3 \sum_{n=1}^N (I_1^{(n)} + I_2^{(n)} + I_3^{(n)}).$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} &\int_{E_3} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i} \psi_n(\xi) d\xi = \\ &= \left(\int_{r < 1} + \int_{r > 1} \right) q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i} \psi_n(\xi) d\xi, \quad r = |\xi|. \end{aligned}$$

Применяя вышеуказанное элементарное неравенство отсюда получим

$$I_2^{(n)} = \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int_{E_3} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 \leq$$

$$\leq \frac{2}{(\lambda_n + \mu)^4} \left\{ \left[\int_{r \leq 1} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\int_{r > 1} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 \right\}.$$

Соответственно этому сумма $\sum_{n=1}^N I_2^{(n)}$ разбивается на две:

$$\sum_{n=1}^N I_2^{(n)} \leq 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int_{r \leq 1} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \\ + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int_{r > 1} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Оценим вначале σ_2 . В силу неравенства Бесселя

$$\sigma_2 \leq \sum_{n=1}^N \frac{C}{(\lambda_n + \mu)^4} \int_{r > 1} q^2(\xi) \left[\frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \right]^2 d\xi \leq \\ \leq \sum_{n=1}^N \frac{C}{(\lambda_n + \mu)^4} \int_{r > 1} q^2(\xi + x) e^{-2\sqrt{\mu}r} d\xi, \quad \text{где } r = |\xi|.$$

В силу условия (1.3) отсюда для достаточно больших μ получим оценку:

$$\sigma_2 = O(\mu^{-4}). \quad (1.6)$$

Оценим теперь σ_1 . Мы имеем

$$\sigma_1 \leq 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \int_{r \leq 1} \int_{r_1 \leq 1} q(x + rx) q(x + r_1 \beta) \frac{\psi_n(x + rx) \psi_n(x + r_1 \beta)}{(\lambda_n + \mu)^2} \cdot \\ \cdot \frac{dr dr_1}{r^2 r_1^2} + O\left(\frac{\sqrt{\mu}}{r} e^{-\sqrt{\mu}r}\right), \quad \text{так как } \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} = O(r^{-2}).$$

Поэтому

$$\sigma_1 \leq \frac{C}{\mu^2} \int_0^1 dr \int_0^1 dr_1 \left[\frac{q(x + rx)}{r^2} \cdot \frac{q(x + r_1 \beta)}{r_1^2} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^N \frac{\psi_n(x + rx) \psi_n(x + r_1 \beta)}{(\lambda_n + \mu)^2} \right] + O\left(\frac{\sqrt{\mu}}{r} e^{-\sqrt{\mu}r}\right).$$

Далее в силу неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^N \frac{\psi_n(x+2r) \psi_n(x+3r_1)}{(\lambda_n + \mu)^2} \leq \\ \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{\psi_n^2(x+2r)}{(\lambda_n + \mu)^2} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=1}^N \frac{\psi_n^2(x+3r_1)}{(\lambda_n + \mu)^2} \right)^{1/2} < C.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что при фиксированном x

$$\sigma_1 = O(\mu^{-2}). \quad (1.7)$$

Из оценок (1.6) и (1.7) следует, что при фиксированном x имеет место оценка

$$I_2^{(n)} = O(\mu^{-2}). \quad (1.8)$$

Теперь оценим $I_3^{(n)}$. В силу неравенства Бесселя получим неравенство

$$I_3^{(n)} \leq \frac{C}{\mu^2} \int_{E_1} q^2(\xi) \left[\frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} \right]^2 d\xi. \quad (1.9)$$

Тогда из определения функции $g(x, \xi; \mu)$ следует, что в (1.9) интеграл справа при фиксированном x есть $O(1)$. Поэтому для $I_3^{(n)}$ получим оценку

$$I_3^{(n)} = O(\mu^{-2}). \quad (1.10)$$

Оценим теперь $I_1^{(n)}$. Применяя неравенство Бесселя и переходя к сферическим координатам получим

$$I_1^{(n)} \leq \frac{C}{64\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \cdot \cos^2 \theta d\theta \int_0^\infty r^2 e^{-2\sqrt{\mu} r} dr = \\ = C\mu^{-3/2} \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = C\mu^{-3/2}. \quad (1.11)$$

В силу произвольности числа N , из оценок (1.8), (1.10) и (1.11) следует

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_i} \right]^2 < C\mu^{-3/2}. \quad (1.12)$$

Отсюда можно получить пока грубую оценку для первых производных собственных функций. В самом деле, положим $\lambda_n = \mu_n^2$, $\mu = \nu^2$. Тогда из оценки (1.12) получим

$$\sum_{\nu < \kappa_n < \nu+1} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_i} \right]^2 < C \nu^{\delta}, \quad (1.13)$$

В дальнейшем мы увидим, что на самом деле в оценке (1.13) можно 5 заменить на 4.

§ 2. Доказательство теоремы для первых производных

Чтобы получить дальнейшее уточнение в оценке (1.13), используем фундаментальное тождество (B). Дифференцируя это тождество по μ и по x_i получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(x, \eta; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} &= \frac{\partial^2 g(x, \eta; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} - \int_{E_2} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} G(\xi, \eta; \mu) d\xi - \\ &- \int_{E_2} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i} \frac{\partial G(\xi, \eta; \mu)}{\partial \mu} d\xi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из тождества (2.1), определения функции $G(x, y; \mu)$ и неравенства Минковского следует

$$\begin{aligned} \left(\int_{E_2} \left[\frac{\partial^2 G(x, \eta; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} \right]^2 d\eta \right)^{1/2} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_i} \right]^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_{E_2} \left[\frac{\partial^2 g(x, \eta; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} \right]^2 d\eta \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{E_2} \left[\int_{E_2} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} G(\xi, \eta; \mu) d\xi \right]^2 d\eta \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{E_2} \left[\int_{E_2} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i} \frac{\partial G(\xi, \eta; \mu)}{\partial \mu} d\xi \right]^2 d\eta \right)^{1/2} = i_1 + i_2 + i_3. \end{aligned}$$

В силу оценки (1.11) имеем

$$i_1 = \left(\int_{E_2} \left[\frac{\partial^2 g(x, \eta; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} \right]^2 d\eta \right)^{1/2} < C \mu^{-1/2}. \quad (2.2)$$

Из определения функции $G(x, y; \mu)$ легко следуют тождества

$$i_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\int_{E_2} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 \right)^{1/2}.$$

$$i_3 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int_{\tilde{E}_3} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_1} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда в силу оценок (1.10) и (1.8) для i_2 и i_3 получим оценки

$$i_2 < C\mu^{-1}, \quad i_3 < C\mu^{-1}. \quad (2.3)$$

Из оценок (2.2) и (2.3) следует оценка

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_1} \right]^2 \right)^{1/2} \leq C\mu^{-1/2} + O(\mu^{-1}). \quad (2.4)$$

Так как в тождестве (B) функции $G(x, y; \mu)$ и $g(x, y; \mu)$ можно переставить местами, то из оценки (2.4) следует

$$C\mu^{-3/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_1} \right]^2 \right)^{1/2} + O(\mu^{-1}). \quad (2.5)$$

Из оценок (2.4) и (2.5) получим важную оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_1} \right]^2 = C\mu^{-3/2} + O(\mu^{-2}). \quad (2.6)$$

Из этого асимптотического равенства и тауберовой теоремы Харди—Литтлвуда следует оценка

$$\sum_{\lambda_n < \mu} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_1} \right]^2 = C\mu^{-3/2} + O(\mu^{-2}). \quad (2.7)$$

Откуда получим оценку, уже уточняющую (1.13), а именно:

$$\sum_{\mu < \mu_n \leq \mu+1} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_1} \right]^2 = o(\mu^3).$$

Применяя теорему Г. Фрайда [2]—[4] из (2.7) получим нужную оценку:

$$\sum_{\mu < \mu_n \leq \mu+1} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_1} \right]^2 = O(\mu^3).$$

§ 3. Предварительные оценки старших производных

Для оценки вторых производных предположим, что функция $q(x)$ дифференцируема. Тогда дифференцируя тождество (A) два раза по μ , один раз по x_1 , потом учитывая, что $\frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_1} = -\frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial \xi_1}$ и дифференцируя еще раз по x_j ($j = 1, 2, 3$), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^3} \cdot \frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_i} &= \frac{1}{2} \int_{E_i} \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu^2} \psi_n(\xi) d\xi - \\ &- \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^3} \int_{E_i} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} [q(\xi) \psi_n(\xi)] d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \int_{E_i} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu} \psi_n(\xi) d\xi - \\ &- \frac{1}{2(\lambda_n + \mu)} \int_{E_i} q(\xi) \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu^2} \psi_n(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Далее, применяя элементарное неравенство $(a + b + c + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, потом полагая в полученном неравенстве $n = 1, 2, \dots, N$ и суммируя, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^6} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_i} \right]^2 &\leq 2 \sum_{n=1}^N \left[\int_{E_i} \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu^2} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \\ &+ \sum_{n=1}^N \frac{2}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int_{E_i} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \\ &+ 4 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^6} \left[\int_{E_i} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} [q(\xi) \psi_n(\xi)] d\xi \right]^2 + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\int_{E_i} q(\xi) \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu^2} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Далее будем оценивать отдельные слагаемые. Проще всего оценить I_4 . Мы имеем, по определению функции $g(x, \xi; \mu)$,

$$\frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu^2} = -\delta_{ij} \frac{e^{-\sqrt{\mu} r}}{16\pi\sqrt{\mu}} + \frac{e^{-\sqrt{\mu} r}}{16\pi r} (x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j).$$

Поэтому при фиксированном x

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \frac{C}{\mu^2} \left[\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{\mu}} \int_{E_i} q(\xi) e^{-\sqrt{\mu} r} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \\ &+ \frac{C}{\mu^2} \left[\int_{E_i} q(\xi) \psi_n(\xi) \frac{e^{-\sqrt{\mu} r}}{r} (x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) d\xi \right]^2. \end{aligned}$$

Далее в силу неравенства Шварца отсюда следует оценка:

$$I_4 \leq \frac{C}{\mu^2} \left[\frac{\partial_{ij}}{\mu} \int_{E_1} q^2(\xi) e^{-2\sqrt{\mu}r} d\xi + \right. \\ \left. + \int_{E_1} q^2(\xi) \frac{e^{-2\sqrt{\mu}r}}{r^2} (x_i - \xi_i)^2 (x_j - \xi_j)^2 d\xi \right] = O(\mu^{-3}). \quad (3.2)$$

Аналогично можно оценить I_2 . В самом деле, мы имеем:

$$\frac{\partial^3 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i \partial x_j \partial \mu} = \frac{\partial_{ij}}{8\pi r} \frac{e^{-\sqrt{\mu}r}}{r} - \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r} \frac{e^{-\sqrt{\mu}r}}{8\pi r} - \\ - \frac{e^{-\sqrt{\mu}r}}{8\pi r^2} \cdot \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r}.$$

Тогда, в силу неравенства Шварца, при $\mu \rightarrow \infty$ получим

$$I_2 \leq \frac{C}{\mu^4} \left[\frac{\partial_{ij}}{\mu} \int_{E_2} q^2(\xi) \frac{e^{-2\sqrt{\mu}r}}{r^2} d\xi + \right. \\ \left. + \mu \int_{E_2} \frac{e^{-2\sqrt{\mu}r}}{r^4} (x_i - \xi_i)^2 (x_j - \xi_j)^2 q^2(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_{E_2} q^2(\xi) \frac{e^{-2\sqrt{\mu}r}}{r^6} (x_i - \xi_i)^2 (x_j - \xi_j)^2 d\xi \right] = \frac{C}{\mu^4} (I_2' + I_2'' + I_2'''). \quad (3.3)$$

В силу условия (1.3) нетрудно видеть, что I_2' , I_2'' и I_2''' при фиксированном x ограничены. Поэтому из (3.3) следует оценка

$$I_2 = O(\mu^{-3}). \quad (3.4)$$

Оценим теперь I_2 . В силу неравенства Бесселя дело сводится к оценке интеграла

$$\int_{E_2} \left[\frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i \partial x_j \partial \mu^2} \right]^2 d\xi. \quad (3.5)$$

Функция $g(x, \xi; \mu)$ зависит от $r = |x - \xi|$ и поэтому, так как интеграл берется по всему пространству, делая замену переменных мы увидим, что $|x - \xi|$ можно заменить на $|\xi|$, так что интеграл (3.5) не зависит от x . Итак,

$$\int_{E_2} \left[\frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i \partial x_j \partial \mu^2} \right]^2 d\xi = \frac{\partial_{ij}^2}{256\pi^2 \mu} \int_{E_2} e^{-2\sqrt{\mu}r} d\xi -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\delta_{ij}}{128\pi^2 V \mu} \int_{E_1} \frac{e^{-2V \mu r}}{r} \xi_i \xi_j d\xi + \\
& + \frac{1}{256\pi^2} \int_{E_1} \frac{e^{-2V \mu r}}{r^2} \xi_i^2 \xi_j^2 d\xi = i_1 + i_2 + i_3.
\end{aligned}$$

Переходя к сферическим координатам, находим

$$i_1 = \frac{\delta_{ij}}{256\pi} \mu^{-3/2}; \quad i_2 = -\frac{\delta_{ij}}{256\pi} \mu^{-3/2}; \quad i_3 = \frac{3}{1280\pi} \mu^{-3/2}.$$

Итак, для I_1 справедлива оценка

$$I_1 = O(\mu^{-1/2}). \quad (3.6)$$

Значительное отличие по сравнению с предыдущими получается при оценке I_2 .

Положим

$$\begin{aligned}
& \int_{E_1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi = \\
& = \left(\int_{r < 1} + \int_{r > 1} \right) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi.
\end{aligned}$$

Поэтому, в силу элементарного неравенства $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ отсюда получим

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{E_1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi \right]^2 \leq \\
& \leq 2 \left\{ \int_{r < 1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi \right\}^2 + \\
& + 2 \left\{ \int_{r > 1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi \right\}^2.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
I_2 & \leq 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^0} \left[\int_{r < 1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi \right]^2 + \\
& + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^0} \left[\int_{r > 1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi \right]^2 = I_2' + I_2''
\end{aligned}$$

Интегрируя второй интеграл последнего неравенства по частям, получим

$$-\int_{r=1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} q(\xi) \psi_n(\xi) d\xi + \int_{r>1} q(\xi) \psi_n(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial \xi_l} d\xi = i_1 + i_2.$$

Поэтому

$$I_3 \leq 2(i_1^2 + i_2^2).$$

Далее,

$$\begin{aligned} i_1^2 &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} q(\xi) \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g(x, x+\alpha r; \mu)}{\partial x_j} q(x+\alpha r) \frac{\partial g(x, x+\beta r; \mu)}{\partial x_j} \right. \\ &\quad \left. q(x+\beta r) \frac{\psi_n(x+\alpha r) \psi_n(x+\beta r)}{(\lambda_n + \mu)^2} d\alpha d\beta \right) = O(\mu^{-4}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Аналогично оценивается i_2^2 . Для нее получаем такую же оценку

$$i_2^2 = O(\mu^{-4}). \quad (3.8)$$

Комбинируя (3.7) и (3.8) для I_3 получим оценку

$$I_3 = O(\mu^{-4}). \quad (3.9)$$

Теперь оценим I_3 . Мы имеем

$$\begin{aligned} I_3 &\leq 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^6} \left[\left[\int_{r=1} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \psi_n(\xi)}{\partial \xi_l} d\xi \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_{r=1} \psi_n(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi_l} d\xi \right]^2 \right] = i_1 + i_2. \end{aligned}$$

Так как, по предположению, функция $q(x)$ дифференцируема, то i_1^2 оценивается так, как в параграфе 1 при получении оценки (1.7). Итак, для i_2 получим оценку

$$i_2 = O(\mu^{-4}). \quad (3.10)$$

Остается оценить i_1 . Мы имеем

$$i_1 = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left(\int_0^1 r^2 dr \int_0^1 r_1^2 dr_1 \int_{-\infty}^{\infty} q(x+\alpha r) q(x+\beta r_1) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + r_1 \beta) + \frac{\partial g(x, x + rz; \mu)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x, x + r_1 \beta; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \psi_n(x + rz)}{\partial \tilde{z}_i} \cdot \\
& \cdot \frac{\partial \psi_n(x + r_1 \beta)}{\partial \tilde{z}_i} d\tilde{z} d\tilde{\beta} \Bigg) \leq \frac{C}{\mu^2} \int_0^1 r^2 dr \int_0^1 r_1^2 dr_1 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial g(x + rz)}{\partial x_j} \cdot \\
& \cdot \frac{\partial g(x + r_1 \beta)}{\partial x_j} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \cdot \frac{\partial \psi_n(x + rz)}{\partial \tilde{z}_i} \cdot \frac{\partial \psi_n(x + r_1 \beta)}{\partial \tilde{z}_i} d\tilde{z} d\tilde{\beta}. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

В силу неравенства Бесселя и на основании оценки (2.4) получим

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \cdot \frac{\partial \psi_n(x + rz)}{\partial \tilde{z}_i} \cdot \frac{\partial \psi_n(x + r_1 \beta)}{\partial \tilde{z}_i} \right| \leq \\
& \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{\left[\frac{\partial \psi_n(x + rz)}{\partial \tilde{z}_i} \right]^2}{(\lambda_n + \mu)^4} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=1}^N \frac{\left[\frac{\partial \psi_n(x + r_1 \beta)}{\partial \tilde{z}_i} \right]^2}{(\lambda_n + \mu)^4} \right)^{1/2} < C \mu^{-3}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Далее, мы имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(x, \tilde{z}; \mu)}{\partial x_j} &= -\frac{(x_j - \tilde{z}_j)}{4\pi r^3} e^{-\sqrt{\mu} r} - \frac{\sqrt{\mu} e^{-\sqrt{\mu} r} (x_j - \tilde{z}_j)}{4\pi r^2} = \\
&= O(r^{-2}) + O\left(\frac{\sqrt{\mu}}{r} e^{-\sqrt{\mu} r}\right).
\end{aligned}$$

Поэтому из (3.11) в силу оценки (3.12) следует оценка

$$I_1 \leq \frac{C}{\mu^{3/2}} + \frac{C}{\mu^{3/2}} \left(\int_0^1 r e^{-\sqrt{\mu} r} dr \right)^2 = O(\mu^{-3/2}). \quad (3.13)$$

Из (3.10) и (3.13) для I_3 окончательно следует оценка

$$I_3 = O(\mu^{-3/2}). \quad (3.14)$$

Итак, для J_3 в силу оценок (3.9) и (3.14) получим оценку

$$I_3 = O(\mu^{-3/2}). \quad (3.15)$$

Комбинируя оценки (3.2), (3.4), (3.6) и (3.15) получим оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^6} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_j} \right]^2 < C \mu^{-3}.$$

Откуда пока для вторых производных получим грубую оценку, а именно:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_n, p+1} \left[\frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 < C \mu^2. \quad (3.16)$$

В дальнейшем мы увидим, что на самом деле в оценке (3.16) можно 7 заменить на 6.

§ 4. Доказательство теоремы для вторых производных

Поступая с тождеством (B) так же, как с тождеством (A) в начале предыдущего параграфа, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 G(x, \tau; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} &= \frac{\partial^4 g(x, \tau; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} - \int_{E_1} q(\xi) \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} G(\xi, \tau; \mu) d\xi - \\ &- 2 \int_{E_1} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu} \cdot \frac{\partial G(\xi, \tau; \mu)}{\partial \mu} d\xi - \int_{E_1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \cdot \\ &\cdot \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left[q(\xi) \frac{\partial^2 G(\xi, \tau; \mu)}{\partial \mu^2} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из определения функции $G(x, y; \mu)$, тождества (4.1) и неравенства Минковского следует неравенство:

$$\begin{aligned} \left(\int_{E_1} \left[\frac{\partial^4 G(x, \tau; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} \right]^2 d\tau \right)^{1/2} &= 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_{E_1} \left[\frac{\partial^4 g(x, \tau; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} \right]^2 d\tau \right)^{1/2} + \left(\int_{E_1} \left[\int_{E_1} q(\xi) \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} G(\xi, \tau; \mu) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} + \\ &+ 2 \left(\int_{E_1} \left[\int_{E_1} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu} \cdot \frac{\partial G(\xi, \tau; \mu)}{\partial \mu} d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{E_1} \left[\int_{E_1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left[q(\xi) \frac{\partial^2 G(\xi, \tau; \mu)}{\partial \mu^2} \right] d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Далее будем оценивать отдельные слагаемые. В силу оценки (3.6)

$$I_1 = O(\mu^{-1}). \quad (4.3)$$

Далее, в силу определения функции $G(x, y; \mu)$, получим

$$I_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\int_{E_1} q(\xi) \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} \varphi_n(\xi) d\xi \right]^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда в силу оценки (3.2), получим

$$I_2 = O(\mu^{-1}). \quad (4.4)$$

Аналогичным образом из оценок (3.4) и (3.15) получим

$$I_2 = O(\mu^{-1}); \quad I_4 = O(\mu^{-1}). \quad (4.5)$$

Окончательно из неравенства (4.2) и оценок (4.3), (4.4) и (4.5) получим оценку

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^6} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 \right)^{1/2} \leq C \mu^{-1} + O(\mu^{-3/2}). \quad (4.6)$$

Так как в тождестве (B) функции $G(x, y; \mu)$ и $g(x, y; \mu)$ можно переставить местами, то из оценки (4.6) получим

$$C \mu^{-1} \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^6} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 \right)^{1/2} + O(\mu^{-3/2}). \quad (4.7)$$

Из оценок (4.6) и (4.7) следует важная оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^6} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 = C \mu^{-3} + O(\mu^{-3}), \quad \left(C = \frac{3}{1280\pi} \right). \quad (4.8)$$

Из этого асимптотического равенства и тауберовой теоремы Харди — Литльвуда следует

$$\sum_{\lambda_n < \mu} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 = C \mu^{-3} + O(\mu^3). \quad (4.9)$$

Отсюда получим оценку, которая уже уточняет оценку (3.16), а именно

$$\sum_{\mu < \lambda_n < \mu+1} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 = o(\mu^7), \quad (\mu^2 = \lambda_n).$$

Для дальнейшего уточнения, как в параграфе 2, применим теорему Г. Фрайда об оценке остаточного члена в тауберовых теоремах [2]—[4]. Тогда из оценки (4.9) получим

$$\sum_{\mu < \lambda_n < \mu+1} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 = O(\mu^6),$$

что и доказывает теорему для вторых производных.

Для старших производных теорема доказывается аналогичным образом.

В том случае, когда при $|x| \rightarrow \infty$ $q(x)$ не стремится к бесконечности поступаем следующим образом: берем большую область Ω и полагаем $q_1(x) = q(x)$ для $x \in \Omega$ и $q_1(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Тогда для $q_1(x)$ спектр дискретен и если Ω стремится ко всему пространству, то дискретный спектр вырождается в непрерывный и теорема остается в силе.

Военная инженерная артиллерийская
академия им. Ф. Э. Дзержинского,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступило 20 VI 1957.

Բ. Մ. Լևիտան, Ի. Ս. Սարգսյան

ՇՐԵԴԻՆԳԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱԾԱՆՅՅԱԼՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիցուք $q(x) = q(x_1, x_2, x_3)$ ֆունկցիան որովայն է մարդկ հաստատարածության մեջ և ներքինյ սահմանափակ է: Դիտարկենք հետևյալ համարումը՝

$$\Delta u + (\lambda - q(x))u = 0. \quad (1)$$

Ենթադրենք $q(x) \rightarrow +\infty$ երբ $|x| \rightarrow \infty$: Ինչպես հայտնի է, այդ դեպքում (1) համարումը, դիտարկվելով մարդկ տարածության մեջ, ունի զուտ կետային սպեկտր: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ -ով նշանակենք (1) համարման սեփական արժեքները, իսկ $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$ -ով՝ (1) համարման սեփական ֆունկցիաները:

Հոդվածում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմներ:

Թեորեմ. եթե x կետում $q(x)$ ֆունկցիան ունի $(z-1)$ -րդ կարգի ածանցյալ, ապա, երբ $\lambda \rightarrow \infty$, տեղի ունի հետևյալ ասիմպտոտիկ գնահատականը՝

$$\sum_{\mu < \mu_n < \mu+1} |D_x^z \psi_n(x)| = O(\mu^{2z+2}),$$

որտեղ $\mu_n^2 = \lambda_n$, իսկ $D_x^z = \frac{\partial^z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}$, $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = z)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. E. C. Titchmarsh — Eigenfunction expansions associated with partial differential equations (III), Proc. London Math. Soc. (3), 3 (1953).
- [2]—[4]. G. Freud — Resiglid eines Tauberschen Satzes, I, II, III, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 2 (1951); 3(1952); 5(1954).