

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. И. Мелковян

Решение задачи струйного обтекания плоского затвора  
с учетом силы тяжести по методу  
источников и стоков

1. Общие замечания

Теоретическое решение, построенное на базе теории отрывного обтекания тел, находит свое применение в различных отраслях техники при решении важных практических задач.

Решением этого вопроса занималось большое число исследователей, в основном с целью освещения ряда вопросов аэродинамики.

В последнее время методы теории струй были использованы для решения практических задач гидротехнического строительства, судостроения, глиссирования и т. п. [1, 2, 3, 4, 5].

Отметим, что при использовании методов гидромеханики в отдельных задачах практики важнейшим условием для получения реальной картины движения жидкости, является построение теоретической модели, соответствующей действительной схеме течения.

В этих задачах движение жидкости принимается плоским и потенциальным. Следовательно, рассматриваемый реальный поток должен быть ограничен в решении лишь той зоной, в которой отсутствуют вихревые движения жидкости. Наряду с этим рассматривается такая схема движения, когда силами внутреннего трения по сравнению с силами инерции можно пренебречь. Как известно, такого рода решения с точностью до толщины пограничного слоя довольно удовлетворительно отвечают реальной картине движения. Вместе с тем громадное значение для получения правильных результатов имеет соответствие граничных условий принимаемой теоретической модели с реальным потоком. Однако в работах ряда авторов имеют место такого рода несоответствия. Так, например, на приводимых ими схемах обтекания неравнобоких клиньев, ориентированных под различными углами наклона к оси потока и обтекаемых как безграничными, так и ограниченными потоками, а также в случае течения жидкости в тройнике, вершина обтекаемого острого угла принимается за критическую точку потока, скорость в которой равна нулю.

Указанные предположения справедливы лишь в случае симме-

тричного расположения клиньев, так как при несимметричном расположении вершина клина может превратиться в точку срыва потока.

Зачастую не учитывается возможность отрыва струй от боковых стенок реального потока при его расширении в направлении течения и т. п.

Теоретическое рассмотрение вопроса о потенциальном движении жидкости приводит к заключению о невозможности безотрывного обтекания потоком острых кромок тел без понижения давления ниже допустимого предела, т. е. о неизбежности возникновения отрыва. Гидромеханическое решение задачи обтекания тупого угла показывает, что в его вершине скорость равна бесконечности. Последнее обстоятельство указывает на невозможность безотрывного обтекания острых кромок.

При отрыве жидкости от острой кромки, образующиеся струйные течения характеризуются вполне определенными кинематическими условиями вдоль граничных линий тока, ограничивающих струю. Правильное теоретическое обоснование этих условий и их соответствие с реальными потоками также является одним из основных факторов создания модели действительного течения. Данная работа является продолжением работы автора (Труды ЛИИВТ-а, XXIII, 1956), поэтому остановимся на некоторых основных данных, которые были отмечены ранее.

Основной задачей данной работы является иллюстрация метода источников и стоков на частном примере обтекания плоского затвора (с учетом действия силы тяжести). Этот метод позволяет в отдельных конкретных случаях подойти к более эффективному решению задачи по определению коэффициента сжатия струи. Сопоставление решения, опубликованного в XXIII сборнике Трудов ЛИИВТ-а с предлагаемым, говорит о несомненной простоте последнего.

## 2. Анализ граничных условий потока, обтекающего плоский затвор

В указанной выше статье вопросу изменения скоростей вдоль границ потока было уделено достаточно внимания. Однако, исходя из общих соображений, можно отметить, что при истечении из отверстия в атмосферу, на границе струи  $CD$ , рассматриваемой от отверстия до сжатого сечения, действует атмосферное давление. Последнее обстоятельство позволяет написать для линии тока  $CD$  уравнение Бернулли:

$$\frac{v^2}{2g} + y = C$$

(так как  $\frac{P_{ат.}}{\gamma} = \text{const}$ ). Здесь  $v$ —скорость вдоль  $CD$ ,  $y$ —ордината граничной линии тока.

Из этого равенства видно, что скорость вдоль границы струи является величиной постоянной в случае истечения ее в атмосферу.

Отсюда следует, что построение решения в этом частном случае, строго говоря, не может быть осуществлено по методу классической гидромеханики, разработанному Гельмгольцем и Кирхгофом.

Однако ранее уже указывалось (XXIII выпуск Трудов ЛИИВТ-а), что при условии

$$\frac{\partial}{\partial s} \left| \frac{v^2}{2g} + \frac{P_{ат.}}{\gamma} \right| \gg \frac{\partial |y|}{\partial s}$$

изменением скоростей вдоль линии тока  $s$  можно пренебречь. Там же отмечалось, что последнее неравенство справедливо в случае больших

относительных напоров  $\zeta = \frac{z_0^*}{b_0}$  (фиг. 1). При  $\zeta_0 = 1$  это неравенство,

как показал приближенный количественный анализ, справедливо для малых значений относительных открытий затвора  $x = \frac{b_2}{b_0}$ .

Приняв, что скорость в точке  $C$  равна  $v_2$ , а в сечении  $DD_1 - v_1$  (при этом очевидно, что  $v_2 < v_1$ ), приближенно было получено, что

$\sigma = \frac{v_2}{v_1}$  изменяется в случае  $\zeta_0 = 1$  в пределах от  $\sigma = 0,8$  до  $\sigma = 1$ , в

зависимости от степени открытия затвора  $x$ .

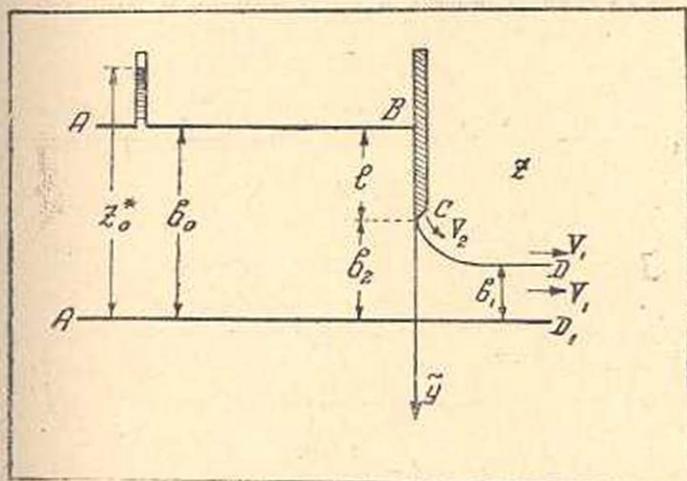
С помощью уравнений Бернулли, записанных для линий токов  $AD$  и  $CD$ , и уравнения неразрывности, было выведено равенство:

$$x = \frac{\zeta_0 - \frac{b_1}{b_0}}{1 - \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^2} (1 - \sigma^2) + \frac{b_1}{b_0}. \quad (1)$$

где

$$x = \frac{b_2}{b_0}, \quad \zeta = \frac{z_0^*}{b_0} \text{ и } \sigma = \frac{v_2}{v_1}.$$

Для определения зависимости  $x = f\left(\frac{b_1}{b_0}\right)$  с учетом силы тяжести



Фиг. 1.

( $y \neq \text{const}$ ) необходимо иметь еще одно уравнение  $x = F\left(\sigma; \frac{b_1}{b_0}\right)$ , что позволит исключить из зависимости (1) параметр  $\sigma$ .

### 3. Определение зависимости $x = F\left(\sigma; \frac{b_1}{b_0}\right)$ с помощью метода источников и стоков

#### а) Построение плана скоростей

Для определения зависимостей  $x = F\left(\sigma; \frac{b_1}{b_0}\right)$  построим в области комплексного переменного  $v_x + iv_y$  план (или годограф) скоростей рассматриваемого течения, представленного на фиг. 1 комплексной областью  $z = x + iy$ . Как известно,  $w = \varphi + i\psi$ .

Здесь  $w$  — функция комплексного потенциала,

$\varphi$  — функция потенциала скоростей,

$\psi$  — функция тока.

Известно также, что

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = |v| e^{-i\theta}, \quad (2)$$

где  $v_x$  и  $v_y$  — проекции вектора скорости любой точки потока, а  $\theta$  — угол наклона его по отношению к оси  $ox$ .

Наряду с этим отметим, как и прежде, что из уравнения Бернулли, записанного для линии тока  $CD$ , справедливо следующее равенство:

$$v_1^2 - v_2^2 = 2g(b_2 - b_1) = n^2. \quad (3)$$

Здесь введено обозначение  $n = \sqrt{2g(b_2 - b_1)}$ .

Из равенства (2) следует, что зависимость между скоростями  $v_1$  и  $v_2$  и величиной  $n$  подчиняется известной связи, существующей между полуосями эллипса и его полуфокусным расстоянием. Исходя из этих соображений, сделаем предположение о том, что изменение скоростей вдоль границы струи подчиняется эллиптическому закону. Тогда годограф скоростей может быть представлен в виде четверти эллипса (фиг. 2) с большой полуосью равной  $v_1$ , малой полуосью равной  $v_2$ , и полуфокусным расстоянием равным  $n$ , которое может быть записано в таком виде:

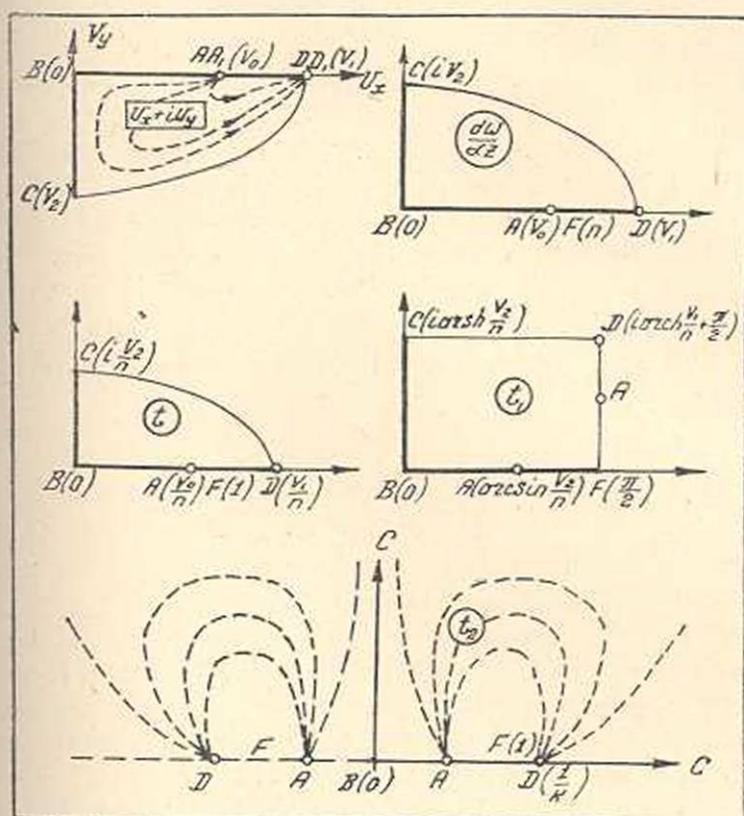
$$n = v_1 \sqrt{1 - \epsilon^2}. \quad (4)$$

Возьмем зеркальное отображение полученной области и разделим его на величину  $n$ .

Обозначим эту область ограниченную эллипсом с полуфокусным расстоянием равным 1, буквой  $t$ .

Нетрудно видеть, что на основании (2)

$$t = \frac{1}{n} \frac{dw}{dz}. \quad (5)$$



Фиг. 2.

Очевидно также, что выражение

$$t = \sin t_1 \quad (6)$$

реализует конформное отображение области  $t$  на прямоугольник плоскости  $t_1$ , шириной, равной  $\frac{\pi}{2}$ , и высотой, равной

$$i \operatorname{arsh} \frac{v_2}{n} \text{ или } i \operatorname{arch} \frac{v_1}{n}.$$

Подставив выражение (6) в уравнение (5) и решив его относительно  $z$ , получим выражение для комплексной координаты любой точки потока, обтекающего плоский щит, в виде:

$$z = \frac{1}{n} \int \frac{dw}{\sin t_1} + A. \quad (7)$$

Остается теперь отобразить прямоугольник области  $t_1$  на полуплоскость  $t_2$  и определить  $w = f(t_2)$ . Тогда уравнение (7) может быть приведено к квадратуре, что и было проделано ранее в цитированной выше статье.

Однако решение данной задачи указанным способом приводит к сочетанию гиперболических и эллиптических функций, разложение которых в ряд крайне затруднительно. Численное же интегрирование

указанного выражения представляет собой работу, требующую большой затраты времени и труда. Все это наводит на мысль об изыскании способа, позволяющего записать выражение (7) в более простом виде.

Для этого остановимся подробнее на физическом смысле отдельных элементарных гидромеханических понятий.

б) Физическая сущность особенностей и их связь с рассматриваемым течением

Известно, что выражение функции комплексного потенциала для системы источников и стоков можно в комплексной плоскости представить так:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} q_k (t_2 - a_k).$$

где  $q_k$  — расход или интенсивность источника или стока,  $a_k$  — координата точки расположения его.

Очевидно, что бесконечное число одноименных особенностей, симметрично лежащих на одной прямой, делит всю плоскость на бесконечное число вертикальных полос, ограниченных по краям вертикальными линиями токов, проходящими через точки разветвления. При этом эти точки будут находиться между особенностями.

Попробуем далее увязать действительную картину обтекания плоского щита с понятием источника и стока. На фиг. 3 представлена гидродинамическая сетка этого течения, причем, как нетрудно видеть, течение жидкости происходит от сечения  $AA_1$  к сечению  $DD_1$ , которые расположены в области  $z$  в точках  $-\infty$  и  $+\infty$ .

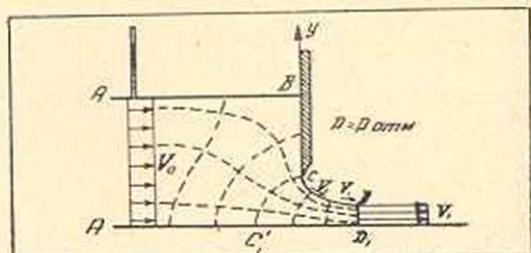
Таким образом, поток жидкости в области течения  $z$  ограничен стенками, плоскостью щита и границей струи.

Движение потока происходит от источника, расположенного в точке  $AA_1$  с координатой  $-\infty$ , к стоку, расположенному в  $DD_1$  с координатой  $+\infty$ .

При этом граничные линии тока, следуя вдоль твердых стенок и отрываясь от острой кромки, движутся по некоторой кривой, форму которой можно будет в дальнейшем определить.

Нетрудно видеть, что построенный годограф скоростей представляет собой область внутренности эллипса с источником, расположенным в точке  $AA_1 (v_0)$ .

Интенсивности указанных источника и стока должны соответствовать расходу жидкости, протекающей через отверстие щита. Ясно



Фиг. 3.

также, что течение в области плана скоростей будет осуществляться от точки  $A$  к точке  $D$ , образуя при этом гидродинамическую сетку.

Применение в дальнейшем конформного отображения этой области на прямоугольник устанавливает соответствие между точками отображенных областей.

В этом случае гидродинамическая сетка одной области переходит в геометрически подобную сетку другой области, и понятие течения от источника к стоку во вновь полученной области по-прежнему остается в силе.

Исходя из этих соображений, можно по-прежнему прийти к заключению о течении жидкости от точки  $A$  к точке  $D$  в области  $t_1$  (прямоугольник). Вдоль граничной линии тока жидкость будет двигаться влево от точки  $A$  к точке  $D$  через  $B$  и  $C$ , а также вправо через точку  $F$  в  $D$ , что соответствует граничной линии  $ABCD$  и  $A_1D_1$  на фиг. 3. Остальные линии токов должны полностью заполнять внутренность прямоугольника.

#### в) Составление зависимости $\omega = f(t_1)$

Из уравнения (7) видно, что его решение возможно в случае, если значение входящей в него функции  $\omega$  будет выражено через  $t_1$ . При этом видно, что для получения искомого течения сток в прямоугольнике  $FBCD$  должен быть расположен в точке  $D$  с координатой

$$\frac{\pi}{2} + i \operatorname{arch} \frac{v_1}{n} \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{2} + i \operatorname{arsh} \frac{v_2}{n}.$$

Источник, расположенный в точке  $A$ , будет менять свое местоположение вдоль сторон  $BF$  и  $FD$  в зависимости от степени открытия затвора.

Если нам теперь удастся расположить систему источников и стоков в плоскости  $t_1$  таким образом, чтобы линии токов их соответствовали границам полученного прямоугольника, то определение  $\omega$  не представит никакой трудности.

Очевидно, что если разместить систему особенностей в плоскости  $t_1$  так, как это указано на фиг. 4, то в дальнейшем решение задачи будет вполне определенным. Такое построение вытекает также из представления об эллиптических функциях, являющихся двойкопериодическими.

Введем следующие обозначения:  $i\omega_2$  — вертикальная, а  $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$  — горизонтальная стороны прямоугольника.  $m = p + iq$  — ордината точки  $A$  (в общем случае величина комплексная).

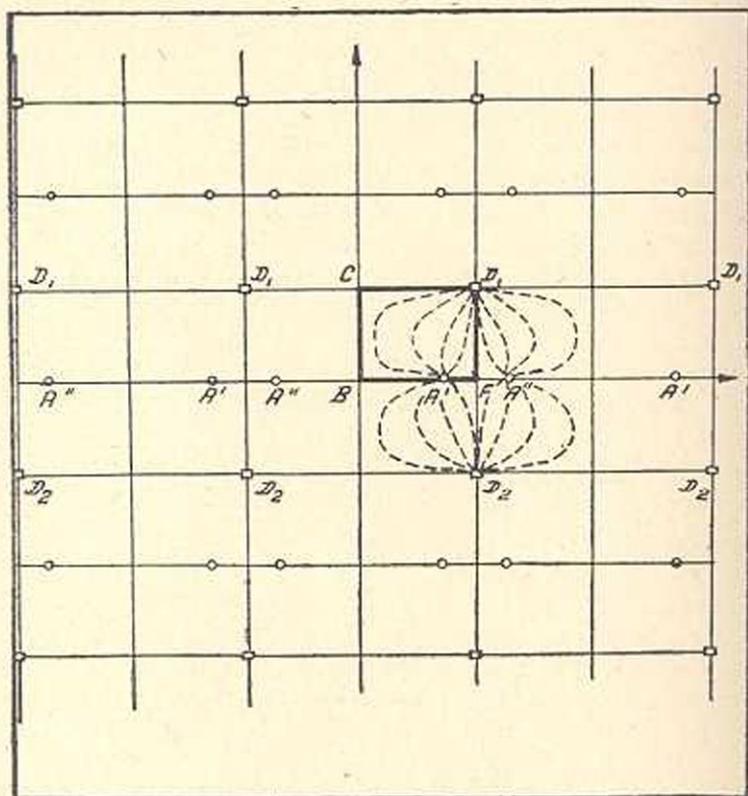
Запишем выражение характеристической функции для одного ряда источников и стоков:  $\omega'_{A_1}$ ,  $\omega''_{A_1}$ ,  $\omega_{D_1}$ . Щтрихи у значений  $\omega_{A_1}$  показывают, что в первом случае взяты источники расположенные в точках  $A'$  (см. фиг. 4), а во втором — в точках  $A''$ .

Очевидно также, что  $w_1$  — характеристическая функция, записанная для особенностей, входящих в две горизонтальные полосы прямоугольников. При этом:

$$w_1 = w'_{A_1} + w^*_{A_1} + w_{D_1} + w_{D_2}. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} w'_{A_1} &= \frac{Q}{\pi} \left\{ \ln \frac{[t_1 - (p + iq)]\pi}{2\omega_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{t_1 - (p + iq) - 2k\omega_1}{-2k\omega_1} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{t_1 - (p + iq) + 2k\omega_1}{2k\omega_1} \right\} = \\ &= \frac{Q}{\pi} \ln \frac{[t_1 - (p + iq)]\pi}{2\omega_1} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{[t_1 - (p + iq)]^2}{(2k\omega_1)^2} \right\}. \end{aligned}$$



Фиг. 4.

На основании выражения  $\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right)$

$$w'_{A_1} = \frac{Q}{\pi} \ln \sin (t_1 - p - iq).$$

По аналогии с этим

$$w_{A_1} = \frac{Q}{\pi} \ln \sin(t_1 + p + iq) + C_1,$$

$$w_{D_2} = \frac{2Q}{\pi} \ln \cos(t_1 + i\omega_2) + C_2,$$

$$w_{D_1} = -\frac{2Q}{\pi} \ln \cos(t_1 - i\omega_2) + C_3.$$

Из (8) следует, что

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{Q}{\pi} [\operatorname{ctg}(t_1 - m_1) + \operatorname{ctg}(t_1 + m_1) + 2\operatorname{tg}(t_1 - i\omega_2) + 2\operatorname{tg}(t_1 + i\omega_2)]. \quad (9)$$

Здесь  $m_1 = p + iq$ .

Теперь остается произвести суммирование по вертикали. Тогда дифференциал характеристической функции для всех рядов плоскости, после ряда тригонометрических преобразований, примет вид:

$$\begin{aligned} dw = \frac{2Q \sin t_1}{\pi} & \left[ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d \cdot \sin t_1}{\cos^2 i(2k-1)\omega_2 - \sin^2 t_1} - \right. \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d \cdot \sin t_1}{\sin^2 [p + i(2k\omega_2 + q)] - \sin^2 t_1} - \\ & \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d \cdot \sin t_1}{\sin^2 [p - i(2k\omega_2 - q)] - \sin^2 t_1} \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Зависимости, входящие в (10), обозначим следующим образом:

$$\cos i(2k-1)\omega_2 = \operatorname{ch}(2k-1)\omega_2 = a_{1k}.$$

$$\sin(p + iq + i2k\omega_2) = a_{2k},$$

$$\sin(p + iq - i2k\omega_2) = a_{3k},$$

$$p + iq = \operatorname{arcsin} \frac{v_0}{n} = \operatorname{arc} \sin \frac{b_1}{b_0 \sqrt{1 - \sigma^2}} = \operatorname{arcsin} m.$$

### г) Интегрирование уравнения (7)

Подставляя (10) с введенными обозначениям и в (7), проинтегрировав в пределах от 0 до  $\sin i\omega_2$  и сделав подстановку  $\sin t_1 = y$ , получим:

$$\begin{aligned} iI = \frac{2b_1}{\pi \sqrt{1 - \sigma^2}} & \left[ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_{1k}} \operatorname{arth} \frac{y}{a_{1k}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_{2k}} \operatorname{arth} \frac{y}{a_{2k}} - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_{3k}} \operatorname{arth} \frac{y}{a_{3k}} \right] \sin i\omega_2. \quad (11) \end{aligned}$$

Если в последнем уравнении обозначим верхний предел

$$y_1 = \sin i\omega_2 = i \operatorname{sh} \omega_2 = iu,$$

то окончательно будем иметь, относя обе части равенства (11) к  $b_0$

$$\frac{l}{b_0} = \left| \frac{2b_1}{b_0\pi\sqrt{1-\sigma^2}} \left( 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{u}{a_{1k}}}{a_{1k}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{u}{a_{2k}}}{a_{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{u}{a_{3k}}}{a_{3k}} \right) \right|. \quad (12)$$

В выражении (12) две последние суммы содержат величины  $a_{2k}$  и  $a_{3k}$ , которые в общем случае могут быть комплексными. Разложим их на действительные и мнимые части.

Тогда

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin m \pm 2k\omega_2) &= m \operatorname{ch} 2k\omega_2 \pm i\sqrt{1-m^2} \operatorname{sh} 2k\omega_2 = \\ &= m \operatorname{ch} 2k\omega_2 \mp \sqrt{m^2-1} \operatorname{sh} 2k\omega_2. \end{aligned}$$

Очевидно, что в случае, если  $m^2 > 1$ , то  $a_{3k}$  и  $a_{2k}$  действительны; в противном случае величины, входящие под знак суммы, подлежат также разложению на действительную и мнимую части. При этом, так как  $\frac{l}{b_0}$  в (12) действительно, то мнимые части разложения можно откинуть

Таким образом, в случае

$$m^2 > 1$$

(12) принимает следующий вид:

$$\frac{l}{b_0} = 1 - \frac{b_2}{b_0} = \left| \frac{2b_1}{b_0\pi\sqrt{1-\sigma^2}} \left( 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_{1k}} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_{1k}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k - b_k} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_k - b_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k + b_k} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_k + b_k} \right) \right|,$$

где

$$a_k = m \operatorname{ch} 2k\omega_2,$$

$$b_k = \sqrt{m^2-1} \operatorname{sh} 2k\omega_2.$$

Введя обозначения

$$\beta_1 = \frac{b_1}{b_0}, \quad x = \frac{b_2}{b_0}, \quad r = \frac{2}{\pi\sqrt{1-\sigma^2}},$$

получим:

$$x = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{u}{m} + r\beta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{a_{1k}} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_{1k}} - \frac{1}{a_k - b_k} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_k - b_k} - \frac{1}{a_k + b_k} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_k + b_k} \right)$$

$$-\frac{1}{a_k + b_k} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_k + b_k} \Big). \quad (13)$$

Напомним, что здесь:

$$u = \operatorname{sh} \omega_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}}; \quad a_{1k} = \operatorname{ch} (2k - 1) \omega_2; \quad a_{2k} = m \operatorname{ch} 2k \omega_2;$$

$$\omega_2 = \operatorname{arsh} u; \quad b_k = \sqrt{m^2 - 1} \operatorname{sh} 2k \omega_2;$$

$$m = \frac{\beta_1}{\sqrt{1 - \sigma^2}}; \quad r = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \sigma^2}}.$$

В предлагаемом ряде возможно ограничиться двумя членами, что дает точность в пятом знаке после запятой.

В случае  $m^2 < 1$  формула для  $x$  несколько усложняется. Не приводя промежуточных выкладок, о которых говорилось ранее, запишем ее в окончательном виде:

$$x = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{u}{m} + r \beta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{a_{1k}} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_{1k}} - \frac{1}{u d_k} \left( b_k \operatorname{arctg} \frac{2b_k}{d_k - u^2} - \frac{c_k}{2} \ln \frac{d_k + u^2 + 2c_k}{d_k + u^2 - 2c_k} \right) \right], \quad (14)$$

где

$$a_{1k} = \operatorname{ch} (2k - 1) \omega_2,$$

$$b_k = u m \operatorname{ch} 2k \omega_2; \quad d_k = m^2 + \operatorname{sh}^2 2k \omega_2;$$

$$r = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \sigma^2}}; \quad \frac{u}{m} = \frac{\sigma}{\beta_1}; \quad u = \operatorname{sh} \omega_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}};$$

$$c_k = u \sqrt{1 - m^2} \operatorname{sh} 2k \omega_2.$$

Нетрудно видеть, что в точке  $m = 1$  формулы (13) и (14) должны давать одни и те же значения. Определение величины  $\beta_1$  при  $m = 1$  можно легко получить из выражения  $m = \frac{\beta_1}{\sqrt{1 - \sigma^2}}$ .

Очевидно, что значениям  $m = 1$  соответствует  $\beta_1 = \sqrt{1 - \sigma^2}$ . Кривые, построенные по приведенным выше равенствам в координатной системе  $x$ ;  $\beta_1$ , проходят через начало координат, что вытекает из (13) и (14) при подстановке  $\beta_1 = 0$ . Таким образом, полученные уравнения характеризуют функциональную зависимость  $x = F\left(\sigma; \frac{b_1}{b_0}\right)$  и позволяют при совместном решении их с уравнением (1) определить связь между степенью открытия затвора  $x = \frac{b_2}{b_0}$  и величиной относительного сжатия струи  $\beta_1 = \frac{b_1}{b_0}$ , в случае учета силы тяжести. Последняя учитывается в граничных условиях изменением скорости вдоль линии тока, ограничивающей струю. Полученные уравнения позволяют по-

лучить искомые величины с необходимой точностью. Сходимость рядов в уравнениях (13) и (14) такова, что для требуемых значений  $\sigma$  достаточно было ограничиться первым членом ряда, что давало точность в третьем знаке после запятой.

#### 4. Построение зависимости $x = f\left(\frac{b_1}{b_0}\right)$

Выше уже отмечалось, что построение зависимости  $x = f(\beta_1)$  теряет свой смысл для  $\zeta_0 = \frac{z^*}{b_0}$ , превышающих 2. Поэтому расчет проведем для значений  $\zeta_0 = 1$ , что соответствует истечению жидкости из-под щита в случае наличия свободной поверхности. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$x = \beta_1 + \frac{1 - \sigma^2}{1 + \beta_1} \quad (15)$$

Задаваясь последовательно значениями  $\sigma$ , равными  $1, 0,95, 0,9, 0,8$  и т. п., можно получить семейство помеченных этими значениями кривых, в координатной системе  $\frac{b_2}{b_0} = x$  и  $\beta_1$ . Очевидно, что, как это следует из физического смысла величин  $x$  и  $\beta_1$ , они могут изменяться от 0 до 1, причем  $x$  везде превышает величину отношения  $\beta_1$ , за исключением точек  $\beta_1 = 0$  и  $\beta_1 = 1$ , т. е. когда  $x$  и  $\beta_1$  равны друг другу. Эти точки соответствуют полному открытию и закрытию затвора.

На фиг. 5 указанное семейство кривых проходит выше прямой  $x = \beta_1$ , соответствующей  $\sigma = 1$ .

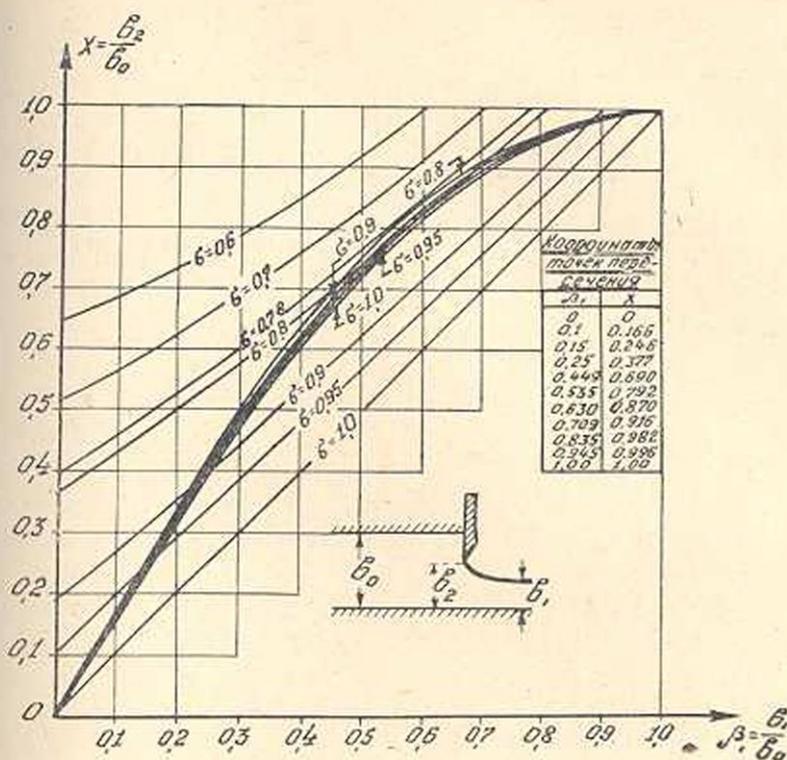
Таблица 1

$\beta_1$	$\sigma = 1$ $x$	$\sigma = 0,95$ $x$	$\sigma = 0,9$ $x$	$\sigma = 0,8$ $x$
1	1,00	0,999	0,998	0,992
0,95	0,988	0,997	0,986	0,990
0,9	0,977	0,989	0,988	0,984
0,8	0,942	0,954	0,954	0,958
0,7	0,897	0,903	0,906	0,912
0,6	0,820	0,827	0,833	0,846
0,5	0,722	0,729	0,738	0,747
0,4	0,605	0,611	—	0,642
0,3	0,465	—	—	—
0,2	0,320	0,3263	0,333	0,342
0,1	0,165	0,166	—	—
0	0	—	0	0

Вычисление второго семейства кривых, соответствующих уравнениям (13) и (14), показало быструю сходимость рядов при принимаемых в расчетах значениях  $\sigma$  (от 1 до 0,7).

Эти кривые, помеченные значениями  $\sigma$  равными 1; 0,95; 0,90 и 0,8, пересекаются с кривыми уравнения (15). Ввиду того, что в рассматриваемом случае обтекания затвора с учетом силы тяжести отношение  $\sigma = \frac{v_2}{v_1}$  колеблется пример-

но в пределах от 0,8 до 1,0, то кривые, помеченные значениями  $\sigma = 0,7$  и меньше, на графике фиг. 5 не пересекаются. В табл. 1 приводятся значения  $x$  при заданных  $\sigma$  и  $\beta_1$ , полученных путем расчетов по уравнениям (13) и (14).



Фиг. 5.

В табл. 2 приводятся значения  $x$  и  $\beta_1$ , полученные в результате графического совмещения семейства кривых, построенных по уравнениям (13), (14) и (15).

В табл. 3 приведены значения коэффициента сжатия струи  $\epsilon = \frac{\beta_1}{x}$  в зависимости от величины открытия затвора в случае учета действия силы тяжести, подсчитанные по результатам данным в табл. 2.

Таблица 2

$\beta_1$	0,0	0,10	0,15	0,23	0,449	0,709	0,885	0,945	1,00
$x$	0,0	0,166	0,246	0,377	0,690	0,916	0,982	0,996	1,00

Таблица 3

$\beta_1$	0	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1,00
$\epsilon$	0,611	0,612	0,616	0,622	0,633	0,644	0,662	0,688	0,722	0,781	0,860	1,00
$\beta_1$	0	0,1	0,15	0,23	0,449	0,709	0,885	0,945	1,00	—	—	—
$\epsilon$	0,611	0,611	0,611	0,612	0,642	0,773	0,901	0,949	1,00	—	—	—

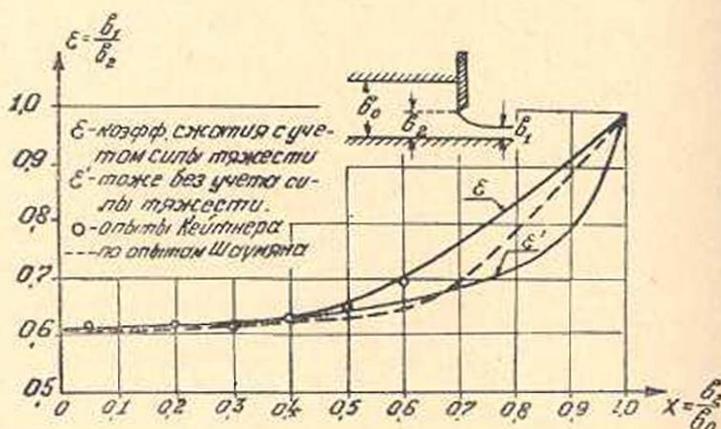
Ниже приводятся значения  $\varepsilon' = \frac{\beta_1'}{x}$  без учета силы тяжести, что соответствует значению  $\sigma = 1$ . Определение последней зависимости было ранее дано рядом авторов: Н. Е. Жуковским, Мизесом, Голубевым, Бетцем, Петерсоном и т. д., однако наиболее полные численные расчеты и сопоставление их результатов с опытами дано у Мизеса [5].

Данные, приведенные в табл. 3, представлены на графике фиг. 6.

Из сопоставления этих данных видно, что коэффициенты сжатия  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon$  совпадают в промежутке  $0 \leq x \leq 0,5$ .

При относительном открытии затвора  $x = \frac{b_2}{b_0}$ , большем 0,5, эффект действия силы тяжести сказывается все более разительно, достигая максимума при значениях  $x = 0,85$ , после чего эта разница начинает убывать. На графике кружками с точкой нанесены данные опытов Кейтнера, заимствованные из *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Н. 24, 1935. Эти опыты вполне удовлетворительно совпадают с теоретической кривой для  $\varepsilon$ .

В диапазоне открытий  $x$  от 0 до 0,5 эти опытные данные подтверждают также правильность теоретической кривой для случая ис-



Фиг. 6.

течения без учета силы тяжести. На этом же графике пунктирной линией нанесена кривая, полученная В. А. Шаумяном в результате обработки проведенных им экспериментов (В. А. Шаумян, *Научные основы орошения*, 1948, стр. 439). Как это следует из графика, данная экспериментальная кривая подтверждает то обстоятельство, что, ввиду действия сил тяжести, величина коэффициента сжатия отклоняется от значений  $\varepsilon$  в зоне больших открытий затвора.

Отметим, что определение в дальнейшем по полученным формулам величины гидродинамического давления, оказываемого потоком на затвор, не представляет никакой трудности. Действительно, подставляя в уравнение

$$\frac{dw}{dz} = |v| e^{i\theta} = n \sin t_1 = v_1 \sqrt{1-\sigma^2} \sin t_1 \quad (16)$$

значение  $1-\sigma^2$ , определенное из уравнения (15),

$$1-\sigma^2 = (x-\beta_1)(1+\beta_1), \quad (17)$$

и определяя для ряда значений открытий затвора, величины  $\beta_1$  и  $v_1$  по построенному графику, можно будет получить уравнение для закона распределения скоростей вдоль плоскости щита:

$$|v| = |iv_1 \sqrt{(x-\beta_1)(x+\beta_1)} \sin t_1|. \quad (18)$$

Используя последнее уравнение и уравнение Бернулли, записанное для линии тока, движущейся вдоль плоскости щита, нетрудно получить эпюры распределения гидродинамического давления, оказываемого потоком на щит. Следует иметь в виду, что для построения этих эпюр величина  $t_1$  должна меняться в пределах от 0 до  $i \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{(x-\beta_1)(1+\beta_1)}}$ .

### 5. Заключение

Данная статья является продолжением работы автора, опубликованной в XXIII выпуске Трудов ЛИИВТа за 1956. Из приведенного в этой статье решения видно, что оно приводит к трудоемким вычислениям, требующим большой затраты времени. В предлагаемой работе задача решена при помощи метода источников и стоков, дающего возможность вычислить искомые значения при помощи быстроходящихся рядов и с требуемой точностью.

Данный метод решения задачи иллюстрируется на частном примере струйного обтекания плоского щита с учетом влияния силы тяжести.

Последнее вводится в решение согласно принимаемому предположению об эллиптическом законе изменения скоростей вдоль границы струи на годографе скоростей.

Графическое сопоставление коэффициента сжатия при обтекании щита с учетом силы тяжести и без учета ее показывает, что закон изменения скоростей вдоль границы струи может быть принят постоянным в случае, если  $\zeta_0 = \frac{z_0^*}{b_0} \gg 2$ .

При  $\zeta_0 = 1$  отношение  $\sigma = \frac{v_2}{v_1}$  колеблется от 0,8 до 1,0. Решение позволяет найти величину гидродинамического давления производимого потоком при обтекании затвора.

## Գ. Ի. ՄԵԼՔՈՅԱՆԸ

ՀԱՐՑ ՓԱԿԱՆԻ ՇԻՔԱՅԻՆ ՇՐՋՆՈՍՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ  
ԾԱՆՐՈՒԹՅԱՆ ՈՒԺԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ՝ ԱՂԲՅՈՒՐՆԵՐԻ  
ԵՎ ՀՈՍՔԵՐԻ ՄԵՔՈՂՈՎ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում արվում է հարթ փականի շիթային շրջնաման խնդրի լուծումը, երբ հաշվի է առնված ծանրություն ուժը և երբ շիթը արտահոսում է մթնոլորտ:

Մնեղիբը լուծված է աղբյուրների և հոսքերի մեթոդով, որը հնարավորություն է տալիս այն լուծել արագ գույքամիտող շարքերի միջոցով, ցանկացած ճշտությամբ: Այս մեթոդի օլտագործումը որոշակի հետաքրքրություն է ներկայացնում բոլոր այն դեպքերում, երբ արագության հոդոգրաֆի (պլանը) կոնֆորմ արտապատկերումը տալիս է ուղղանկյուն:

Նշված մեթոդը ցուցադրվում է մասնավոր դեպքում հարթ փականի շրջնաման խնդրում ծանրության ուժի սակայություն պայմաններում, երբ արագությունների փոփոխման օրենքը շիթի սահմանագծով արագությունների պլանում հնթադրվում է էլիպտական:

Սկզբան գործակցի գրաֆիկական համեմատությունը փականի շրջնաման ժամանակ, ծանրության ուժի սակայություն բացակայություն պայմաններում ցույց է տալիս, որ արագությունների փոփոխման օրենքը կարելի է ընդունել հաստատուն, եթե  $\zeta_0 = \frac{z_0}{b_0}$ ;  $\zeta_0 = 1$  դեպքում և հատկապես  $x = 0,5$  մինչև  $x = 1,0$  դիսպազոնով հարաբերական բացման պայմաններում արագությունների հաստատունությունը խախտվում է և  $\zeta = \frac{v_2}{v_1}$  հարաբերությունը տատանվում է  $0,8$ -ից մինչև  $1,0$ :

Սկզբան գործակցի որոշումը հնարավորություն է տալիս որոշելու հիդրոդինամիկական ճնշումը փականի վրա վերջին շրջնաման ժամանակ և արագությունների դաշտը կառուցելու. գիտվող հասանքի դեպքում:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Маккаев В. М., Коновалов И. М. Гидравлика (1940).
2. Маккаев В. М. Некоторые приложения метода комплексного переменного к задачам гидромеханики. Труды II Всесоюзного матем. съезда (1934). II том, изд. АН СССР (1935).
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики (1950).
4. Биркгоф Г. Гидродинамика. Изд. II, Л. (1954).
5. Mises. Berechnung von Ausfluss und Ueberfallzahlen. V. D. J. (1917).