

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. Р. Фельдман

Устойчивость стержней переменного сечения*

(Днепропетровск)

В статье рассматривается задача об устойчивости ступенчатого стержня с изменяющейся скачкообразно по длине стержня силой сжатия.

В общем случае невозможно найти решение соответствующего дифференциального уравнения при заданных граничных условиях в замкнутой форме, вследствие чего приходится обращаться к приближенным методам [1].

А. Н. Динник в работе [2] по этому вопросу пишет, что для получения результатов, пригодных для приложений в одном только случае, потребовалось вычислить 60 корней. Как он справедливо указывает все это требует большой затраты труда и времени.

Решение задач по устойчивости и колебаниям стержневых систем и пластин можно получить более простым путем, если воспользоваться синтезом методов Бубнова—Галеркина и конечных разностей [3].

Этот же метод может быть применен к решению задач прочности. Так, многие задачи строительной механики корабля, например, определение реакций киль-блоков при постановке корабля в док на килевую дорожку, расчет плоских перекрытий, опирающихся на непрямоугольный контур и т. п., приводят к задаче о расчете балки переменного сечения, лежащей на упругом основании переменной жесткости.

Коэффициенты $I(x)$ и $K(x)$ уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + K(x) y = q(x) \quad (1)$$

где $K(x)$ —жесткость упругого основания.

$q(x)$ —интенсивность внешней нагрузки, действующей на балку,

$I(x)$ —момент инерции площади поперечного сечения балки,

обычно находятся эмпирическим путем и задаются в виде таблиц или графиков.

* Рассмотренные здесь вопросы являются частью работы, доложенной автором 23 декабря 1954 года на совещании по теории упругости, теории пластичности и теоретическим вопросам строительной механики при Институте механики Академии наук СССР.

При интегрировании уравнения (1) одним из известных приближенных методов нужно сначала путем применения той или иной интерполяционной формулы представить значения $I(x)$ и $K(x)$ в аналитической форме. В рекомендуемом методе не требуется обязательно знать значения $I(x)$ и $K(x)$ в аналитической форме, так как в этом случае достаточно знать значения этих коэффициентов лишь в отдельных точках.

§ 1. Метод решения

Рассмотрим конечно-разностное уравнение порядка $2p$ при заданных граничных условиях, неоднородное

$$\sum_{z=-p}^p a_{i,i+z} Y_{i+z} = V_i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

или однородное

$$\sum_{z=-p}^p a_{i,i+z} Y_{i+z} = \lambda Y_i; \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

где Y — значение неизвестной функции в точке i .

a_i и V_i — переменные коэффициенты, определяемые конкретными условиями задачи, λ — неизвестный параметр.

Приближенное решение этих уравнений ищем в виде

$$Y_n = \sum_{k=1}^v b_k \varphi_k(x) \quad (4)$$

где b_k — неизвестные постоянные, $\varphi_k(x)$ — фундаментальные функции, удовлетворяющие всем граничным условиям задачи.

Вместо искомой функции в заданное уравнение подставим приближенное значение в форме (4). Умножим результат подстановки последовательно на все $\varphi_k(x)$, суммируем в заданном интервале и результат приравняем нулю. Для однородного уравнения получим следующую систему однородных линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^v b_k \left\{ \sum_{z=-p}^p \left[a_{i,i+z} \varphi_k(x) - \lambda \varphi_k(x) \right] \varphi_n(x) \right\} = 0 \quad (5)$$

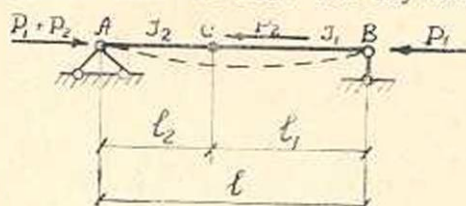
$$k = 1, 2, \dots, v$$

При решении неоднородной задачи находим значения неизвестных параметров b_k . При решении однородной задачи, чтобы удовлетворить этой системе уравнений, не полагая все $b_k = 0$, нужно приравнять нулю определитель полученной системы уравнений. Наименьший вещественный корень этого определителя и будет первым собственным значением задачи.

Очевидно, что порядок определителя зависит не от числа точек деления интервала, а от числа коэффициентов входящих в сумму (4). Порядок решения остается тот же при решении системы совместных конечно-разностных уравнений.

Сходимость процесса будет обеспечена во всех тех случаях, когда сходится процесс Бубнова-Галеркина [4].

С целью иллюстрации метода и получения представления о степени точности, рассмотрим ступенчатый шарнирно опертый стержень, подверженный действию сжимающих сил P_1 , приложенных на концах, и сил P_2 — в промежуточном поперечном сечении C и на левом конце (фиг. 1).



Фиг. 1

§ 2. Устойчивость ступенчатого стержня

Задача об устойчивости двухступенчатого стержня была исследована Ф. С. Ясинским. Однако, им приведены численные значения коэффициентов длины только для случая $l_1 = l_2$ [5].

Случай $l_1 \neq l_2$ представляет определенный практический интерес, например, при проектировании колонн промышленных зданий.

Вначале рассмотрим стержень, состоящий из двух призматических частей AC и CB с общей осью, но различными моментами инерции сечений I_1 и I_2 (фиг. 1). Пусть отношение длин участков не равно единице. Ось ox направим вдоль оси стержня слева направо, начало координат поместим в центре тяжести левого кондового сечения, а ось oy проведем в плоскости изгиба, нормально к оси ox .

Примем, что P_1 и P_2 находятся в некотором постоянном, наперед заданном отношении и при постепенном возрастании они достигают таких значений, что становится возможной искривленная форма первоначально прямолинейного стержня.

Конечно-разностные уравнения соответственно на участках l_1 и l_2 стержня будут:

$$\Delta^2 [EI(x) \Delta^2 y]_i = - \frac{P_1 l^2}{n^2} \Delta^2 y_i; \quad (6)$$

$$\Delta^2 [EI(x) \Delta^2 y]_i = - \frac{(P_1 + P_2) l_2}{n^2} \Delta^2 y_i,$$

где i — номер точки деления.

Длина стержня l , свободно опертого на жесткие опоры, разделена на n равных частей длины $\Delta x = \frac{l}{n}$. Точки деления пронумерованы от 0 до n , номер 0 соответствует точке $x=0$, а номер n точке $x=l$.

Значение момента инерции в сечении с номером i обозначим через I_i .

Введем обозначения:

$$I(x) = I_1 f(x); \quad \Delta^2 y = z; \quad m = \frac{P_1 + P_2}{P_1}; \quad (7)$$

$$F(x) = F_1 \psi(x); \quad \frac{P_1 l^2}{EI_1} = \lambda; \quad n_1 = \frac{I_2}{I_1}$$

где I_1 и F_1 — соответственно значения момента инерции и площади поперечного сечения в правом опорном сечении, $f(x)$ и $\psi(x)$ — соответственно функции, описывающие закон изменения момента инерции и площади поперечного сечения вдоль оси стержня. Пользуясь обозначениями (7), придадим уравнениям (6) вид:

$$n^2 \Delta^2 [f(x) z]_i = -\lambda z_i \quad (8)$$

$$n^2 \Delta^2 [f(x) z]_i = -\lambda \frac{m}{n_1} z_i.$$

Критическую нагрузку представим в следующей форме:

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_{np}^2} \quad (9)$$

где $I_{min} = I_1$; $l_{np} = l\alpha$; α — коэффициент, зависящий от способа нагружения и закрепления концов сжимаемого стержня.

Из формулы (9) видно, что задача сводится к нахождению значений α для различных соотношений m и n_1 .

Принимая $\lambda \frac{m}{n_1} = \frac{\pi^2}{\alpha^2}$, окончательно получим

$$(P_1 + P_2)_{kp} = \frac{\pi^2 EI_1}{l_{np}^2} \quad (10)$$

Задаваясь различными отношениями $\frac{I_2}{I_1}$, $\frac{l_2}{l_1}$ и $\frac{P_2}{P_1}$ можно получить значения α для любого случая.

С достаточной для практики точностью решение задачи может быть получено, если ограничиться удержанием одного члена ряда (4), а именно:

$$y_i = b \sin \pi \eta_i \quad (11)$$

где $\eta_i = \frac{x_i}{l}$.

Пользуясь равенством (11) вычислим значения функции y_i в точках ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), соответствующие вершинам ломаной оси стержня в момент потери устойчивости и подставим в систему уравнений (8). Стержень разобьем на 10 частей.

Приведем вычисления для случая, для которого имеется точное решение Ф. С. Ясинского, а именно:

$$l_1 = l_2; \quad m = \frac{P_1 + P_2}{P_1} = 1,0 \quad n_1 = \frac{l_2}{l_1} = 2,0.$$

Выполняя действия в соответствии с [5], после подстановки числовых значений получим $\lambda = 13,05$.

Так как $\frac{\pi^2}{\alpha^2} = \lambda \frac{m}{n_1}$ то $\alpha = \sqrt{\lambda \frac{m}{n_1}} = 1,23$.

По Ф. С. Ясинскому $\alpha = 1,24$.

Такое же небольшое расхождение получается и для других значений коэффициентов m и n_1 рассматриваемого случая, в чем можно убедиться сравнением значений коэффициента α , вычисленных по изложенному методу и приведенных в графике 3, со значениями коэффициента α , найденными точным методом Ф. С. Ясинским.

Значения коэффициентов длины $l_{пр}: l = \alpha$ для случаев $l_2: l = 0,2; 0,4; 0,6$ сведены в таблицы 1, 2, 4 и 5 и графики 2, 3 и 4.

Значения α , вычисленные для $l_2 = 0,2l$

Таблица 1

$m \backslash n_1$	1,0	1,25	1,50	1,75	2,00	3,00
1,00	1,004	0,905	0,831	0,777	0,729	0,610
1,25	1,118	1,004	0,922	0,858	0,807	0,673
1,50	1,220	1,095	1,004	0,935	0,878	0,729
1,75	1,313	1,179	1,081	1,004	0,943	0,782
2,00	1,402	1,259	1,152	1,071	1,004	0,831
2,25	1,485	1,333	1,220	1,132	1,063	0,878
2,50	1,563	1,402	1,292	1,190	1,117	0,922
2,75	1,636	1,472	1,343	1,249	1,168	0,964
3,00	1,707	1,533	1,402	1,301	1,219	1,004

Значения α , вычисленные для $l_2 = 0,4l$

Таблица 2

$m \backslash n_1$	1,0	1,25	1,50	1,75	2,00	3,00
1,00	1,004	0,933	0,881	0,843	0,813	0,738
1,25	1,087	1,004	0,945	0,900	0,865	0,777
1,50	1,164	1,072	1,004	0,955	0,914	0,813
1,75	1,243	1,135	1,060	1,004	0,960	0,848
2,00	1,306	1,195	1,114	1,047	1,004	0,882
2,25	1,372	1,252	1,166	1,099	1,047	0,914
2,50	1,435	1,306	1,213	1,143	1,087	0,945
2,75	1,493	1,358	1,261	1,186	1,126	0,976
3,00	1,552	1,409	1,306	1,227	1,166	1,004

Значения λ , вычисленные $l_2 \approx 0,6l$

Таблица 3

$m \backslash n_1$	1,0	1,25	1,50	1,75	2,00	3,00
1,00	1,004	0,973	0,952	0,936	0,924	0,895
1,25	1,043	1,004	0,979	0,959	0,944	0,909
1,50	1,080	1,035	1,004	0,982	0,965	0,924
1,75	1,116	1,065	1,030	1,001	0,985	0,937
2,00	1,149	1,094	1,055	1,027	1,004	0,952
2,25	1,183	1,122	1,080	1,048	1,024	0,965
2,50	1,215	1,149	1,104	1,069	1,043	0,979
2,75	1,247	1,177	1,127	1,090	1,061	0,991
3,00	1,278	1,203	1,149	1,110	1,080	1,004

Рассмотрим устойчивость трехступенчатого (фиг. 5) и пятиступенчатого (фиг. 6) стержней с общими осями и участками разной длины.

Критическое значение продольной сжимающей силы определяем по обычной формуле

$$P_{кр} = K \frac{EI}{l^2},$$

где K — коэффициент устойчивости,

I — момент инерции в фиксированном сечении.

Задача сводится к вычислению коэффициентов устойчивости в зависимости от изменения отношений длин и моментов инерции на отдельных участках стержня. А. Н. Динник рассмотрел [2] только симметричные трехступенчатые стержни и в частности для случая

$$\lambda/l = 0,2; I/I_0 = 0,8 \text{ и } l_1/l_2 = 1$$

получил значение $K = 8,86$. Нами же для этого случая получено $K = 8,54$.

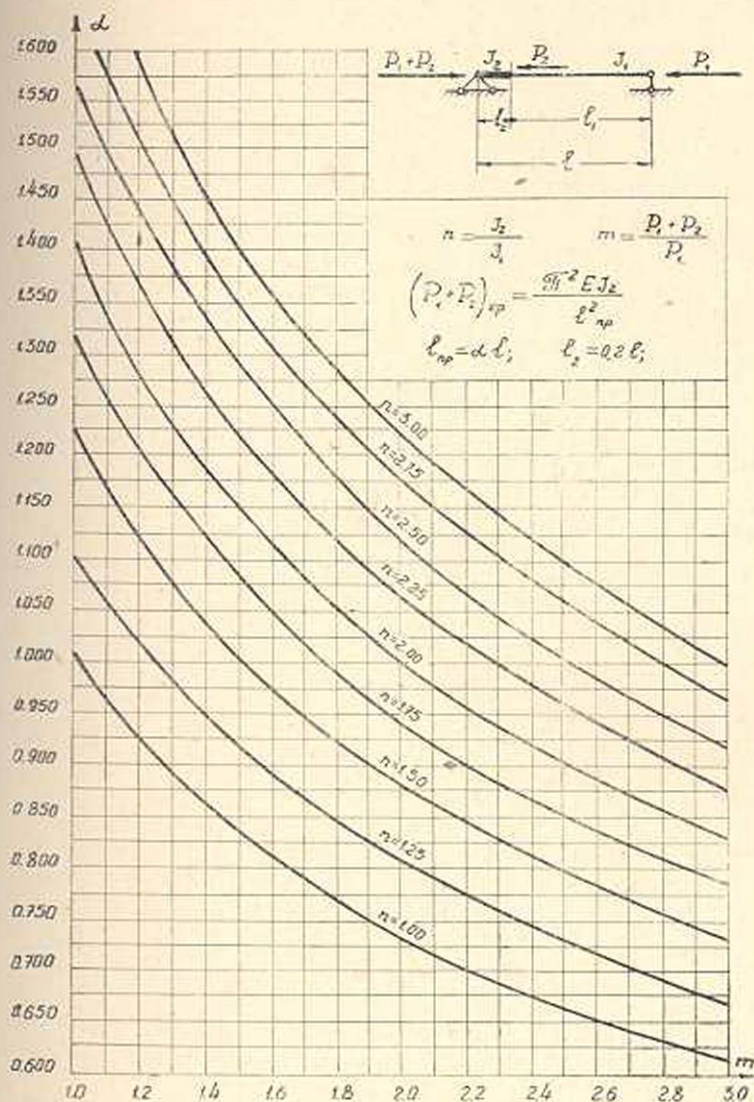
Следуя методике изложенной выше, найдены величины коэффициентов устойчивости при различных отношениях моментов инерции J/J_0 и соотношений между длинами участков λ/l .

В таблицах 4 и 5 приведены коэффициенты устойчивости K для трехступенчатого стержня, в таблице 6 для пятиступенчатого стержня.

Таблица 4

 $\lambda/l = 0,2$

$l_1 : l_2$	0	1	2:5	3:5	1:0
$I : I_0$					
0,1	1,06	1,24	1,35	1,50	1,55
0,2	2,10	2,31	2,59	2,83	2,92
0,4	4,11	4,42	4,79	5,09	5,20
0,6	6,18	6,47	6,69	6,94	7,03
0,8	7,96	8,14	8,34	8,48	8,54

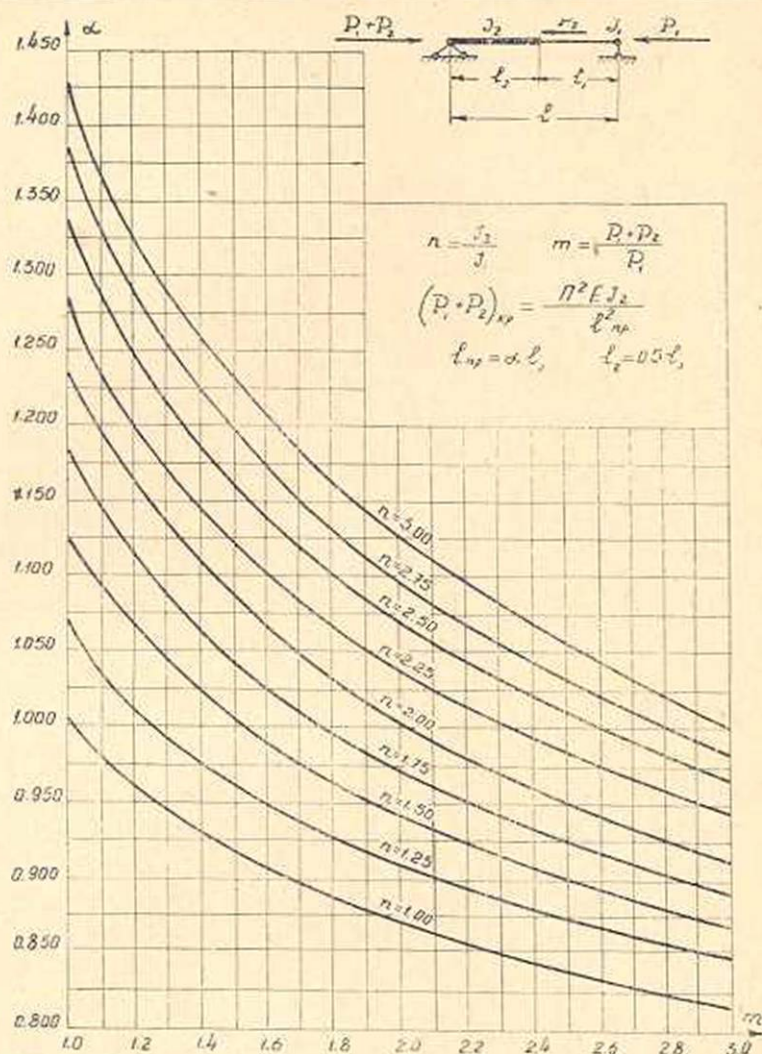


Фиг. 2.

Таблица 5

 $\lambda/l = 0.4$

$I_1 : I_2$	0	1:5	1:2	1:1
$I : I_0$				
0,1	1,41	1,76	2,16	2,37
0,2	2,69	3,23	3,81	4,09
0,4	4,91	5,55	6,15	6,43
0,6	6,79	7,31	7,74	7,95
0,8	8,40	8,68	8,87	9,00



Фиг. 3

Таблица 6

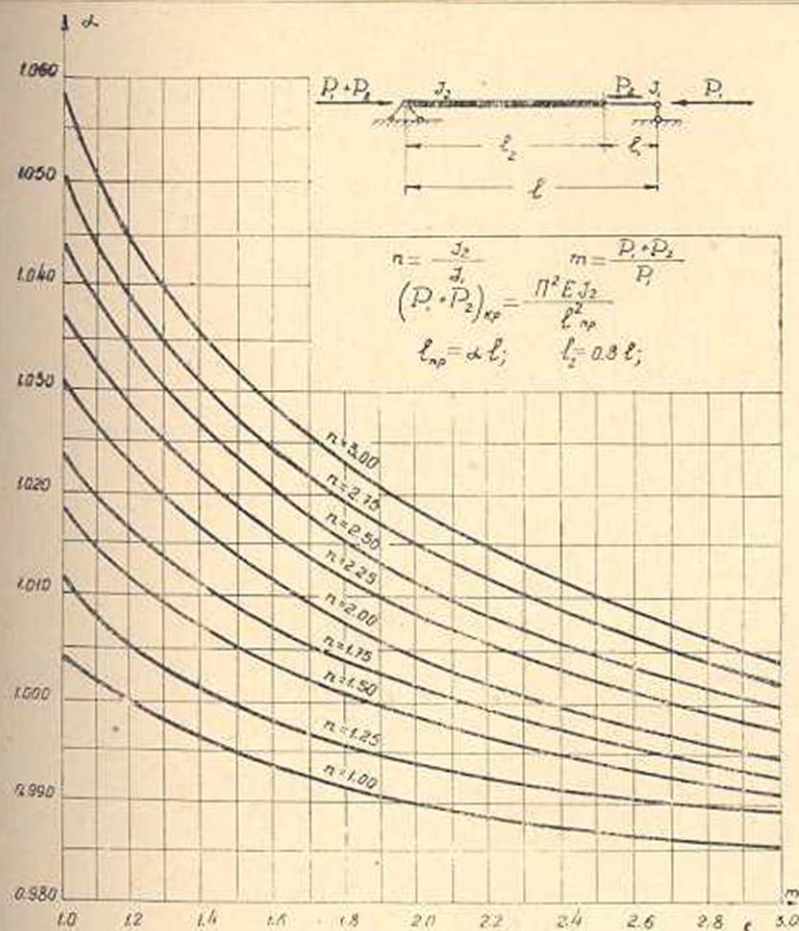
$l_1 : l_2 : l_0$			$l_1 : l_2 : l_0$				
			1:1:1	1:2:2	2:1:2	2:2:1	3:1:1
0,2	0,4	1,0	7,22	5,96	5,03	4,34	3,68
0,2	0,6	1,0	7,96	7,22	5,74	5,36	4,40
0,4	0,6	1,0	8,52	7,62	7,04	6,39	5,39
0,4	0,8	1,0	9,02	8,59	7,71	7,45	6,52

С равным успехом можно определить значения коэффициентов устойчивости для многоступенчатого стержня, при этом вычисления почти не усложняются.

§ 3 Пример

Стержень длиной $l = 5,00$ м состоит из двух двутавров № 12, поставленных так, как показано на фиг. 7.

Момент инерции поперечного сечения равен



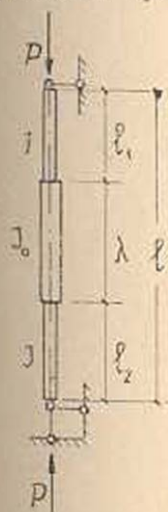
Фиг. 4.

$$I = 581,8 \text{ см}^4.$$

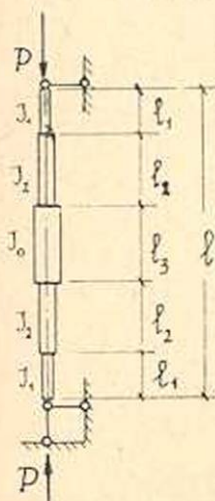
В случае открытых концов Эйлера критическая сила $P = 46540 \text{ кг}$. Требуется, путем наложения двух листов, усилить стержень так, чтобы критическая сила возросла в полтора раза.

Необходимо определить длину λ усиленной части стержня.

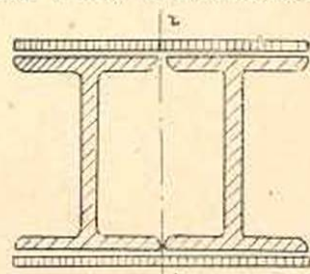
Момент инерции добавочных листов, шириной 15 см и толщиной 1 см, относительно



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

оси $t-t$ равен 562 см^4 . В результате усиления стержень будет иметь в крайних частях момент инерции $I = 581,8 \text{ см}^4$, в средней части $I_0 = 1143,8 \text{ см}^4$.

Отношение моментов инерции $\frac{I}{I_0} = \frac{581,8}{1143,8} = 0,51$.

Определяем искомый коэффициент устойчивости:

$$K = \frac{PI^2}{EI_0} = \frac{69800 \cdot 500}{2 \cdot 10^6 \cdot 1143,8} = 7,6.$$

Пользуясь таблицей (5), находим по $I/I_0 = 0,51$ и $K = 7,6$ соответствующее отношение $\lambda/I = 0,4$.

Таким образом стержень надо усилить в средней части на длину $\lambda = 0,4I = 2 \text{ м}$.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступило 2 XI 1951

Մ. Ռ. Ֆելդման

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՁՈՂԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հաղվածում շարադրվում է աստիճանավոր ձողի կալանության խնդիրների լուծման մասավոր եղանակ, երբ սեղմող ուժը ըստ ձողի երկարության փոփոխվում է թափանչանքի:

Ցույց է տրված մեթոդի կիրառումը պրաբոնիկ հետաքրքրություններ կալանող սրռչ խնդիրների համար:

Երկարության և կալանության զործակիցների դաժված արժեքները ամփոփված են աղյուսակներում և գրաֆիկներում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Корноухов Н. В. Прочность и устойчивость стержневых систем, 1949.
2. Динник А. Н. Продольный изгиб, 1939.
3. Фельдман М. Р. О применении метода Галеркина к конечноразностным уравнениям. Инженерный сборник Института механики Академии наук СССР, том II, вып. 1, 1943.
4. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике, 1950.
5. Ясинский Ф. С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней, 1952.