ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 4, 1957 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Г. С. Григорян

К расчету безмоментных тонких железобетонных оболочек произвольного очертания с учетом ползучести бетона

В настоящей работе рассматривается вопрос о перераспределении усилий между бетоном и арматурными стержнями в железобетонных тонких безмоментных оболочках вследствие ползучести бетона и о его влиянии на перемещения и деформации срединной поверхности оболочки, в предположении, что распределение усилий в соответствующих упругих оболочках известно. Работа основывается на известной теории ползучести бетона, разработанной Н. Х. Арутюняном [1], и предпосылках теории упругих тонких бозмоментных оболочек [2—5]. Задача об определении напряжений сводится к интегрированию двух самостоятельных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно первых производных по времени от напряжений в бетоне. В общем случае эти уравнения — однородные, полные, с переменными коэффициентами. Доказывается возможность представить их решения сходящимися степенными рядами.

В частном случае, когда оболочки армированы сетками с одинаковым относительным содержанием арматуры в обоих направлениях ($\mu_1 = \mu_2$), задача сводится к интегрированию двух самостоятельных обыкновенных уравнений первого порядка. Вычислены функции влияния показывающие изменение напряжений в арматуре и бетоне сферической и параболической оболочек находящихся под воздействием вертикальной равномерно-распределенной нагрузки (собственный вес) при коэффициенте Пуассона $\nu = 0{,}25$ и $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}5\%$. При $\nu = 0$ функции влияния для напряжений в бетоне и арматуре, как и следовало ожидать, совпадают с таковыми полученными Н. Х. Арутюняном для железобетонных стоек при осевом сжатии (растяжении).

В конце вкратце рассмотрен также вопрос об определении влияния ползучести на перемещения и деформации срединной поверхности оболочки.

Влияние ползучести на напряженно-деформироранное состояние железобетонных оболочек с учетом неоднородности материала (бетон-сталь) рассматривается в настоящей работе, повидимому, впервые.

И. Е. Прокоповичем [6], на основе полубезмоментной теории цилиндрических оболочек В. З. Власова, рассмотрено влияние ползучести материала на распределение внутренних усилий в ортотропных оболочках, к которым, при определенных предположениях, могут быть отнесены и железобетонные оболочки.

1. Рассмотрим железобетонные тонкие оболочки произвольного очертания, постоянной толщины, армированные одной сеткой расположенной в срединной поверхности оболочки, или двумя сетками равноотстоящими от нее. Стержни арматурных сеток будем считать работающими только на растяжение и сжатие и направленными вдоль линий главных кривизн поверхностей в коих они расположены. Будем считать справедливой гипотезу о неизменяемости нормального элемента и допустимой предположение о безмоментной работе оболочки [2—5]. Арматуру будем считать подчиняющейся закону Гука, а бетон—обладающей ползучестью. Примем также, что параметры характеризующие ползучесть бетона не зависят от знака напряжений. Сцепление между арматурой и бетоном будем считать достаточным для обеспечения их совместной работы.

Компоненты напряжений в бетоне и арматуре, а также деформаций и перемещений оболочки, под воздействием не меняющейся во времени внешней нагрузки, будут функциями не только координат точек срединной поверхности, как это имеет место в упругих оболочках, но также возраста бетона в момент приложения внешней нагрузки и продолжительности действия последней.

За начало отсчета времени примем некоторый момент укладки бетона. Возраст бетона будем определять координатой τ, а момент времени для которого определяются напряжения и деформации—координатой t.

Придерживаясь теории ползучести бетона изложенной в работе [1] будем считать, что мера ползучести призматического бетонного бруса находящегося под воздействием осевой силы единичной интенсивности, приложенной в некотором возрасте τ, к моменту t выражается зависимостью:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right], \tag{1.1}$$

где

$$\varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0, \tag{1.2}$$

A_1, C_0, γ — параметры определяемые экспериментальным путем. Влияние старения бетона не будем принимать во внимание.

2. Как известно, безмоментные оболочки статически определимы в малом. Поэтому дифференциальные уравнения равновесия рассматриваемых оболочек не будут ничем отличаться от таковых для упругих безмоментных оболочек и, при отнесении срединной поверхности к линиям главных кривизн, будут иметь следующий известный вид [2—5]:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1)+\frac{\partial A}{\partial\beta}S+\frac{\partial}{\partial\beta}(AS)-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+ABq_1=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(AT_2)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}S+\frac{\partial}{\partial\alpha}(BS)-\frac{\partial A}{\partial\beta}T_1+ABq_2=0; \tag{2.1}$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}=q_n,$$

где: α, β и A, B — соответственно, криволинейные координаты точек и коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности;

T_1, T_2, S — нормальные и тангенциальные усилия отнесенные к единице длины дуги, соответственно, линий главных кривизн $\alpha=\text{const}$ и $\beta=\text{const}$ срединной поверхности;

R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности;

q_1, q_2, q_n — проекции поверхностной нагрузки соответственно на касательную к линии $\alpha=\text{const}$, на касательную к линии $\beta=\text{const}$ и на нормаль к срединной поверхности.

В тех случаях, когда свободные члены q_1, q_2, q_n и граничные условия системы (2.1) не являются функциями от времени, тогда и усилия T_1, T_2, S не будут функциями от времени, и будем иметь

$$\begin{aligned} T_1&=T_1(\alpha,\beta);\\ T_2&=T_2(\alpha,\beta);\\ S&=S(\alpha,\beta). \end{aligned} \tag{2.2}$$

При этом, T_1, T_2, S определяются решением соответствующей упруго-мгновенной задачи.

Приняв, что оболочка загружается в возрасте бетона $\tau=\tau_1$ и введя обозначения:

h — толщина оболочки:

$$\sigma_{a_1}(\tau_1,t,\alpha,\beta),\quad \sigma_{\delta_1}(\tau_1,t,\alpha,\beta),\quad \sigma_{a_2}(\tau_1,t,\alpha,\beta),$$
$$\sigma_{\delta_2}(\tau_1,t,\alpha,\beta),\quad \tau_{\delta_1}(\tau_1,t,\alpha,\beta)=\tau_{\delta_2}(\tau_1,t,\alpha,\beta),$$

соответственно,— нормальные напряжения в арматуре и бетоне и касательные напряжения в бетоне; μ_1, μ_2 — относительные содержания арматуры в сечениях $\alpha=\text{const}$ и $\beta=\text{const}$, можем написать следующие очевидные равенства

$$\begin{aligned} \mu_1 h\sigma_{a_1}+h\sigma_{\delta_1}&=T_1{}^*,\\ \mu_2 h\sigma_{a_2}+h\sigma_{\delta_2}&=T_2,\\ h\tau_{\delta}&=S. \end{aligned} \tag{2.3}$$

3. Обозначив компоненты деформаций бетона, с учетом ползучести бетона, в общем случае объемного напряженного состояния через ε_1, ε_2, ε_3, ω_{12}, ω_{13}, ω_{23}, пользуясь известными зависимостями свя-

* Здесь и в последующем, ради упрощения записи, аргументы, частично, или полностью, опускаем.

зывающими их с компонентами напряжений (см. [1], стр. 19), считая справедливыми приближенные равенства:

$$\varepsilon_3 = 0; \quad \omega_{13} = 0; \quad \omega_{23} = 0, \tag{3.1}$$

пренебрегая влиянием σ_z на ε_1 и ε_2, в соответствии с принятой гипотезой о недеформируемости нормального элемента оболочки, получаем следующие зависимости между остальными компонентами деформаций и напряжениями в бетоне:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 = \frac{1}{E_б}(\sigma_{б_1} - \nu\sigma_{б_2}) - \int\limits_{\tau_1}^{t}[\sigma_{б_1}(\tau) - \nu\sigma_{б_2}(\tau)]\frac{\partial C}{\partial \tau}d\tau; \\
\varepsilon_2 = \frac{1}{E_б}(\sigma_{б_2} - \nu\sigma_{б_1}) - \int\limits_{\tau_1}^{t}[\sigma_{б_2}(\tau) - \nu\sigma_{б_1}(\tau)]\frac{\partial C}{\partial \tau}d\tau; \\
\omega_{12} = \omega = 2(1+\nu)\tau_б\left[\frac{1}{E_б} - \int\limits_{\tau_1}^{t}\frac{\partial C}{\partial \tau}d\tau\right].
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Из сказанного выше следует, что, если имеет место (2.2), то касательные напряжения в бетоне не будут претерпевать изменений во времени. В настоящей работе будем органичиваться рассмотрением этого случая, что и учтено в третьем уравнении (3.2).

Используя обычные соотношения упругости при осевом растяжении-сжатии для арматурных стержней:

$$\varepsilon_{ak} = \frac{\sigma_{ak}}{E_a} \quad (k = 1, 2), \tag{3.3}$$

принимая, из условия совместной работы арматуры и бетона

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{ak} = \varepsilon_{бk} \quad (k = 1, 2), \tag{3.4}$$

используя первые два ур-ния (2.3) и (3.2), и введя обозначение

$$\frac{E_a}{E_б} = m, \tag{3.5}$$

можем написать:

$$\begin{gathered}
T_1 - h(1 + \mu_1 m)\sigma_{б_1} + \nu\mu_1 hm\sigma_{б_2} + \mu_1 hE_a\int\limits_{\tau_1}^{t}[\sigma_{б_1}(\tau) - \nu\sigma_{б_2}(\tau)]\frac{\partial C}{\partial \tau}d\tau = 0; \\
T_2 - h(1 + \mu_2 m)\sigma_{б_2} + \nu\mu_2 hm\sigma_{б_1} + \mu_2 hE_a\int\limits_{\tau_1}^{t}[\sigma_{б_2}(\tau) - \nu\sigma_{б_1}(\tau)]\frac{\partial C}{\partial \tau}d\tau = 0.
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Дифференцируя (3.6) по t с учетом (1.1) получаем:

$$
\begin{aligned}
&-h(1+\mu_1 m)\sigma'_{б_1}+\nu\mu_1 hm\sigma'_{б_2}-\gamma\mu_1 hE_a\varphi(\sigma_{б_1}-\nu\sigma_{б_2})+\\
&+\gamma\mu_1 hE_a\int_{\tau_1}^{t}[\sigma_{б_1}(\tau)-\nu\sigma_{б_2}(\tau)][\varphi'(\tau)+\gamma\varphi(\tau)]\,e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau=0;\\
&-h(1+\mu_2 m)\sigma'_{б_2}+\nu\mu_2 hm\sigma'_{б_1}-\gamma\mu_2 hE_a\varphi(\sigma_{б_2}-\nu\sigma_{б_1})+\\
&+\gamma\mu_2 hE_a\int_{\tau_1}^{t}[\sigma_{б_2}(\tau)-\nu\sigma_{б_1}(\tau)][\varphi'(\tau)+\gamma\varphi(\tau)]\,e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau=0.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Умножая (3.6) на γ, складывая с (3.7), дифференцируя еще раз по t и внеся обозначения:

$$
\begin{aligned}
&h(1+\mu_1 m)=a_1; \qquad h(1+\mu_2 m)=a_2;\\
&\nu\mu_1 hm=b_1; \qquad \nu\mu_2 mh=b_2;\\
&\mu_1 hE_a=c_1; \qquad \mu_2 hE_a=c_2;\\
&\frac{\partial\sigma_{б_1}}{\partial t}=y; \qquad \frac{\partial\sigma_{б_2}}{\partial t}=z,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

получаем:

$$
\begin{aligned}
&b_1\frac{\partial z}{\partial t}+\gamma(b_1+\nu c_1\varphi)z-\gamma(a_1+c_1\varphi)y-a_1\frac{\partial y}{\partial t}=0;\\
&b_2\frac{\partial y}{\partial t}+\gamma(b_2+\nu c_2\varphi)y-\gamma(a_2+c_2\varphi)z-a_2\frac{\partial z}{\partial t}=0.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Систему (3.9) не трудно привести к виду:

$$
\begin{aligned}
&\left(b_2-\frac{a_1a_2}{b_1}\right)\frac{\partial y}{\partial t}+\gamma\left[(b_2+\nu c_2\varphi)-(a_1+c_1\varphi)\frac{a_2}{b_1}\right]y+\\
&\qquad+\gamma\left[\frac{a_2}{b_1}(b_1+\nu c_1\varphi)-(a_2+c_2\varphi)\right]z=0;\\
&\left(b_1-\frac{a_1a_2}{b_2}\right)\frac{\partial z}{\partial t}+\gamma\left[(b_1+\nu c_1\varphi)-(a_2+c_2\varphi)\frac{a_1}{b_2}\right]z+\\
&\qquad+\gamma\left[\frac{a_1}{b_2}(b_2+\nu c_2\varphi)-(a_1+c_1\varphi)\right]y=0.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Учитывая (1.2) и введя обозначения:

$$
\frac{\gamma}{b_2-\dfrac{a_1a_2}{b_1}}\left[(a_1+c_1C_0)\frac{a_2}{b_1}-(b_2+\nu c_2C_0)\right]=p_1;
$$

$$\frac{\gamma A_1}{b_2-\frac{a_1a_2}{b_1}}\left(c_1\frac{a_2}{b_1}-\nu c_2\right)=q_1;$$

$$\frac{\gamma}{b_2-\frac{a_1a_2}{b_1}}\left[a_2+C_0c_2-(b_1+\nu C_0c_1)\frac{a_2}{b_1}\right]=m_1;$$

$$\frac{\gamma A_1}{b_2-\frac{a_1a_2}{b_1}}\left(c_2-\frac{\nu C_0a_2}{b_1}\right)=n_1;$$

$$\frac{\gamma}{b_1-\frac{a_1a_2}{b_2}}\left[(a_2+c_2C_0)\frac{a_1}{b_2}-(b_1+\nu c_1C_0)\right]=p_2;$$

$$\frac{\gamma A_1}{b_1-\frac{a_1a_2}{b_2}}\left(\frac{c_2a_1}{b_2}-\nu c_1\right)=q_2;$$

$$\frac{\gamma}{b_1-\frac{a_1a_2}{b_2}}\left[a_1+c_1C_0-(b_2+\nu c_2C_0)\frac{a_1}{b_2}\right]=m_2;$$

$$\frac{\gamma A_1}{b_1-\frac{a_1a_2}{b_2}}\left(c_1-\frac{\nu a_1c_2}{b_2}\right)=n_2,$$

перепишем (3.10) в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t}-\left(p_1+\frac{q_1}{t}\right)y&=\left(m_1+\frac{n_1}{t}\right)z;\\ \frac{\partial z}{\partial t}-\left(p_2+\frac{q_2}{t}\right)z&=\left(m_2+\frac{n_2}{t}\right)y,\end{aligned}\tag{3.12}$$

где p_k, q_k, m_k, n_k $(k=1, 2)$, как это видно из (3.11), не зависят от t.

Система (3.12) легко приводится к следующим двум самостоятельным дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+M_1(t)\frac{\partial y}{\partial t}+N_1(t)y=0,\\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+M_2(t)\frac{\partial z}{\partial t}+N_2(t)z=0.\end{aligned}\tag{3.13}$$

В виду полной идентичности этих ур-ний займемся первым из них.

Переменные коэффициенты его имеют следующий вид:

$$M_1(t)=-\left[\left(p_1+\frac{q_1}{t}\right)+\frac{\left(m_1+\frac{n_1}{t}\right)\left(p_2+\frac{q_2}{t^2}\right)-\frac{n_1}{t^2}}{m_1+\frac{n_1}{t}}\right]=$$

$$=-(p_1+p_2)-\frac{q_1+q_2}{t}+\frac{n_1}{m_1t^2}\,\frac{1}{1+\frac{n_1}{m_1t}}; \tag{3.14}$$

$$N_1(t)=\frac{p_1+\frac{q_1}{t}}{m_1+\frac{n_1}{t}}\left[\left(m_1+\frac{n_1}{t}\right)\left(p_2+\frac{q_2}{t}\right)-\frac{n_1}{t}\right]+$$

$$+\left[\frac{q_1}{t^2}-\left(m_1+\frac{n_1}{t}\right)\left(m_2+\frac{n_2}{t}\right)\right]=$$

$$=(p_1p_2-m_1m_2)+(p_1q_2+q_1p_2-m_1n_2-n_1m_2)\frac{1}{t}+$$

$$+\left(q_1q_2-n_1n_2-\frac{n_1p_1}{m_1}\right)\frac{1}{t^2}+$$

$$+\left(\frac{p_1n_1}{m_1}-q_1\right)\frac{n_1}{m_1t^3}-\left(\frac{p_1n_1}{m_1}-q_1\right)\frac{n_1^2}{m_1^2t^4}+\cdots$$

Введя новую независимую переменную подстановкой

$$x=\frac{1}{t}, \tag{3.15}$$

будем иметь

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-x^2\frac{\partial y}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=x^4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2x^3\frac{dy}{dx}. \tag{3.16}$$

Используя (3.14)—(3.16) перепишем первое из ур-ний (3.13) в следующем виде:

$$x^4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x\Big[(p_1+p_2)x+(q_1+q_2-2)x^2-$$

$$-\left(\frac{n_1}{m_1}\right)x^3+\left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2x^4-\left(\frac{n_1}{m_1}\right)^3x^5+\cdots\Big]\frac{\partial y}{\partial x}+$$

$$+\Big[(p_1p_2-m_1m_2)+(p_1q_2-q_1p_2-m_1n_2-n_1m_2)x+$$

$$+\left(q_1q_2-n_1n_2-\frac{n_1p_1}{m_1}\right)x^2+$$

$$+\left(\frac{p_1 n_1}{m_1}-q_1\right)\frac{n_1}{m_1}x^3-\left(\frac{p_1 n_1}{m_1}-q_1\right)\frac{n_1^2}{m_1^2}x^4+\cdots\Big]y=0. \tag{3.17}$$

Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1+\frac{n_1}{m_1}x}=1-\frac{n_1}{m_1}x+\left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2x^2-\cdots \tag{3.18}$$

$$\left(0<x=\frac{1}{\tau_1}\right)$$

Из (3.11) имеем:

$$\frac{n_1}{m_1}=\frac{A_1}{C_0}. \tag{3.19}$$

Для обычных бетонов марок 50—150, $\frac{A_1}{C_0}\approx 5{,}5$ (см. [1], стр. 70). Для бетонов более высоких марок, обычно применяемых в оболочках, это отношение, как не трудно сообразить, еще меньше. Оболочки не распалубливаются в такие ранние сроки, как 5—6 дней, т. е.

$$\frac{A_1}{C_0}<\tau_1 \tag{3.20}$$

Из (3.20) следует сходимость ряда (3.18), следовательно и выражений содержащихся в квадратных скобках в (3.17), что в свою очередь означает возможность представить решение (3.17), следовательно и (3.13) сходящимися степенными рядами (см., например, [7], стр. 139, где даны доказательство этого и метод определения коэффициентов ряда). Интегрируя полученные решения для y и z от τ_1 до t, в соответствии с (3.8), можем определить значения $\sigma_{бk}$ $(k=1, 2)$, которые не трудно представить в виде

$$\sigma_{бk}=\overset{\circ}{\sigma}_{бk}\cdot H_{бk} \quad (k=1, 2), \tag{3.21}$$

где $\overset{\circ}{\sigma}_{бk}$ — напряжения в бетоне при $t=\tau_1$ — определяемые решением соответствующей упругой задачи; $H_{бk}=H_{бk}(\alpha, \beta, \tau_1, t)$ $(k=1, 2)$ — функции влияния показывающие закон изменения напряжений в бетоне рассматриваемых оболочек вследствие ползучести бетона.

Для напряжений в арматуре получаются следующие очевидные формулы:

$$\sigma_{ak}=\overset{\circ}{\sigma}_{ak}\cdot H_{ak} \quad (k=1, 2), \tag{3.22}$$

где

$$H_{ak}=H_{ak}(\tau_1, t, \alpha, \beta)=\frac{1+\mu_k m-H_{бk}}{\mu_k m} \quad (k=1, 2). \tag{3.23}$$

4. При

$$\mu_1=\mu_2=\mu \tag{4.1}$$

достигается существенное упрощение. Взамен (3.9) будем иметь:

$$bz' + \gamma (b + \nu c\varphi) z - \gamma (a + c\varphi) y - ay' = 0;$$
$$by' + \gamma (b + \nu c\varphi) y - \gamma (a + c\varphi) z - az' = 0, \tag{4.2}$$

где

$$a = h(1 + \mu m); \; b = \nu\mu mh; \; c = \mu hEa. \tag{4.3}$$

Перепишем (4.2) в следующем виде:

$$(b + a) u' + \gamma [a + b + c\varphi (1 + \nu)] u = 0;$$
$$(b - a) w' + \gamma [b - a - c\varphi (1 - \nu)] w = 0, \tag{4.4}$$

где

$$u = y - z;$$
$$w = y + z. \tag{4.5}$$

Откуда

$$u = u^\circ e^{-\gamma \int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{a + b + c\varphi (1 + \nu)}{a + b} d\tau};$$
$$w = w^\circ e^{\gamma \int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{b - a - c\varphi (1 - \nu)}{a - b} d\tau} \tag{4.6}$$

Следовательно:

$$y = \frac{1}{2}\left[u^\circ e^{-\gamma \int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{a + b + c\varphi (1 + \nu)}{a + b} d\tau} + w^\circ e^{-\gamma \int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{b - a - c\varphi (1 - \nu)}{a + b} d\tau}\right];$$
$$z = \frac{1}{2}\left[-u^\circ e^{-\gamma \int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{a + b + c\varphi (1 - \nu)}{a - b} d\tau} + w^\circ e^{-\gamma \int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{b - a - c\varphi (1 - \nu)}{b - a} d\tau}\right]. \tag{4.7}$$

Интегрируя (4.7) от τ_1 до t, учитывая (1.2) и (4.5) получаем:

$$\sigma_{б_1}(t) = \sigma^{н}_{б_1} + \frac{1}{2}\left[(y^\circ - z^\circ)\int\limits_{\tau_1}^{t} e^{a_1(\tau_1 - \tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_2} d\tau + (y^\circ + z^\circ)\int\limits_{\tau_1}^{t} e^{a_3(\tau_1 - \tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_4} d\tau\right];$$
$$\sigma_{б_2}(t) = \sigma^{н}_{б_2} + \frac{1}{2}\left[-(y^\circ - z^\circ)\int\limits_{\tau_1}^{t} e^{a_1(\tau_1 - \tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_2} d\tau + (y^\circ + z^\circ)\int\limits_{\tau_1}^{t} e^{a_3(\tau_1 - \tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_4} d\tau\right]. \tag{4.8}$$

где

$$a_1=\gamma\left[1+\frac{\mu E_a C_0(1+\nu)}{1+\mu m(1+\nu)}\right];\quad a_2=\frac{\mu E_a A_1(1+\nu)\gamma}{1+\mu m(1+\nu)};$$
$$a_3=\gamma\left[1+\frac{\mu E_a C_0(1+\nu)}{1+\mu m(1-\nu)}\right];\quad a_4=\frac{\mu E_a A_1(1+\nu)\gamma}{1+\mu m(1-\nu)}. \tag{4.9}$$

Подставляя (4.1) в (3.7), учитывая (3.8), принимая $t=\tau_1$ и отбросив некоторые малые величины, получаем:

$$y^{\circ}=\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1+2\mu m}\left[\nu\sigma^{\circ}_{б_2}-(1+\mu m)\sigma^{\circ}_{б_1}\right];$$
$$z^{\circ}=\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1+2\mu m}\left[\nu\sigma^{\circ}_{б_1}-(1+\mu m)\sigma^{\circ}_{б_2}\right]. \tag{4.10}$$

Подставляя (4.10) в (4.8) получаем следующие выражения для напряжений в бетоне с учетом ползучести:

$$\sigma_{б_1}=\sigma^{\circ}_{б_1}\left\{1-\frac{1}{2}\,\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1+2\mu m}\left[(1+\mu m+\nu)\left(1-\frac{\sigma^{\circ}_{б_2}}{\sigma^{\circ}_{б_1}}\right)J_1+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(1+\mu m-\nu)\left(1+\frac{\sigma^{\circ}_{б_2}}{\sigma^{\circ}_{б_1}}\right)J_2\right]\right\};$$

$$\sigma_{б_2}=\sigma^{\circ}_{б_2}\left\{1-\frac{1}{2}\,\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1+2\mu m}\left[(1+\mu m+\nu)\left(1-\frac{\sigma^{\circ}_{б_1}}{\sigma^{\circ}_{б_2}}\right)J_1+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(1+\mu m-\nu)\left(1+\frac{\sigma^{\circ}_{б_1}}{\sigma^{\circ}_{б_2}}\right)J_2\right]\right\},$$

где

$$J_1=\int_{\tau_1}^{t}e^{a_1(\tau_1-\tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_2}d\tau=e^{a_1\tau_1}\,\tau_1^{a_2}\,a_1^{-(1-a_2)}\left[\Phi(a_1t,a_2)-\Phi(a_1\tau_1,a_2)\right];$$
$$J_2=\int_{\tau_1}^{t}e^{a_3(\tau_1-\tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_4}d\tau=e^{a_3\tau_1}\,\tau_1^{a_4}\,a_3^{-(1-a_4)}\left[\Phi(a_3t,a_4)-\Phi(a_3\tau_1,a_4)\right]. \tag{4.12}$$

а функция

$$\Phi(\xi,p)=\int_0^{\xi}e^{-\tau}\tau^{-p}\,d\tau \tag{4.13}$$

выражается известными табулированными функциями. Она рассмотрена и табулирована в работе [1].

Введя обозначения

$$
\begin{gathered}
1-\frac{1}{2}\,\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1-2\mu m}\left[(1+\mu m+\nu)\left(1-\frac{\sigma^{\circ}_{б_2}}{\sigma^{\circ}_{б_1}}\right)J_1+\right.\\
\left.+(1+\mu m-\nu)\left(1+\frac{\sigma^{\circ}_{б_2}}{\sigma^{\circ}_{б_1}}\right)J_2\right]=H_{б_1};\\
1-\frac{1}{2}\,\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1-2\mu m}\left[(1+\mu m+\nu)\left(1-\frac{\sigma^{\circ}_{б_1}}{\sigma^{\circ}_{б_2}}\right)J_1+\right.\\
\left.+(1+\mu m-\nu)\left(1+\frac{\sigma^{\circ}_{б_1}}{\sigma^{\circ}_{б_2}}\right)J_2\right]=H_{б_2},
\end{gathered}
\tag{4.14}
$$

перепишем (4.11) в виде:

$$
\sigma_{бk}=\sigma^{\circ}_{бk}\cdot H_k \qquad (k=1,2). \tag{4.15}
$$

Напряжения в бетоне соответствующие упругому решению $\sigma^{\circ}_{бk}$ $(k=1,2)$ определяются из (3.6) при $t=\tau_1$ и с учетом (4.1) имеют вид:

$$
\begin{gathered}
\sigma^{\circ}_{б_1}=\frac{T_1(1+\mu m)+T_2\mu\nu m}{h(1+2\mu m)}\\
\sigma^{\circ}_{б_2}=\frac{T_2(1+\mu m)+T_1\mu\nu m}{h(1+2\mu m)},
\end{gathered}
\tag{4.16}
$$

где отброшены некоторые малые величины.

5. При

$$
\nu=0 \tag{5.1}
$$

будем иметь:

$$
\begin{gathered}
a_1=a_3=\gamma\left(1+\frac{\mu E_a C_0}{1+\mu m}\right);\\
a_2=a_4=\frac{\gamma\mu E_a A_1}{1+\mu m};
\end{gathered}
\tag{5.2}
$$

$$
J_1=J_2=J=\int\limits_{\tau_1}^{t}e^{a_1(\tau_1-\tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_2}d\tau.
$$

$$
H_{б_1}=H_{б_2}=H_б=1-\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1+\mu m}J; \tag{5.3}
$$

$$
H_{a_1}=H_{a_2}=H_a. \tag{5.4}
$$

Не трудно заметить, что ф-ла (5.3) полностью совпадает, как это следовало ожидать, с ф-лой полученной в работе [1] для сжатых (растянутых) железобетонных стоек.

В приведенных ниже таблицах даны значения $H_б$ и H_a вычисленные при $\nu = 0$ при различных μ по (5.3), а также $H_{бk}$ и H_{ak} ($k = 1,2$) вычисленные по (4.14) при $\nu = 0,25$ и $\mu = 0,5\%$, для сферической оболочки и параболической оболочки вращения находящихся под воздействием вертикальной равномерно-распределенной нагрузки (собственный вес)*.

При этом приняты следующие численные значения параметров характеризующих свойства ползучести бетона:

$$A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5};\ C_0 = 0,90 \cdot 10^{-5};\ \mu = 0,026. \tag{5.4}$$

В работе [1], откуда они взяты показана их достаточно хорошая согласованность с опытными данными для обычных бетонов марок 50—150 на портландцементе. Принято также $m = 10$.

Таблица 1

Значения $H_б$ и H_a для обычного железобетона в зависимости от времени t и процента армирования μ, при $\tau_1 = 28$ дням

t \ μ	$H_б$				H_a			
	$= 0,5\%$	$= 1,0\%$	$= 1,5\%$	$= 2,0\%$	$= 0,5\%$	$= 1,0\%$	$= 1,5\%$	$= 2,0\%$
28 дней	1	1	1	1	1	1	1	1
1,5 мес.	0,96	0,93	0,91	0,88	1,88	1,65	1,62	1,60
3 мес.	0,87	0,86	0,81	0,76	3,62	2,40	2,28	2,18
6 мес.	0,84	0,84	0,78	0,73	4,10	2,63	2,46	2,33
1 год	0,84	0,83	0,78	0,73	4,12	2,66	2,48	2,34
∞	0,84	0,83	0,78	0,73	4,12	2,66	2,48	2,34

Таблица 2

Значения $H_{бk}$ и H_{ak} ($к = 1, 2$) для сферического железобетонного купола при $\mu = 0,5\%$, $\tau_1 = 28$ дням (см. ф-лы (3.22), (3.23), (4.14), 4.15)) в зависимости от времени t и угла θ образованного нормалью к срединной поверхности с осью оболочки

θ	t (дней)							
	45	90	180	360	45	90	180	360
	Значения $H_{б_1}$				Значения $H_{б_2}$			
0	0,97	0,94	0,93	0,93	0,97	0,94	0,93	0,93
$\frac{\pi}{8}$	0,97	0,93	0,92	0,92	0,97	0,94	0,93	0,93
$\frac{\pi}{4}$	0,97	0,93	0,91	0,91	0,999	0,998	0,995	0,994
$\frac{3\pi}{8}$	0,96	0,92	0,90	0,90	0,95	0,89	0,87	0,87
$\frac{\pi}{2}$	0,96	0,91	0,89	0,89	0,96	0,91	0,89	0,89

* Вычислительная работа результаты которых сведены в табл. 2 и 3 проведена студентами Ереванского политехнического института им. К. Маркса. С. Заргаряном и М. Мартиросяном.

θ	t (дней)							
	45	90	180	360	45	90	180	360
	Значения H_{a_1}				Значения H_{a_2}			
0	1,56	2,20	2,45	2,45	1,56	2,20	2,45	2,45
$\frac{\pi}{8}$	1,59	2,26	2,51	2,54	1,52	2,12	2,33	2,35
$\frac{\pi}{4}$	1,68	2,45	2,72	2,75	1,02	1,15	1,11	1,11
$\frac{3\pi}{8}$	1,78	2,66	2,97	3,00	2,13	3,20	3,60	3,63
$\frac{\pi}{2}$	1,86	2,84	3,17	3,20	1,86	2,83	3,17	3,20

Таблица 3

Значения $H_{бk}$ и H_{ak} ($k = 1, 2$) для параболического железобетонного купола нагруженного собственным весом при $\mu = 0{,}5\%$, $\tau_1 = 28$ дням (см. ф-лы (3.22), (3.23), (4,14), (4.14)), в зависимости от времени t и угла θ образованного нормалью к срединной поверхности с осью оболочки

θ	t (дней)							
	45	90	180	360	45	90	180	360
	Значения $H_{б_1}$				Значения $H_{б_2}$			
0	0,97	0,94	0,93	0,93	0,97	0,94	0,93	0,93
$\frac{\pi}{8}$	0,97	0,94	0,92	0,92	0,97	0,94	0,93	0,93
$\frac{\pi}{4}$	0,97	0,93	0,91	0,91	1,01	1,02	1,02	1,02
$\frac{3\pi}{8}$	0,96	0,91	0,90	0,90	0,95	0,90	0,88	0,88
$\frac{9\pi}{20}$	0,96	0,91	0,89	0,89	0,96	0,91	0,89	0,89
	Значения H_{a_1}				Значения H_{a_2}			
0	1,56	2,20	2,43	2,46	1,56	2,20	2,43	2,46
$\frac{\pi}{8}$	1,59	2,26	2,51	2,54	1,52	2,15	2,33	2,35
$\frac{\pi}{4}$	1,68	2,46	2,74	2,76	0,83	0,66	0,66	0,66
$\frac{3\pi}{8}$	1,80	2,70	3,02	3,05	1,96	3,05	3,42	3,45
$\frac{9\pi}{20}$	1,85	2,81	3,14	3,17	2,87	2,92	3,20	3,23

6. Выпишем известные геометрические соотношения безмоментной теории связывающие компоненты деформации с перемещениями, относя срединную поверхность к линиям главных кривизн:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}v + \frac{w}{R_1};\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial C}{\partial \alpha}u + \frac{w}{R_2};\\
\omega &= \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{B}\right).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Входящие в (6.1) относительные удлинения — ε_1, ε_2 определяются следующими формулами:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma^*_{a_1}}{E_a}H_{a_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma^*_{a_2}}{E_a}H_{a_2}. \tag{6.2}$$

Для определения ω — деформации сдвига срединной поверхности, обратимся к третьему ур-нию (3.2), решение которого, с учетом (1.1) и (1.2) можно представить в виде:

$$\omega = \omega^0 G \tag{6.3}$$

где

$$\omega^0 = \frac{2(1+\nu)}{E_б}\tau_0 \tag{6.4}$$

представляет сдвиг без учета ползучести бетона, а

$$G = G(\tau_1, t) = 1 + E_б\, e^{\gamma\tau_1}\left(\frac{A}{\tau_1} + C_0\right)\left(e^{-\gamma t} - e^{-\gamma\tau_1}\right) \tag{6.5}$$

суть функция влияния показывающая нарастание деформации сдвига во времени вследствие ползучести бетона.

Подставляя (6.2) — (6.5) в (6.1) замечаем, что хотя искомые неизвестные u, v, w — суть функции не только α, β, как это имеет место в упругих оболочках, но и времени t, однако интегрирование системы (6.1) может быть осуществлено также как и в упругих оболочках, так как t может быть рассмотрен как постоянный параметр.

7. После того как определены перемещения u, v, w, не трудно определить также и компоненты изгибной деформации в функции времени и координат α, β по известным формулам [2—5], которые также как и (6.1) не претерпевают изменений вследствие ползучести бетона.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 20 IV 1957

Գ. Ս. Գրիգորյան

ԵՐԿԱԹԲԵՏՈՆԵ ԲԱՐԱԿ ԱՆՄՈՄԵՆՏ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Դիտարկվում է լարումների վերաբաշխումը, որ տեղի է ունենում բետոնի և արմատուրայի միջև, երկաթբետոնե անմոմենտ բարակ թաղանթներում, բետոնի սողքի հետևանքով։ Աշխատությունը հիմնված է բետոնի սողքի Ն. Խ. Հարությունյանի կողմից մշակված տեսության [1] և առաձգական անմոմենտ բարակ թաղանթների տեսության վրա [2—5]։

Լարումների որոշման խնդիրը բերված է երկու ինքնուրույն երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը։ Ընդհանուր դեպքում այդ հավասարումները լրիվ են, անհամասեռ, փոփոխական գործակիցներով։ Ցույց է տրված, որ նրանց լուծումները կարելի է ներկայացնել զուգամիտվող աստիճանական շարքերի միջոցով։

Բերված են աղյուսակներ, որոնք ցույց են տալիս, որ սողքի ազդեցությունը առանձին դեպքերում կարող է ավելի քան 4 անգամ մեծացնել արմատուրայի լարումները։ Սեղմ կերպով դիտարկված է նաև սողքի ազդեցությունը տեղափոխումների և դեֆորմացիաների վրա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1952.
2. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехтеоретиздат, М., 1949.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Гостехтеоретиздат, М., 1953.
4. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
5. *Лурье А. И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
6. *Прокопович И. Е.* О влиянии ползучести на распределение внутренних усилий в ортотропных оболочках. Инженерный сборник, XXIV, 1956.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, II, Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1951.