

М. М. Джрбашян

Об одном интегральном преобразовании

Известно [1], что решение уравнения

$$y'' + \lambda y = 0$$

при граничном условии

$$y'(0) = \theta y(0) \quad \operatorname{Im} \theta = 0$$

имеющем вид

$$\Phi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \theta \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$$

является ядром для преобразования типа Фурье. Имеет место следующий результат, являющийся обобщением известной теоремы Планшереля.

1) Для любой функции $f(x) \in L_2(0, +\infty)$ существует функция $F(\lambda)$ из класса

$$\int_0^{\infty} |F(\lambda)|^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \theta^2} d\lambda < +\infty \quad (*)$$

такая, что непрерывная функция

$$F(\lambda, \sigma) = \int_0^{\sigma} f(t) \Phi(t, \lambda) dt \quad (\sigma > 0)$$

сходится к $F(\lambda)$ в метрике $(*)$, т. е.

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^{\sigma} |F(\lambda) - F(\lambda, \sigma)|^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \theta^2} d\lambda = 0.$$

2) При $\theta > 0$ имеет место формула обращения

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma} F(\lambda) \Phi(x, \lambda) \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \theta^2} d\lambda,$$

а при $\theta < 0$ формула обращения имеет вид

$$f(x) = -2 \operatorname{Im} \int_0^{\infty} F(\lambda) \Phi(x, \lambda) \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \eta^2} d\lambda +$$

В настоящей работе исследуются интегральные преобразования порожденные несамосопряженным дифференциальным уравнением

$$y'' - i2a_0 \lambda y' + \lambda^2 y = 0 \quad (a_0 > 0) \quad (A)$$

на полуоси $(0, +\infty)$ при граничном условии

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad (B)$$

где α — произвольное действительное число. Устанавливается, что если $\Phi(x, \lambda)$ — решение задачи (A), (B), то, преобразуя функцию $f(x) \in L_1(0, +\infty)$ или $L_2(0, +\infty)$ при помощи ядра $e^{-2a_0 \lambda x} \Phi(x, \lambda)$, являющегося решением задачи

$$y'' + i2a_0 \lambda y' + \lambda^2 y = 0, \quad (A^*)$$

$$y(0) (\cos \alpha + i2a_0 \lambda \sin \alpha) + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad (B^*)$$

можно обращение осуществлять через ядро $\Phi(x, \lambda)$. Полученные таким образом результаты, которые приведены ниже, являются, по-видимому, наиболее естественным обобщением классического результата, сформулированного выше.

Эти результаты можно получить путем предельного перехода, используя разложения в ряды по собственным функциям на конечном отрезке*. Однако в настоящей работе мы предпочитаем пойти другим путем, быстрее приводящим к цели.

Отметим, что впервые задача разложения по собственным функциям уравнения (A) на конечном отрезке, но при нулевых граничных условиях, была решена в статье [4] введением понятия обобщенной ортогональности для собственных функций.

§ 1. Теорема типа Дирихле для обобщенного преобразования

1°. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' - i2a_0 \lambda y' + \lambda^2 y = 0 \quad (a_0 > 0). \quad (1.1)$$

Если обозначим

$$\omega_1 = \sqrt{1 + a_0^2} + a_0, \quad \omega_2 = \sqrt{1 + a_0^2} - a_0, \quad (1.2)$$

* Такие разложения для несамосопряженных уравнений произвольного порядка и при гораздо общих граничных условиях были исследованы в работах Я. Д. Тамаркина [2] и М. В. Келдыша [3].

то

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_2 &= 2\sqrt{1 + a_0^2}, & \omega_1 - \omega_2 &= 2a_0, \\ \omega_1 \omega_2 &= 1, & \omega_1 > \omega_2 > 0,\end{aligned}\quad (1.3)$$

и общее решение (1.1) напишется в виде

$$y(x) = C_1 e^{i\omega_1 \lambda x} + C_2 e^{-i\omega_2 \lambda x}.$$

Отсюда следует, что функция

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\omega_1 e^{-i\omega_2 \lambda x} + \omega_2 e^{i\omega_1 \lambda x}}{2} \sin \alpha - \frac{e^{i\omega_1 \lambda x} - e^{-i\omega_2 \lambda x}}{2i\lambda} \cos \alpha, \quad (1.4)$$

является решением уравнения (1.1) при граничном условии

$$\Phi(0, \lambda) \cos \alpha + \Phi_x'(0, \lambda) \sin \alpha = 0. \quad (1.5)$$

Легко видеть, что функция

$$\begin{aligned}\Psi(x, \lambda) &= e^{-i2a_0 \lambda x} \Phi(x, \lambda) = \\ &= \frac{\omega_1 e^{-i\omega_2 \lambda x} + \omega_2 e^{i\omega_1 \lambda x}}{2} \sin \alpha - \frac{e^{i\omega_1 \lambda x} - e^{-i\omega_2 \lambda x}}{2i\lambda} \cos \alpha\end{aligned}\quad (1.6)$$

есть решение уравнения

$$Z'' + i2a_0 \lambda Z' + \lambda^2 Z = 0, \quad (1.1')$$

при граничном условии

$$Z(0) (\cos \alpha + i2a_0 \lambda \sin \alpha) + Z'(0) \sin \alpha = 0. \quad (1.5')$$

Данной функции $f(x) \in L_1(0, +\infty)$ сопоставим ее преобразование при помощи ядра $\Psi(t, \lambda)$, т. е. интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t) \Psi(t, \lambda) dt, \quad (1.7)$$

являющийся непрерывной функцией на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

Для обращения преобразования (1.7) нам понадобится одна предварительная лемма, которую мы докажем ниже.

Но прежде всего заметим следующее. Пусть

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 + a_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \Phi(x, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda, \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned}\Omega(\lambda) &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + ia_0 \lambda \sin 2\alpha} = \\ &= \frac{\lambda^2}{(\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha)(\lambda - i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha) \sin^2 \alpha}\end{aligned}\quad (1.9)$$

Подставляя из (1.7) значение $F(\lambda)$ в (1.8) и пользуясь тем, что $f(t) \in L_1(0, +\infty)$, будем иметь

$$J_2(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1+a_0^2}} \int_0^\infty f(t) U_2(x, t) dt, \quad (1.8')$$

где

$$U_2(x, t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Psi(t, \lambda) \Phi(x, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda. \quad (1.10)$$

Подставляя в (1.10) значения функций $\Psi(t, \lambda)$, $\Phi(x, \lambda)$ и $\Omega(\lambda)$ из (1.6), (1.4) и (1.9), после соответствующих вычислений, найдем:

а) При $\operatorname{ctg} \alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} U_2(x, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \omega_2 \frac{\sin \omega_1 \sigma (x-t)}{x-t} + \omega_1 \frac{\sin \omega_2 \sigma (x-t)}{x-t} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \omega_1^2 \frac{\sin \sigma (\omega_1 t + \omega_2 x)}{\omega_1 t + \omega_2 x} + \omega_2^2 \frac{\sin \sigma (\omega_2 t + \omega_1 x)}{\omega_2 t + \omega_1 x} \right\} - \\ &- i \frac{\omega_1^2}{2} \sqrt{1+a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-i\lambda(\omega_1 t + \omega_2 x)}}{\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha} d\lambda - \\ &- i \frac{\omega_2^2}{2} \sqrt{1+a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{i\lambda(\omega_2 t + \omega_1 x)}}{\lambda - i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha} d\lambda = \\ &= U_2^{(1)}(x, t) + U_2^{(2)}(x, t) - V_2^{(1)}(x, t) - V_2^{(2)}(x, t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

б) При $\operatorname{ctg} \alpha = 0$

$$U_2(x, t) = U_2^{(1)}(x, t) + U_2^{(2)}(x, t). \quad (1.11')$$

Лемма 1. а) При $\operatorname{ctg} \alpha < 0$, для значений $0 \leq t < +\infty$, $0 < x < +\infty$, когда $\sigma \rightarrow +\infty$

$$V_2^{(1)}(x, t) = O \left\{ \frac{1}{\sigma (\omega_1 t + \omega_2 x)} \right\}, \quad (1.12')$$

$$V_2^{(2)}(x, t) = O \left\{ \frac{1}{\sigma (\omega_2 t + \omega_1 x)} \right\}. \quad (1.12'')$$

б) При $\operatorname{ctg} \alpha > 0$, для значений $0 \leq t < +\infty$, $0 < x < +\infty$, когда $\sigma \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} V_2^{(1)}(x, t) &= -\pi \omega_1^2 \sqrt{1+a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha e^{-(x+\omega_1^2 t) \operatorname{ctg} \alpha} + \\ &+ O \left\{ \frac{1}{\sigma (\omega_1 t + \omega_2 x)} \right\}, \end{aligned} \quad (1.13')$$

$$V_s^{(2)}(x, t) = -\pi\omega_2^2 \sqrt{1+a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha e^{-(x+\omega_2^2 t) \operatorname{ctg} \alpha} + \\ + O\left\{\frac{1}{\sigma(\omega_2 t + \omega_1 x)}\right\}. \quad (1.13'')$$

Доказательство. Пусть $\sigma > \max\{\omega_1 |\operatorname{ctg} \alpha|, \omega_2 |\operatorname{ctg} \alpha|\}$. Обозначим через $C_s^{(+)}$ и $C_s^{(-)}$ соответственно верхнюю и нижнюю половины окружности $|\lambda| = \sigma$, пробегаемой в положительном направлении. Обозначим далее

$$I_s^{(-)} = \int_{C_s^{(-)}} \frac{e^{-i\lambda(\omega_1 t + \omega_2 x)}}{\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha} d\lambda, \quad (1.14')$$

$$I_s^{(+)} = \int_{C_s^{(+)}} \frac{e^{i\lambda(\omega_2 t + \omega_1 x)}}{\lambda - i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha} d\lambda. \quad (1.14'')$$

При $\sigma \rightarrow +\infty$, полагая $\lambda = \sigma e^{i\varphi}$, из (1.14') и (1.14'') получим:

$$I_s^{(-)} = O\left\{\int_{-\pi}^0 e^{\sigma(\omega_1 t + \omega_2 x) \sin \varphi} d\varphi\right\} = O\left\{\frac{1}{\sigma(\omega_1 t + \omega_2 x)}\right\}, \quad (1.15')$$

и

$$I_s^{(+)} = O\left\{\int_0^{\pi} e^{-\sigma(\omega_2 t + \omega_1 x) \sin \varphi} d\varphi\right\} = O\left\{\frac{1}{\sigma(\omega_2 t + \omega_1 x)}\right\} \quad (1.15'')$$

а) Положим теперь, что $\operatorname{ctg} \alpha < 0$, тогда функции

$$\frac{e^{-i\lambda(\omega_1 t + \omega_2 x)}}{\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha} \quad \text{и} \quad \frac{e^{i\lambda(\omega_2 t + \omega_1 x)}}{\lambda - i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha} \quad (1.16)$$

голоморфны соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$ и $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$. Поэтому, интегрируя функции (1.16) соответственно по контуру нижней и верхней полуокружностей радиуса σ , в силу обозначений (1.11), (1.14') и (1.14'') получим:

$$V_s^{(-)}(x, t) - i \frac{\omega_1^2}{2} \sqrt{1+a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha I_s^{(-)} = 0,$$

$$V_s^{(2)}(x, t) + i \frac{\omega_2^2}{2} \sqrt{1+a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha I_s^{(+)} = 0,$$

откуда, в силу (1.15') и (1.15''), вытекают утверждения (1.12') и (1.12'') леммы.

б) Если $\operatorname{ctg} \alpha > 0$, то функции (1.16) голоморфны соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$ и $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ кроме точек $\lambda = -i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha$ и $\lambda = i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha$, где они имеют простые полюсы с вычетами

$$e^{-\operatorname{ctg} \alpha (\omega_1^2 t + x)} \text{ и } e^{-\operatorname{ctg} \alpha (\omega_2^2 t + x)}$$

соответственно. Поэтому, интегрируя функции (1.16) по тем же контурам, в этом случае получим формулы

$$\begin{aligned} V_z^{(1)}(x, t) - i \frac{\omega_1^2}{2} \sqrt{1 + a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha I_z^{(-)} = \\ = -\pi \omega_1^2 \sqrt{1 + a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha e^{-(x + \omega_1^2 t) \operatorname{ctg} \alpha}, \\ V_z^{(2)}(x, t) + i \frac{\omega_2^2}{2} \sqrt{1 + a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha I_z^{(+)} = \\ = -\pi \omega_2^2 \sqrt{1 + a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha e^{-(x + \omega_2^2 t) \operatorname{ctg} \alpha}, \end{aligned}$$

откуда, в силу оценок (1.15') и (1.15''), будут следовать формулы (1.13') и (1.13'') леммы.

2°. Обращение интегрального преобразования (1.7) дается следующей теоремой.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на полуоси $(0, +\infty)$, принадлежит к классу $L_1(0, +\infty)$ и имеет ограниченную вариацию на любом отрезке (δ, R) , $0 < \delta < R$, то интегральное преобразование

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \Psi(t, \lambda) dt$$

обращается следующим образом:

а) При $\operatorname{ctg} \alpha \leq 0$, для $0 < x < +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 + a_0^2}} \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(\lambda) \Phi(x, \lambda) \lambda^2 d\lambda}{\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + i a_0 \lambda \sin 2\alpha} \quad (1.17)$$

б) При $\operatorname{ctg} \alpha > 0$, для $0 < x < +\infty$

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 + a_0^2}} \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(\lambda) \Phi(x, \lambda) \lambda^2 d\lambda}{\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + i a_0 \lambda \sin 2\alpha} + \\ + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha \sqrt{1 + a_0^2}} (\omega_1^2 F(-i \omega_1 \operatorname{ctg} \alpha) + \omega_2^2 F(i \omega_2 \operatorname{ctg} \alpha)) e^{-x \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (1.18) \end{aligned}$$

Доказательство. а) Пусть $\operatorname{ctg} \alpha \leq 0$. Сначала положим, что $\operatorname{ctg} \alpha = 0$, тогда по (1.8) и (1.8') и в силу (1.11')

$$J_z(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 + a_0^2}} \int_0^\infty f(t) U_z^{(1)}(x, t) dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi \sqrt{1+a_0^2}} \int_0^{\infty} f(t) U_s^{(2)}(x, t) dt = J_s^{(1)}(x) + J_s^{(2)}(x), \quad (1.19)$$

Из определения (1.11) функций $U_s^{(1)}(x, t)$ и $U_s^{(2)}(x, t)$ по теореме Дирихле и по теореме Римана-Лебега для $0 < x < +\infty$ будем иметь:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} J_s^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1+a_0^2}} \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} f(t) \left\{ \omega_2 \frac{\sin \omega_2 \sigma (x-t)}{x-t} + \right. \\ \left. + \omega_1 \frac{\sin \omega_1 \sigma (x-t)}{x-t} \right\} dt = \frac{1}{2\pi \sqrt{1+a_0^2}} \pi (\omega_2 + \omega_1) f(x) = f(x), \quad (1.20)$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} J_s^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1+a_0^2}} \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} f(t) \left\{ \omega_1^2 \frac{\sin \sigma (\omega_1 t + \omega_2 x)}{\omega_1 t + \omega_2 x} + \right. \\ \left. + \omega_2^2 \frac{\sin \sigma (\omega_2 t + \omega_1 x)}{\omega_2 t + \omega_1 x} \right\} dt = 0. \quad (1.21)$$

Из формул (1.19) и (1.20), (1.21) следует формула (1.17) теоремы при $\operatorname{ctg} \alpha = 0$.

Положим теперь, что $\operatorname{ctg} \alpha < 0$. Тогда, заметив, что по (1.12') и (1.12'') при $0 < x < +\infty$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} f(t) V_s^{(k)}(x, t) dt = 0 \quad (k=1, 2), \quad (1.22)$$

Из формул (1.8'), (1.11), (1.20), (1.21) и (1.22) опять получим формулу (1.17) теоремы.

б) Пусть $\operatorname{ctg} \alpha > 0$. В силу (1.8') и асимптотических формул (1.13') и (1.13'') при $s \rightarrow +\infty$ будем иметь

$$J_s(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1+a_0^2}} \int_0^{\infty} f(t) \left\{ U_s^{(1)}(x, t) + U_s^{(2)}(x, t) \right\} dt + \\ + \operatorname{ctg} \alpha e^{-x \operatorname{ctg} \alpha} \left\{ \omega_1^2 \int_0^{\infty} e^{-\omega_1^2 t \operatorname{ctg} \alpha} f(t) dt + \right. \\ \left. + \omega_2^2 \int_0^{\infty} e^{-\omega_2^2 t \operatorname{ctg} \alpha} f(t) dt \right\} + O\left(\frac{1}{s}\right). \quad (1.23)$$

Но из (1.7) и (1.6) следует

$$F(-i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha) = \sqrt{1+a_0^2} \sin \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-\omega_1^2 t \operatorname{ctg} \alpha} dt, \quad (1.24')$$

$$F(i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha) = \sqrt{1 + a_0^2} \sin \alpha \int_0^\infty f(t) e^{-i\omega_2 t \operatorname{ctg} \alpha} dt. \quad (1.24'')$$

Переходя к пределу в (1.23), с учетом формул (1.20), (1.21) и (1.24) получим утверждение (1.18) теоремы.

§ 2. Теорема типа Планшереля для обобщенного преобразования

В настоящем параграфе результат теоремы 1 распространяется на функции из класса $L_2(0, +\infty)$.

1°. Функции $\Phi(x, \lambda)$ и $\Psi(x, \lambda)$, определенные выше по формулам (1.4) и (1.6) напомним в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, \lambda) = & \frac{\omega_1}{2\lambda} (\lambda \sin \alpha - i\omega_2 \cos \alpha) e^{-i\omega_1 \lambda x} + \\ & + \frac{\omega_2}{2\lambda} (\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha) e^{i\omega_1 \lambda x}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, \lambda) = & \frac{\omega_1}{2\lambda} (\lambda \sin \alpha - i\omega_2 \cos \alpha) e^{-i\omega_1 \lambda x} + \\ & + \frac{\omega_2}{2\lambda} (\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha) e^{i\omega_1 \lambda x}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отнесем к классу $L_2^{(2)}(-\infty, +\infty)$ функции $F(\lambda)$, определенные на всей оси $(-\infty, +\infty)$, для которых существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 |\Omega(\lambda)| d\lambda. \quad (2.3)$$

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основного результата этого параграфа, приведем две вспомогательные леммы, на которые мы будем существенно опираться.

Лемма 2. Если $f(x) \in L_2(0, +\infty)$, то существует функция $F(\lambda) \in L_2^{(2)}(-\infty, +\infty)$ такая, что интегралы

$$F(\lambda, z) = \int_0^z f(t) \Psi(t, \lambda) dt \quad (z > 0) \quad (2.4)$$

сходятся к $F(\lambda)$ в метрике пространства $L_2^{(2)}(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Если обозначить

$$\Phi_1(\lambda, z) = \int_0^z f(t) e^{i\omega_1 \lambda t} dt, \quad \Phi_2(\lambda, z) = \int_0^z f(t) e^{-i\omega_1 \lambda t} dt, \quad (2.5)$$

то по теореме Планшереля существуют пределы в среднем в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$

$$\Phi_1(\lambda) = \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow +\infty} \Phi_1(\lambda, \alpha); \quad \Phi_2(\lambda) = \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow +\infty} \Phi_2(\lambda, \alpha). \quad (2.6)$$

Из (2.2), (2.4) и (2.5) получим

$$\begin{aligned} F(\lambda, \alpha) = & \frac{\omega_1}{2\lambda} (\lambda \sin \alpha - i\omega_2 \cos \alpha) \Phi_2(\lambda, \alpha) + \\ & + \frac{\omega_2}{2\lambda} (\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha) \Phi_1(\lambda, \alpha), \end{aligned} \quad (2.7)$$

откуда в силу (1.9) вытекает оценка

$$\begin{aligned} |F(\lambda, \alpha_1) - F(\lambda, \alpha_2)|^2 |\Omega(\lambda)| \leq & A_1 |\Phi_2(\lambda, \alpha_2) - \Phi_2(\lambda, \alpha_1)|^2 + \\ & + A_2 |\Phi_1(\lambda, \alpha_2) - \Phi_1(\lambda, \alpha_1)|^2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где A_1, A_2 — постоянные, не зависящие от λ, α_1 и α_2 .

Из существования пределов в среднем (2.6) и из (2.8) вытекает, что

$$\lim_{\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda, \alpha_1) - F(\lambda, \alpha_2)|^2 |\Omega(\lambda)| d\lambda = 0,$$

откуда, очевидно, следует существование функции $F(\lambda) \in L_2^{(0)}(-\infty, +\infty)$ такой, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda) - F(\lambda, \alpha)|^2 |\Omega(\lambda)| d\lambda = 0,$$

т. е. утверждение леммы.

Наконец, отметим, что из (2.6) и (2.7) следует

$$\begin{aligned} F(\lambda) = & \frac{\omega_1}{2\lambda} (\lambda \sin \alpha - i\omega_2 \cos \alpha) \Phi_2(\lambda) + \\ & + \frac{\omega_2}{2\lambda} (\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha) \Phi_1(\lambda), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(\lambda) = & \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha f(t) e^{i\omega_1 \lambda t} dt, \\ \Phi_2(\lambda) = & \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha f(t) e^{-i\omega_2 \lambda t} dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из формул (2.10) легко заключаем, что функция $\Phi_1(\lambda)$ голоморфна при $\text{Im} \lambda > 0$ и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_1(\mu + i\nu)|^2 d\mu \leq M_1 < +\infty, \quad (\nu > 0),$$

где M_1 не зависит от ν (все такие функции отнесем к классу $H_2^{(+)}$), а функция $\Phi_2(\lambda)$ голоморфна при $\text{Im} \lambda < 0$ и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_2(\mu + i\nu)|^2 d\mu \leq M_2 < +\infty, \quad (\nu < 0)$$

где M_2 не зависит от ν (все такие функции отнесем к классу $H_2^{(-)}$).

Обозначим теперь

$$\Phi_1^*(\lambda) = \frac{\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha}{\lambda \sin \alpha - i\omega_2 \cos \alpha} \Phi_1(\lambda) \quad (2.11)$$

$$\Phi_2^*(\lambda) = \frac{\lambda \sin \alpha - i\omega_2 \cos \alpha}{\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha} \Phi_2(\lambda)$$

и заметим, что $\Phi_k^*(\lambda) \in L_2(-\infty, +\infty)$, ($k = 1, 2$)

Лемма 3. а) При $\text{ctg} \alpha \leq 0$ на полуоси $(0, +\infty)$

$$\text{l.i.m.}_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^z \Phi_1^*(\lambda) e^{i\omega_1 x \lambda} d\lambda = 0, \quad (2.12')$$

$$\text{l.i.m.}_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^z \Phi_1^*(\lambda) e^{-i\omega_2 x \lambda} d\lambda = 0. \quad (2.12'')$$

б) При $\text{ctg} \alpha > 0$, на полуоси $(0, +\infty)$

$$\text{l.i.m.}_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^z \Phi_1^*(\lambda) e^{i\omega_1 x \lambda} d\lambda = -4\pi \sqrt{1 + a_0^2} \text{ctg} \alpha e^{-x \text{ctg} \alpha} \Phi_1(i\omega_2 \text{ctg} \alpha), \quad (2.13')$$

$$\text{l.i.m.}_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^z \Phi_2^*(\lambda) e^{-i\omega_2 x \lambda} d\lambda = -\sqrt{1 + a_0^2} \text{ctg} \alpha e^{-x \text{ctg} \alpha} \Phi_2(-i\omega_1 \text{ctg} \alpha). \quad (2.13'')$$

Доказательство. Для доказательства мы будем опираться на следующую известную теорему Палей и Винера, [5] утверждающую, что класс функций $H_2^{(+)}$ совпадает с классом функций, представимых в виде

$$\Psi(\lambda) = \text{l.i.m.}_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 \varphi(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \text{Im} \lambda > 0$$

где

$$\varphi(x) \in L_2(-\infty, 0).$$

а) Из определения (2.11) функции $\Phi_1^*(\lambda)$ видно, что если $\operatorname{ctg} \alpha = 0$, то $\Phi_1^*(\lambda) = \Phi_1(\lambda) \in H_2^{(+)}$, и если $\operatorname{ctg} \alpha < 0$, то функция $\Phi_1^*(\lambda)$ голоморфна в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и $|\Phi_1^*(\lambda)| \leq L_1 |\Phi_1(\lambda)|$, ($\operatorname{Im} \lambda > 0$), где L_1 — постоянная, не зависящая от λ . Поэтому и при $\operatorname{ctg} \alpha < 0$, $\Phi_1^*(\lambda) \in H_2^{(+)}$. Отсюда по указанной выше теореме Палей и Винера будем иметь

$$\text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1^*(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = 0 \quad \text{при} \quad x > 0,$$

что эквивалентно формуле (2.12').

Аналогично при $\operatorname{ctg} \alpha = 0$, $\Phi_2^*(\lambda) = \Phi_2(\lambda) \in H_2^{(-)}$, а если $\operatorname{ctg} \alpha < 0$, то функция $\Phi_2^*(\lambda)$ голоморфна в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda < 0$ и $|\Phi_2^*(\lambda)| \leq L_2 |\Phi_2(\lambda)|$, ($\operatorname{Im} \lambda < 0$), где L_2 — постоянная, не зависящая от λ . Поэтому и при $\operatorname{ctg} \alpha < 0$, $\Phi_2^*(\lambda) \in H_2^{(-)}$ и по той же теореме Палей и Винера получим

$$\text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2^*(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = 0, \quad x > 0,$$

что эквивалентно формуле (2.12'').

б) Пусть $\operatorname{ctg} \alpha > 0$, тогда функция $\Phi_1^*(\lambda)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$ кроме точки $\lambda = i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha$, где она имеет простой полюс с главной частью

$$\frac{2i\sqrt{1+a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha \Phi_1(i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha)}{\lambda - i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Составим функцию

$$\Psi_1(\lambda) = \Phi_1^*(\lambda) - \frac{2i\sqrt{1+a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha \Phi_1(i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha)}{\lambda - i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha} \quad (2.14)$$

которая голоморфна при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и, как нетрудно убедиться, принадлежит классу $H_2^{(+)}$. Поэтому по теореме Палей и Винера

$$\text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = 0, \quad x > 0, \quad (2.15)$$

т. е.

$$\text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(\lambda) e^{i\omega_2 \lambda x} d\lambda = 0, \quad x > 0. \quad (2.15')$$

Но $\Phi_1^*(\lambda) \in L_2(-\infty, +\infty)$, следовательно по (2.14) и (2.15'), при $x > 0$

$$\begin{aligned} \text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1^*(\lambda) e^{i\omega_1 x \lambda} d\lambda = \\ = 2i \sqrt{1 + a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha \Phi_1(i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_1 x \lambda}}{\lambda - i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.15'')$$

Заметив теперь, что при $\operatorname{ctg} \alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_1 x \lambda}}{\lambda - i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha} d\lambda = 2\pi i e^{-x \operatorname{ctg} \alpha}, \quad x > 0,$$

из (2.15'') получим формулу (2.13').

Аналогично, при $\operatorname{ctg} \alpha > 0$, функция $\Phi_2^*(\lambda)$ голоморфна при $\operatorname{Im} \lambda < 0$, кроме точки $\lambda = -i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha$, где она имеет простой полюс с главной частью

$$\frac{-2i \sqrt{1 + a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha \Phi_2(-i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha)}{\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Обозначая

$$\Psi_2(\lambda) = \Phi_2^*(\lambda) + \frac{2i \sqrt{1 + a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha \Phi_2(-i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha)}{\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha},$$

получим функцию $\Psi_2(\lambda) \in H_2^{(-)}$. Следовательно по теореме Палей и Винера

$$\text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(\lambda) e^{-i\omega_2 x \lambda} d\lambda = 0, \quad x > 0. \quad (2.16)$$

Заметив, что $\Phi_2^*(\lambda) \in L_2(-\infty, +\infty)$, из (2.16) получим, при $x > 0$

$$\begin{aligned} \text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2^*(\lambda) e^{-i\omega_2 x \lambda} d\lambda = \\ = -2i \sqrt{1 + a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha \Phi_2(-i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega_2 x \lambda}}{\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Но при $\operatorname{ctg} \alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega_2 x \lambda}}{\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha} d\lambda = -2\pi i e^{-x \operatorname{ctg} \alpha},$$

поэтому из (2.17) следует формула (2.13'').

2°. Докажем теперь вторую основную теорему этой работы, представляющую собой перенесение результата теоремы 1 на пространство функций $L_2(0, +\infty)$.

Теорема 2. Если $f(x)$ — произвольная функция из класса $L_2(0, +\infty)$, то существует функция $F(\lambda) \in L_2^{(2)}(-\infty, +\infty)$ такая, что интегралы

$$F(\lambda, z) = \int_0^z f(t) W(t, \lambda) dt \quad (2.18)$$

сходятся к $F(\lambda)$ в смысле

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda) - P(\lambda, z)|^2 |\Omega(\lambda)| d\lambda = 0. \quad (2.19)$$

а) При $\operatorname{ctg} \alpha \leq 0$

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 + a_0^2}} \text{l.i.m.}_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^z \frac{F(\lambda) \Phi(x, \lambda) \lambda^2 d\lambda}{\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + i a_0 \lambda \sin 2\alpha}.$$

б) При $\operatorname{ctg} \alpha > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 + a_0^2}} \text{l.i.m.}_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^z \frac{F(\lambda) \Phi(x, \lambda) \lambda^2 d\lambda}{\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + i a_0 \lambda \sin 2\alpha} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha \sqrt{1 + a_0^2}} \left[\omega_1^2 F(-i \omega_1 \operatorname{ctg} \alpha) + \omega_2^2 F(i \omega_2 \operatorname{ctg} \alpha) \right] e^{-x \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (2.20')$$

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы была доказана выше (лемма 2). Далее мы будем опираться на следующие формулы, которые следуют из (2.5) и (2.6) согласно теореме Планшереля.

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{z \rightarrow +\infty} \frac{\omega_2}{2\pi} \int_{-\infty}^z \Phi_1(\lambda) e^{-i \omega_2 x \lambda} d\lambda, \quad \text{на } (0, +\infty), \quad (2.21')$$

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{z \rightarrow +\infty} \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\infty}^z \Phi_2(\lambda) e^{i \omega_1 x \lambda} d\lambda, \quad \text{на } (0, +\infty). \quad (2.21'')$$

а) Пусть $\operatorname{ctg} \alpha \leq 0$, тогда из (2.11), (3.12') и (2.12'') имеем:

$$\text{l.i.m.}_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^z \Phi_1(\lambda) \frac{\lambda \sin \alpha + i \omega_1 \cos \alpha}{\lambda \sin \alpha - i \omega_2 \cos \alpha} e^{i \omega_1 x \lambda} d\lambda = 0, \quad \text{на } (0, +\infty), \quad (2.22')$$

$$\text{l.i.m.}_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^z \Phi_2(\lambda) \frac{\lambda \sin \alpha - i \omega_2 \cos \alpha}{\lambda \sin \alpha + i \omega_1 \cos \alpha} e^{-i \omega_2 x \lambda} d\lambda = 0, \quad \text{на } (0, +\infty). \quad (2.22'')$$

Умножим (2.21') на $\pi \omega_1^2$, а (2.12') на $\frac{\omega_2}{2}$ и результаты сложим. Тогда по (2.1) будем иметь

$$\pi\omega_1^2 f(x) = \text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(\lambda) \frac{\lambda \Phi(x, \lambda)}{\lambda \sin \alpha - i\omega_2 \cos \alpha} d\lambda, \quad \text{на } (0, +\infty). \quad (2.23')$$

Аналогично умножая (2.21'') на $\pi\omega_2^2$, а (2.12'') на $\frac{\omega_1}{2}$, в силу (2.1) получим

$$\pi\omega_2^2 f(x) = \text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_2(\lambda) \frac{\lambda \Phi(x, \lambda)}{\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha} d\lambda, \quad \text{на } (0, +\infty). \quad (2.23'')$$

Далее, заметим, что в силу (2.9) и (1.9)

$$\begin{aligned} F(\lambda) \Omega(\lambda) &= \frac{\omega_1}{2} \Phi_2(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha} + \\ &+ \frac{\omega_2}{2} \Phi_1(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda \sin \alpha - i\omega_2 \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Умножая (2.23') на $\frac{\omega_2}{2}$, а (2.23'') на $\frac{\omega_1}{2}$ и складывая, из (2.24) найдем

$$\frac{\pi}{2} (\omega_1 + \omega_2) f(x) = \text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(\lambda) \Phi(x, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda, \quad \text{на } (0, +\infty),$$

т. е. — формулу (2.20) теоремы.

б) Пусть $\text{ctg } \alpha > 0$, тогда из (2.11) и (2.13'), (2.13'') имеем формулу

$$\begin{aligned} \text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(\lambda) \frac{\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha}{\lambda \sin \alpha - i\omega_2 \cos \alpha} e^{i\omega_1 x \lambda} d\lambda = \\ = -4\pi \sqrt{1 + a_0^2} \text{ctg } \alpha e^{-x \text{ctg } \alpha} \Phi_1(i\omega_2 \text{ctg } \alpha), \quad \text{на } (0, +\infty), \end{aligned} \quad (2.25')$$

$$\begin{aligned} \text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_2(\lambda) \frac{\lambda \sin \alpha - i\omega_2 \cos \alpha}{\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha} e^{-i\omega_2 x \lambda} d\lambda = \\ = -4\pi \sqrt{1 + a_0^2} \text{ctg } \alpha e^{-x \text{ctg } \alpha} \Phi_2(-i\omega_1 \text{ctg } \alpha). \end{aligned} \quad (2.25'')$$

Умножая (2.21) на $\pi\omega_1^2$, а (2.13') на $\frac{\omega_2}{2}$, согласно (2.1) получим

$$\begin{aligned} \pi\omega_1^2 f(x) &= \text{l.i.m.}_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(\lambda) \frac{\lambda \Phi(x, \lambda)}{\lambda \sin \alpha - i\omega_1 \cos \alpha} d\lambda + \\ &+ 2\pi\omega_2 \sqrt{1 + a_0^2} \text{ctg } \alpha e^{-x \text{ctg } \alpha} \Phi_1(+i\omega_2 \text{ctg } \alpha), \quad \text{на } (0, +\infty). \end{aligned} \quad (2.26')$$

Аналогично умножая (2.12') на $\pi\omega_2^2$, а (2.13') на $\frac{\omega_1}{2}$, по (2.1) будем иметь

$$\begin{aligned} \pi\omega_2^2 f(x) = \text{l.i.m.} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\lambda) \frac{\lambda \Phi(x, \lambda)}{\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha} d\lambda + \\ + 2\pi\omega_1 \sqrt{1+a_0^2} \operatorname{ctg} \alpha e^{-x \operatorname{ctg} \alpha} \Phi_2(-i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha), \quad \text{на } (0, +\infty). \end{aligned} \quad (2.26'')$$

Наконец, умножая (2.26') на $\frac{\omega_2}{2}$, а (2.26'') на $\frac{\omega_1}{2}$, на основании (2.24) получим формулу

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} (\omega_1 + \omega_2) f(x) = \text{l.i.m.} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \Phi(x, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda + \\ + \pi \sqrt{1+a_0^2} e^{-x \operatorname{ctg} \alpha} \operatorname{ctg} \alpha (\omega_2^2 \Phi_1(i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha) + \\ + \omega_1^2 \Phi_2(-i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha)) \quad \text{на } (0, +\infty). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Но согласно (2.5), (2.6) и (1.24)

$$\begin{aligned} \Phi_1(i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{1+a_0^2} \sin \alpha} F(i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha), \\ \Phi_2(-i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{1+a_0^2} \sin \alpha} F(-i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha), \end{aligned} \quad (2.28)$$

поэтому из (2.27) и (2.28) следует формула (2.20') теоремы.

В заключение отметим, что аналогичные теоремы можно доказывать и в случае, когда ядро преобразования порождается несамосопряженным дифференциальным уравнением вида

$$y'' + (a\lambda + b)y' + (\lambda^2 + c\lambda + d)y = 0,$$

где a, b, c, d — вещественные постоянные.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 24 IV 1957

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ՄԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Հայտնի է [1], որ

$$y'' + \lambda^2 y = 0$$

համարժեցանքը լուծվում է

$$y'(0) = \theta y(0), \quad (\operatorname{Im} \theta = 0)$$

եզրային պայմանի դեպքում, հանդիսանում է ֆուրյեյի ձևափոխության կորիզ:

Այս աշխատության մեջ հետազոտվում են այն ինտեգրալ ձևափոխությունները, որոնք ծագում են

$$y'' - i2a_0\lambda y' + \lambda^2 y = 0, \quad (a_0 > 0)$$

ոչ ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ հավասարման լուծումից,

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$$

եզրային պայմանի դեպքում, որտեղ α — կամայական իրական պարամետր է: Ապացուցվում է, որ եթե $\Phi(x, \lambda)$ դերսիշյալ խնդրի լուծումն է, ապա ձևափոխելով $f(x) \in L_1(0, +\infty)$ կամ $L_2(0, \infty)$ ֆունկցիան $e^{-i2a_0\lambda x} \Phi(x, \lambda)$ կորիզի օգնությամբ, կարելի է ձևափոխության շրջումն իրականացնել $\Phi(x, \lambda)$ կորիզի օգնությամբ: Այդպիսով ստացված արդյունքները հավանաբար հանդիսանում են $a_0 = 0$ դեպքի համար հայտնի կլասիկ արդյունքի ամենարևակալ ընդհանրացումը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы, М., 1954 (стр. 220—221).
2. Тамаркин Я. Д. а) О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917. б) Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions, Math. Zeitscher. 27 (1927), 1—54.
3. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 87 (1957), 11—14.
4. Арутюнян Н. Х., Джрбашян М. М., Александрян Р. А. Об одном методе решения гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную: Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, X, № 1 (1957).
5. Paley R. and Wiener N. Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934, p. 8.