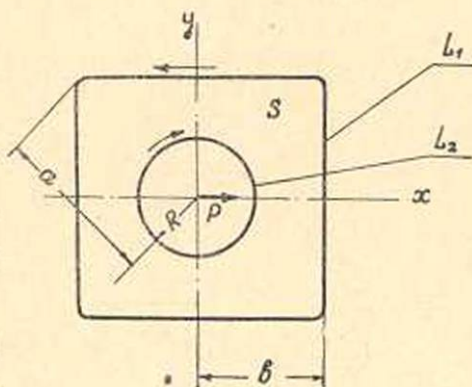


ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Ю. А. Амензаде

Изгиб призматического бруса, ослабленного
 круговой полостью*

1. Рассмотрим изгиб однородного изотропного призматического бруса с круговой полостью, под действием сосредоточенной силы, приложенной вдоль одной из малых осей квадрата (фиг. 1) Обозначим через S двусвязное сечение бруса, ограниченное: извне — криволинейным квадратом L_1 со стороной $2b$ и диагональю $2a$, изнутри — окружностью L_2 радиуса R , расположив сечение S в плоскости $z = x + iy$ и поместив начало координат в его центре, направив координатные оси x и y по малым полуосям криволинейного квадрата L_1 .



Фиг. 1.

Как известно [1], определение напряженного состояния при изгибе бруса сводится к отысканию функции $\varphi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ аналитической в области S , при граничных условиях

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} = 2F_1(t) + D_1 \text{ на } L_1, \quad (1.1)$$

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} = 2F_2(t) + D_2 \text{ на } L_2, \quad (1.2)$$

где t — аффикс точки квадрата L_1 или окружности L_2 ; D_1 и D_2 — вещественные постоянные; одну из них, например D_2 , примем равной нулю.

$$F_j(t) = -\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \frac{y^3}{3} - \frac{\sigma}{2} x^2 y + 2(1 + \sigma) \int x y dx \quad (j = 1, 2). \quad (1.3)$$

Здесь интеграл берется по окружности или по периметру криволинейного квадрата от некоторого произвольно фиксированного начала до переменной точки, σ — коэффициент Пуассона.

2. Возьмем отображающую функцию внешности криволинейного квадрата на внешность единичной окружности в виде

* Эта задача нами ранее была решена [4] методом Д. И. Шермана, при этом решение было сведено к интегральному уравнению Фредгольма.

$$z = A \left(\zeta - \frac{m}{\zeta^3} \right) \left(A = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{9} \right). \quad (2.1)$$

Из равенства (1.3), после некоторых не сложных преобразований, получим

$$F_1(t) = F^*(\tau) = A^3 i \left\{ C_1 \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right) + C_3 \left(\tau^3 - \frac{1}{\tau^3} \right) + \right. \\ \left. + C_5 \left(\tau^5 - \frac{1}{\tau^5} \right) + C_7 \left(\tau^7 - \frac{1}{\tau^7} \right) + C_9 \left(\tau^9 - \frac{1}{\tau^9} \right) \right\} \text{ на } \gamma, \quad (2.2)$$

$$F_2(t) = iR^3 \left\{ e_1 \left(\frac{t}{R} - \frac{R}{t} \right) + e_3 \left[\left(\frac{t}{R} \right)^3 - \left(\frac{R}{t} \right)^3 \right] \right\} \text{ на } L_2. \quad (2.3)$$

Здесь τ — аффикс точки γ , t — аффикс точки L_2 , и, кроме того,

$$e_1 = \frac{3}{8} + \frac{\sigma}{4}, \quad e_3 = -\frac{1}{8},$$

$$C_1 = \frac{1}{8} [3(1-m) - 10m^2 + 2\sigma(1-\sigma m^2)],$$

$$C_3 = -\frac{1}{24} [3 - 2m - 9m^3 + 2m\sigma(2 - 3m^2)],$$

$$C_5 = \frac{m}{8} \left[3m + \frac{1}{5} + \frac{6\sigma}{5} \right],$$

$$C_7 = -\frac{m^2}{56} (5 - 2\sigma), \quad C_9 = -\frac{m^3}{8}.$$

3. Искомую функцию $\varphi(z)$, регулярную в области, занимаемой сечением бруса, будем искать в виде

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \quad (3.1)$$

где $\varphi_1(z)$ — функция, регулярная внутри контура L_1 ,
 $\varphi_2(z)$ — функция, регулярная вне окружности L_2 , и

$$\varphi_2(\infty) = 0.$$

Кроме того, функция $\varphi_2(z)$ представима в виде ряда

$$\varphi_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \left(\frac{R}{z} \right)^k, \quad (3.2)$$

где неизвестные коэффициенты $b_k^{(2)}$ условимся считать чисто мнимыми.

Функцию $\varphi_1(z)$, регулярную внутри кривой L_1 , очевидно следует считать непрерывной вплоть до L_1 . Пусть t — аффикс точки L_1 и τ — аффикс единичной окружности γ в плоскости ζ , отображающей, согласно (2.1), кривую L_1 .

Д. И. Шерман указал способ разложения $\varphi_1(z)$ в ряд по полиномам [2]. Воспроизведем здесь эти рассуждения применительно к взятой отображающей функции (2.1).

Разложим граничное значение функции $\varphi_1(z)$ на криволинейном квадрате L_1 в ряд Фурье на отображенной окружности γ ; полагая $\varphi_1(t) = \varphi_1^*(\tau)$, будем иметь

$$\varphi_1^*(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^{(1)} \tau^k. \quad (3.3)$$

Здесь неизвестные коэффициенты $b_k^{(1)}$ ($k \neq 0$) примем чисто мнимыми, а постоянную $b_0^{(1)}$ — вещественной. Умножим обе части (3.3) на ядро Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t-z}$$

и проинтегрируем по криволинейному квадрату L_1 . Считая точку z находящейся внутри контура L_1 , будем иметь

$$\varphi_1(z) = b_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\tau^k}{t-z} dt. \quad (3.4)$$

Учитывая, что функция $g(z)$, обратная функции (2.1), регулярна вне L_1 , за исключением бесконечно удаленной точки, где она имеет полюс первого порядка, получим, разложив ее в ряд Лорана

$$g(z) = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{4n}, \quad (3.5)$$

где $a_0 = 1$; $a_n = mD_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Здесь коэффициенты D_{n-1} вычисляются один за другим последовательно, согласно рекуррентной формуле:

$$D_0 = a_0^2 = 1; \quad D_{k_1} = -\frac{1}{k_1 a_0} \sum_{k=1}^{k_1} (2k + k_1) a_k D_{k_1-k}, \quad k_1 \geq 1.$$

Таким образом,

$$a_1 = m, \quad a_2 = -3m^2, \quad a_3 = 15m^3, \quad a_4 = -91m^4, \\ a_5 = 612m^5, \quad a_6 = -4389m^6 \text{ и т. д.}$$

Разложение (3.5) справедливо вне окружности, описанной вокруг криволинейного четырехугольника L_1 .

Возводя ряд (3.5) в степень k , будем иметь

$$g^k(z) = \left(\frac{z}{A}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} \left(\frac{A}{z}\right)^{4n}. \quad (3.6)$$

Здесь

$$a_0^{(k)} = a_0^k, \quad a_n^{(k)} = \frac{1}{na_0} \sum_{k_1=1}^n (k_1(k+1)^{-n}) a_{k_1} a_{n-k_1}^{(k)}, \text{ при } n \geq 1.$$

Принимая во внимание (3.6), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g^k(t)}{t-z} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\left(\frac{A}{t}\right)^{4n-k}}{t-z} dt, \quad (3.7)$$

откуда (учитывая, что точка z лежит внутри L_1) найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g^k(t)}{t-z} dt = \sum_{n=0}^{E\left(\frac{k}{4}\right)} a_n^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^{k-4n},$$

где $E\left(\frac{k}{4}\right)$ — наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{k}{4}$.

$$\text{т. е.} \quad E\left(\frac{k}{4}\right) = \frac{k-\beta}{4} \quad (\beta = 0, 1, 2, 3).$$

Таким образом, имеем

$$\varphi_1(z) = b_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \psi_k(z), \quad (3.8)$$

где положено

$$\psi_k(z) = \sum_{n=0}^{E\left(\frac{k}{4}\right)} a_n^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^{k-4n},$$

или

$$\psi_k(z) = \sum_{\nu=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k a_{\frac{k-\nu}{4}}^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^{\nu}. \quad (3.9)$$

Подставим (3.9) в (3.8); тогда

$$\varphi_1(z) = b_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{\nu=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k \left(\frac{R}{A}\right)^{\nu} a_{\frac{k-\nu}{4}}^{(k)} \left(\frac{z}{R}\right)^{\nu}. \quad (3.10)$$

4. Исходя из (3.8) и (3.10) можно, как сейчас покажем, получить выражение для коэффициентов $b_{\nu}^{(1)}$ с отрицательным индексом через коэффициенты $b_{\nu}^{(1)}$ с положительным индексом.

Учитывая отображающую функцию (2.10), будем иметь:

$$\left(\frac{t}{A}\right)^{\nu} = \sum_{e=-3\nu}^{\nu} (-1)^{\frac{\nu-e}{4}} C_{\nu}^{\frac{\nu-e}{4}} m^{\frac{\nu-e}{4}} \tau^e. \quad (4.1)$$

Подставив в выражение (3.10) значение $\left(\frac{t}{A}\right)$ из формулы (4.1), получим

$$\varphi_1^*(\tau) = b_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} P_k(\tau), \quad (4.2)$$

где

$$P_k(t) = \sum_{\nu=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k a_{\frac{k-\nu}{4}}^{(k)} \sum_{e=-3\nu}^{\nu} (-1)^{\frac{\nu-e}{4}} C_{\nu}^{\frac{\nu-e}{4}} m^{\frac{\nu-e}{4}} \tau^e. \quad (4.3)$$

Разобьем внутреннюю сумму (4.3) на две суммы, соответственно с положительными и отрицательными степенями τ (не выписывая выражения под знаками сумм), а именно

$$\sum_{e=-3\nu}^{\nu} \dots = \sum_{e=\nu-4E\left(\frac{\nu}{4}\right)}^{\nu} \dots + \sum_{e=-3\nu}^{\nu-4E\left(\frac{\nu}{4}\right)-4} \dots$$

а) Рассмотрим двойную сумму из (4.3) с положительными степенями τ , записав ее в виде

$$\sum_{\nu=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k \dots \varepsilon_{\nu, k-4e^{(1)}}^{(1)} \sum_{e=\nu-4E\left(\frac{\nu}{4}\right)}^{\nu} \dots \varepsilon_{e, \nu-4e^{(2)}}^{(2)},$$

где

$$\varepsilon_{\nu, k-4e^{(1)}}^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{если } \nu = k - 4e^{(1)}, \\ 0 & \text{если } \nu \neq k - 4e^{(1)}, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{e, \nu-4e^{(2)}}^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{если } e = \nu - 4e^{(2)}, \\ 0 & \text{если } e \neq \nu - 4e^{(2)}, \end{cases}$$

$$\left(e^{(1)} = 0, 1, 2, \dots E\left(\frac{k}{4}\right), \quad e^{(2)} = 0, 1, \dots E\left(\frac{\nu}{4}\right) \right).$$

Из условий

$$\nu = k - 4e^{(1)}, \quad e = \nu - 4e^{(2)}$$

находим

$$e = k - 4(e^{(1)} + e^{(2)}),$$

где

$$e^{(2)} = 0, 1, 2, \dots, E\left(\frac{k - 4e^{(1)}}{4}\right) = 0, 1, \dots, \left(E\left(\frac{k}{4}\right) - e^{(1)}\right);$$

отсюда

$$e_{\min} = k - 4E\left(\frac{k}{4}\right), \quad e_{\max} = k,$$

и при фиксированном e из условия $v = e + 4e^{(2)}$ имеем

$$v_{\min} = e, \text{ а из условия } v = k - 4e^{(1)}, \quad v_{\max} = k.$$

Таким образом, меняя порядок суммирования, получим

$$\sum_{v=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k \dots \varepsilon_{v,k-4e^{(1)}}^{(1)} \sum_{e=v-4E\left(\frac{v}{4}\right)}^v \dots \varepsilon_{e,v-4e^{(2)}}^{(2)} = \sum_{e=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k g_{k,e} \tau^e,$$

где

$$g_{k,e} = \sum_{v=e}^k (-1)^{\frac{v-e}{4}} C_{\frac{v-e}{4}} m^{\frac{v-e}{4}} a_{\frac{k-v}{4}}^{(k)},$$

так, что для суммы с положительными степенями τ , входящей в (4.2), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{e=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k \dots \varepsilon_{v,k-4e^{(1)}}^{(1)} \sum_{e=v-4E\left(\frac{v}{4}\right)}^v \dots \varepsilon_{e,v-4e^{(2)}}^{(2)} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{e=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k g_{k,e} \tau^e. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В (4.4), меняя порядок суммирования, легко найдем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{e=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k \dots \varepsilon_{v,k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^{(1)} \sum_{e=v-4E\left(\frac{v}{4}\right)}^v \dots \varepsilon_{e,v-4e^{(2)}}^{(2)} = \\ = \sum_{e=0}^{\infty} \tau^e \sum_{k=E(e)}^{\infty} g_{k,e} b_k^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из условия $e = k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(2)}$ ($e^{(2)} = 0, 1, 2, \dots, E\left(\frac{k}{4}\right)$),

при заданном e , имеем $k = e + 4e^{(1)}$ ($e^{(1)} = 0, 1, \dots, \infty$).

Принимая, что $k \neq 0$, получим

$$k_{\min} = \begin{cases} E(e) = e, & e \neq 0; \\ 4, & e = 0 \end{cases}; \quad k_{\max} = \infty.$$

в) Рассмотрим теперь сумму с отрицательными степенями τ :

$$\sum_{e=3v}^{v-4E\left(\frac{v}{4}\right)-4} (-1)^{\frac{v-e}{4}} C_v m^{\frac{v-e}{4}} \tau^e = \sum_{e_1=4\left(1+E\left(\frac{v}{4}\right)\right)-v}^{3v} (-1)^{\frac{v+e_1}{4}} C_v m^{\frac{v+e_1}{4}} \frac{1}{\tau^{e_1}}.$$

Здесь правая часть получена изменением знака у индекса суммирования.

Следует иметь в виду, что значение $v=0$ здесь автоматически выпадает, так как при $v=0$, нижний предел для e оказывается больше верхнего; следовательно, $v \geq 1$. В двойной сумме

$$\sum_{v=k-4k\left(\frac{k}{4}\right)}^k a_{k-v}^{(k)} \sum_{e=4E\left(1+\frac{v}{4}\right)-v}^{3v} (-1)^{\frac{v+e}{4}} C_v m^{\frac{v+e}{4}} \frac{1}{\tau^e} \quad (4.6)$$

изменив порядок суммирования; из условия

$$e = 3v - 4e^{(1)} \left(e^{(1)} = 0, 1, \dots, v - E\left(1 + \frac{v}{4}\right) \right),$$

исключая v , находим

$$e = 3k - 4(e^{(1)} + 3e^{(2)}),$$

отсюда

$$e_{\min} = 4\left(1 + E\left(\frac{k}{4}\right)\right) - k,$$

$$e_{\max} = 3k.$$

При заданном e из условия

$$v = \frac{e + 4e^{(1)}}{3},$$

очевидно,

$$v_{\min} = \beta + \frac{e + \beta}{3} \quad (\beta = 0, 1, 2) \text{ и}$$

из условия

$$v = k - 4e^{(2)}; \quad v_{\max} = k.$$

После перестановки порядка суммирования вместо (4.6) будем иметь

$$\sum_{e=k-4E\left(1+\frac{k}{4}\right)}^{3k} \lambda_{k,e} \frac{1}{\tau^e},$$

где

$$\lambda_{k,e} = \sum_{\nu=\beta+\frac{e+\beta}{3}}^k (-1)^{\frac{\nu+e}{4}} C_{\nu}^{\frac{\nu+e}{4}} m^{\frac{\nu+e}{4}} a_{\frac{k-\nu}{4}}^{(k)} \quad (4.7)$$

Изменив порядок суммирования в выражении

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{e=-k+4E\left(1+\frac{k}{4}\right)}^{3k} \lambda_{k,e} \frac{1}{\tau^e},$$

приведем его к виду

$$\sum_{e=1}^{\infty} \frac{1}{\tau^e} \sum_{k=\beta+\frac{e+\beta}{3}}^{\infty} \lambda_{k,e} b_k^{(1)}. \quad (4.8)$$

В самом деле, из условия $e = 3k - 4e_1$

$$\left(e_1 = 0, 1, \dots, k - E\left(1 + \frac{k}{4}\right) \right) \text{ следует, что } e_{\max} = \infty \text{ и}$$

$e_{\min} = 1$. При заданном же e , очевидно,

$$k_{\max} = \infty \text{ и } k_{\min} = \beta + \frac{e+\beta}{3} \quad (\beta = 0, 1, 2).$$

На основании (4.5) и (4.8) из (4.2) для значения функции $\varphi_1(t)$ на L_1 будем иметь

$$\varphi_1^*(\tau) = b_0^{(1)} + \sum_{e=0}^{\infty} \tau^e \sum_{k=E(e)}^{\infty} g_{k,e} b_k^{(1)} + \sum_{e=1}^{\infty} \frac{1}{\tau^e} \sum_{k=\beta+\frac{e+\beta}{3}}^{\infty} \lambda_{k,e} b_k^{(1)}. \quad (4.9)$$

С другой стороны, согласно (3.3), имеем

$$\varphi_1^*(\tau) = b_0^{(1)} + \sum_{e=0}^{\infty} b_e^{(1)} \tau^e + \sum_{e=1}^{\infty} b_{-e}^{(1)} \frac{1}{\tau^e}. \quad (4.10)$$

Сопоставление (4.9) и (4.10) дает

$$g_{e,e} = 1, \quad g_{e,k} = 0 \quad (e \neq k), \quad (4.11)$$

$$b_{-e}^{(1)} = \sum_{k=\beta+\frac{e+\beta}{3}}^{\infty} \lambda_{k,e} b_k^{(1)} \quad (e = 1, 2, \dots). \quad (4.12)$$

Формулы (4.11) и (4.12) и приведенный их вывод были сообщены нам Д. И. Шерманом в качестве дополнения к содержащемуся в упомянутой статье [1] разложению функции, регулярной внутри криволинейного квадрата L_1 в ряд по полиномам.

5. Вернемся к сумме (3.10). Звездочка над суммой (3.10) указывает, что индекс ν изменяется на 4 при переходе к смежному значению

$$\nu = k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)} \quad \left(e^{(1)} = 0, 1, 2, \dots, E\left(\frac{k}{4}\right)\right).$$

В круге, ограниченном контуром L_2 , функция $\varphi_1(z)$ разложима в ряд Тейлора; внутри и на окружности L_2 можно изменить порядок суммирования в двойной сумме, определяющей $\varphi_1(z)$.

Введем множитель $\varepsilon_{\nu, k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}} \left(e^{(1)} = 0, 1, 2, \dots, E\left(\frac{k}{4}\right)\right)$ так,

что

$$\varepsilon_{\nu, k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}} = \begin{cases} 1 & \text{если } \nu = k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}, \\ 0 & \text{если } \nu \neq k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}. \end{cases}$$

Опуская звездочку в (3.10), будем иметь

$$\varphi_1(z) = b_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{\nu=0}^k \left(\frac{R}{A}\right)^{\nu} a_{\frac{k-\nu}{4}}^{(k)} \left(\frac{z}{R}\right)^{\nu} \varepsilon_{\nu, k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}} \quad (5.1)$$

Переставим в двойной сумме порядок суммирования. Не выписывая (для краткости) выражения под знаками сумм, будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu=0}^k \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \dots \sum_{k=E(\nu)}^{\infty} \dots$$

Из условия $\nu = k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}$, при заданном ν , имеем $k = \nu + 4e^{(2)}$, ($e^{(2)} = 0, 1, 2, \dots, \infty$).

Принимая, что $k \neq 0$, легко получим:

$$E(\nu) = \nu \quad (\nu \neq 0),$$

$$E(\nu) = 0 \quad (\nu = 0).$$

Опуская в двойной сумме множитель $\varepsilon_{\nu, k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}}$ и вводя

обозначение

$$H_{\nu} = \left(\frac{R}{A}\right)^{\nu} \sum_{k=E(\nu)}^{\infty} a_{\frac{k-\nu}{4}}^{(k)} b_k^{(1)}, \quad (5.2)$$

получим

$$\varphi_1(z) = b_0^{(1)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu} \left(\frac{z}{R}\right)^{\nu}. \quad (5.3)$$

Отметим, что, согласно сделанному выше допущению, постоянные H_v будут чисто мнимыми величинами.

На основании граничного условия (1.2) и формул (3.2) и (5.3) имеем на окружности L_2

$$2b_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (H_v - b_v^{(2)}) \left[\left(\frac{t}{R} \right)^v - \left(\frac{R}{t} \right)^v \right] = \\ = 2iR^3 \left\{ e_1 \left(\frac{t}{R} - \frac{R}{t} \right) + e_3 \left[\left(\frac{t}{R} \right)^3 - \left(\frac{R}{t} \right)^3 \right] \right\}.$$

Постоянная $H_0^{(1)}$, как легко видеть, выпадает из соотношения на L_2 .

Из последнего тождества имеем

$$b_0^{(1)} = 0, \quad H_v - b_v^{(2)} = 2iR^3 e_v, \quad (v = 1, 2, \dots); \quad (5.4)$$

здесь $e_v = 0$ для $v \neq 1, 3$.

При помощи (2.1) и (3.2), с учетом разложения бинома, получим на криволинейном квадрате L_1

$$\varphi_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \left(\frac{R}{A} \right)^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n m^n C_{-k}^n \frac{1}{\tau^{4n+k}}.$$

Введя в выражение функции $\varphi_2(t)$ вместо n новый индекс $e = 4n + k$, будем иметь

$$\varphi_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{A} \right)^k b_k^{(2)} \sum_{e=k}^{\infty} (-1)^{\frac{e-k}{4}} m^{\frac{e-k}{4}} C_{-k}^{\frac{e-k}{4}} \frac{1}{\tau^e} \quad \text{на } L_1. \quad (5.5)$$

Введем множитель $\varepsilon_{e, k+4e^{(1)}}$ ($e^{(1)} = 0, 1, 2, \dots, \infty$) так, что

$$\varepsilon_{e, k+4e^{(1)}} = \begin{cases} 1 & (e = k + 4e^{(1)}), \\ 0 & (e \neq k + 4e^{(1)}). \end{cases}$$

Не вписывая в (5.5) звездочку, получим

$$\varphi_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{A} \right)^k b_k^{(2)} \sum_{e=k}^{\infty} (-1)^{\frac{e-k}{4}} C_{-k}^{\frac{e-k}{4}} m^{\frac{e-k}{4}} \frac{1}{\tau^e} \varepsilon_{e, k+4e^{(1)}}.$$

Переставляя порядок суммирования и опуская множитель $\varepsilon_{e, k+4e^{(1)}}$, окончательно будем иметь

$$\varphi_2(t) = \varphi_2^*(\tau) = \sum_{e=1}^{\infty} T_e \frac{1}{\tau^e}, \quad (5.6)$$

где

$$T_e = \sum_{k=e-4E\left(\frac{e}{4}\right)}^e (-1)^{\frac{e-k}{4}} \left(\frac{R}{A} \right)^k C_{-k}^{\frac{e-k}{4}} m^{\frac{e-k}{4}} b_k^{(2)}. \quad (5.7)$$

Пределы суммы (5.7) легко определяются из $k = e - 4e^{(2)}$:

$$\left(e^{(1)} = 0, 1, \dots, E\left(\frac{e}{4}\right) \right)$$

Отметим, что T_e суть величины чисто мнимые.

Исходя из граничного условия (1.1), формул (3.3) и (5.6) на окружности γ в плоскости ζ , получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} -T_{\nu} \left(\tau^{\nu} - \frac{1}{\tau^{\nu}} \right) + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_{\nu}^{(1)} \left(\tau^{\nu} - \frac{1}{\tau^{\nu}} \right) = 2F_1^*(\tau) + D_1, \quad (5.8)$$

где штрих над суммой указывает на пропуск слагаемого, отвечающего $\nu = 0$.

Из тождества (5.8) имеем:

$$-T_{\nu} + b_{\nu}^{(1)} - b_{-\nu}^{(1)} = 2iA^3 C_{\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad (5.9)$$

причем нужно положить $C_{\nu} = 0$ для $\nu \neq 1, 3, 5, 7, 9$; кроме того, из (5.8) вытекает, что постоянная $D_1 = 0$.

Из (5.4) имеем

$$b_{\nu}^{(1)} = H_{\nu} - 2iR^3 e_{\nu}. \quad (5.10)$$

Подставив значение для $b_{\nu}^{(1)}$ из (5.7) в выражение для T_{ν} , получим

$$T_{\nu} = \sum_{k=\nu-4E\left(\frac{\nu}{4}\right)}^{\nu} (-1)^{\frac{\nu-k}{4}} m^{\frac{\nu-k}{4}} C_{-k}^{\frac{\nu-k}{4}} \left(\frac{R}{A} \right)^k (H_k - 2iR^3 e_{\nu}),$$

или

$$\begin{aligned} T_{\nu} = & \sum_{k=\nu-4E\left(\frac{\nu}{4}\right)}^{\nu} (-1)^{\frac{\nu-k}{4}} m^{\frac{\nu-k}{4}} C_{-k}^{\frac{\nu-k}{4}} \left(\frac{R}{A} \right)^k H_k - \\ & - 2iA^3 (-1)^{\frac{\nu-j}{4}} \left(\frac{R}{A} \right)^{j+3} m^{\frac{\nu-j}{4}} C_{-j}^{\frac{\nu-j}{4}} e_j \\ & j = \nu - 4E \frac{\nu}{4}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Учтем формулу (5.2) в (5.11), тогда

$$\begin{aligned} T_{\nu} = & \sum_{k=\nu-4E\left(\frac{\nu}{4}\right)}^{\nu} (-1)^{\frac{\nu-k}{4}} m^{\frac{\nu-k}{4}} C_{-k}^{\frac{\nu-k}{4}} \left(\frac{R}{A} \right)^{2k} \sum_{e=E(k)}^{\infty} a_{\frac{e-k}{4}}^{(e)} b_e^{(1)} - 2iA^3 (-1)^{\frac{\nu-i}{4}} \times \\ & \times \left(\frac{R}{A} \right)^{j+3} m^{\frac{\nu-j}{4}} C_{-j}^{\frac{\nu-j}{4}} e_j \end{aligned}$$

$$(E(k) = k \quad (k \neq 0), \quad E(k) = 4 \quad (k = 0)).$$

Меняя теперь порядок суммирования, будем иметь

$$T_v = - \sum_{e=M(v)}^{\infty} d_{e,v}^* b_e^{(1)} - 2iA^3 (-1)^{\frac{e-j}{4}} \left(\frac{R}{A}\right)^{j+3} m^{\frac{v-j}{4}} C_{-j}^{\frac{v-j}{4}} e_j, \quad (5.12)$$

где

$$d_{e,v}^* = - \sum_{k=M(e)}^{N(v,v)} (-1)^{\frac{v-k}{4}} m^{\frac{v-k}{4}} C_{-k}^{\frac{v-k}{4}} \left(\frac{R}{A}\right)^{2k} a_{\frac{e-k}{4}}^{(e)}. \quad (5.13)$$

Пределы $M(v)$, $M(e)$ и $N(e, v)$ определяются из условий

$$k = v - 4E\left(\frac{v}{4}\right) + 4e^{(1)} \quad e^{(1)} = 0, 1, \dots, E\left(\frac{v}{4}\right),$$

$$e = E(k) + 4e^{(2)} \quad (e^{(2)} = 0, 1, \dots, \infty),$$

отсюда

$$e = v - 4E\left(\frac{v}{4}\right) + 4(e^{(1)} + e^{(2)}).$$

Таким образом,

$$e_{\min} = M(v) = v - 4E\left(\frac{v}{4}\right), \quad e_{\max} = \infty.$$

Из условия $e = k + 4e^{(2)}$ при заданном e определим

$$k = e - 4e^{(1)} \quad \left(e^{(1)} = 0, 1, \dots, E\left(\frac{e}{4}\right)\right),$$

отсюда

$$k_{\min} = M(e) = e - 4E\left(\frac{e}{4}\right),$$

$$k_{\max} = \begin{cases} N(e, v) = e, & e \leq v, \\ N(e, v) = v, & e > v; \end{cases}$$

Учитывая (4.12) и (5.12), из (5.9) получим

$$\sum_{e=v-4E\left(\frac{v}{4}\right)}^{\infty} d_{e,v} b_e^{(1)} - \sum_{e=v+\frac{v+3}{3}}^{\infty} \lambda_{e,v} b_e^{(1)} = f_v, \quad (5.14)$$

где

$$d_{e,e} = 1 + d_{e,e}, \quad d_{e,v} = d_{e,v}^*, \quad e \neq v,$$

$$f_v = -2iA^3 \left\{ (-1)^{\frac{v-j}{4}} \left(\frac{R}{A}\right)^{j+3} m^{\frac{v-j}{4}} C_{-j}^{\frac{v-j}{4}} e_j - C_v \right\} \quad (v = 1, 3, 5, \dots) \quad (5.15)$$

$$\left(e_1 = \frac{3}{8} + \frac{5}{4}, \quad e_3 = -\frac{1}{8}, \quad e_j = 0, \quad (j \neq 1, 3) \right).$$

Значения свободных членов системы (5.14) для $\frac{R}{A} = 0,8$ и $\tau = 0,3$ приведены в табл. 1.

Теперь придадим системе (5.14) вид:

$$\sum_{e=1}^{\infty} q_{e,v} b_e^{(1)} = f_v. \quad (5.16)$$

Здесь $q_{e,v}$ — коэффициенты, составленные соответствующим образом из коэффициентов $d_{e,v}$, $-\lambda_{e,v}$, а именно

$$q_{e,v} = d_{e,v}, \quad e = v - 4E\left(\frac{v}{4}\right) + 4\varepsilon,$$

$$q_{e,v} = -\lambda_{e,v}, \quad e = \beta + \frac{v+\beta}{3} + 4\varepsilon$$

$$(\varepsilon = 0, 1, 2, \dots).$$

Таблица 1

v	$f_v : iA^3$ $\tau = 0,3$
1	0,4060514
3	-0,1758220
5	-0,161452 · 10 ⁻¹
7	0,199053 · 10 ⁻¹
9	-0,489405 · 10 ⁻²
11	0,48545 · 10 ⁻²
13	-0,50568 · 10 ⁻³
15	0,8990 · 10 ⁻³
17	-0,5619 · 10 ⁻⁴
19	0,1498 · 10 ⁻³

Из (5.15) следует, что при четных v система (5.16) представляет однородную систему уравнений относительно неизвестных $b_e^{(1)}$ ($v = 0, 2, 4, 6, \dots$). В силу единственности решения следует полагать их равными нулю. Следовательно,

$$e = 1, 3, 5, \dots; \quad v = 1, 3, 5, \dots$$

Положив

$$q_{e,v} = C_{k_1,k}, \quad b_e^{(1)} = x_{k_1}, \quad f_v = f_k^{(0)},$$

$$\left(k_1 = \frac{e-1}{2}, \quad k = \frac{v-1}{2} \right)$$

вместо (5.16) получим

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} C_{k_1,k} x_{k_1} = f_k^{(0)} \quad (k = 0, 1, \dots, \infty).$$

Удержав из этой системы первые десять уравнений, будем иметь

$$\sum_{k_1=0}^9 C_{k_1,k} x_{k_1} = f_k^{(0)} \quad (k = 0, 1, \dots, 9). \quad (5.17)$$

Значения коэффициентов $C_{k_1,k}$ приведены в табл. 2.

В первом уравнении системы (5.17), приведенной к нормальной форме, сумма модулей коэффициентов больше единицы (как это следует из табл. 2); в остальных же уравнениях эта сумма меньше единицы.

Выделив из системы (5.18) первое уравнение

$$\sum_{k_1=0}^9 C_{k_1,0} x_{k_1} = f_0^{(0)}. \quad (5.18)$$

получим систему, состоящую из девяти уравнений:

$$\sum_{k_1=1}^9 C_{k_1, k} x_{k_1} = \beta_k \quad (k_1 = 1, 2, \dots, 9),$$

где

$$\beta_k = f_k^{(0)} - C_{0,0} x_0.$$

Решение этой системы ищем методом последовательных приближений (что возможно в силу сказанного), полагая

$$x_k = \sum_{\alpha=0}^{\infty} x_k^{(\alpha)}. \quad (5.19)$$

Здесь $x^{(\alpha)}$ — приближения $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ порядка, определяемые последовательно одно за другим рекуррентной формулой

$$x_k^{(0)} = -\frac{1}{C_{k,k}} \left(\sum_{k_1=1}^{k-1} C_{k_1, k} x_{k_1}^{(0)} - \beta_k \right), \quad (5.20)$$

$$x_k^{(\alpha)} = -\frac{1}{C_{k,k}} \left(\sum_{k_1=1}^{k-1} C_{k_1, k} x_{k_1}^{(\alpha)} + \sum_{k_1=k+1}^9 C_{k_1, k} x_{k_1}^{(\alpha-1)} \right), \quad \alpha > 0.$$

На основании (5.18), (5.19) и (5.20) получим:

$$x_k = \omega_k x_0 + \psi_k i A^3, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 9,$$

$$x_0 = \frac{0,4750423}{0,2810652} i A^3 = 1,690150 i A^3.$$

Здесь

$$\omega_k = \sum_{\alpha=0}^4 \omega_k^{(\alpha)}, \quad \psi_k = \sum_{\alpha=0}^4 \psi_k^{(\alpha)}.$$

Значения $\omega_k^{(\alpha)}$ и ω_k , $\psi_k^{(\alpha)}$ и ψ_k ($k = 1, 2, \dots, 9$) для $\frac{R}{A} = 0,8$ приведены в табл. 3 и 4.

По определении $b_v^{(1)}$, на основании формул (4.12), (5.2) и (5.4), для $\frac{R}{A} = 0,8$ были подсчитаны неизвестные H_v , $b_v^{(2)}$, $b_{-v}^{(1)}$; они помещены в табл. 5.

Учитывая (3.2), (5.3) и что $b_0^{(1)} = 0$, получим

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ H_k \left(\frac{z}{R} \right)^k + b_k^{(2)} \left(\frac{R}{z} \right)^k \right\}. \quad (5.21)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что найденная функция $\varphi(z)$ точно удовлетворяет граничному условию (1.2) на окружности L_2 .

Таблица 2

$k \backslash k_1$	0		8	9
0	0,36	-1	$-0,165828 \cdot 10^{-2}$	
1	-0,1111111	0^{-1}		$-0,379571 \cdot 10^{-2}$
2	$-0,7111111 \cdot 10^{-1}$	-1	$-0,1771173 \cdot 10^{-1}$	
3		-0^{-1}	$-0,31989 \cdot 10^{-4}$	$-0,1502045 \cdot 10^{-1}$
4	$-0,790123 \cdot 10^{-2}$	-1	$-0,2866196 \cdot 10^{-1}$	$-0,15890 \cdot 10^{-4}$
5		-0^{-1}	$-0,817486 \cdot 10^{-4}$	$-0,2136449 \cdot 10^{-1}$
6	$-0,877915 \cdot 10^{-3}$	-3	$-0,2786092 \cdot 10^{-1}$	$-0,278069 \cdot 10^{-4}$
7		-1	$-0,501548 \cdot 10^{-4}$	$-0,2011296 \cdot 10^{-1}$
8	$-0,97546 \cdot 10^{-4}$	-4	0,9799029	$-0,158407 \cdot 10^{-4}$
9		-0^{-1}	$-0,141732 \cdot 10^{-4}$	0,853812

Таблица 3

$k \backslash \sigma$	1		9
0	-0,1505864	+3	$-0,24588 \cdot 10^{-3}$
1	$+0,15260 \cdot 10^{-2}$	$\pm^{-4}$	$-0,3745 \cdot 10^{-6}$
2	$+0,1550 \cdot 10^{-3}$	+	$+0,2441 \cdot 10^{-6}$
3	$+0,103 \cdot 10^{-4}$	+	$+0,198 \cdot 10^{-7}$
4	$+0,6 \cdot 10^{-6}$	+	$+0,12 \cdot 10^{-6}$
ω_k	-0,1488945	+3	$-0,24593 \cdot 10^{-3}$

Таблица 4

$k \backslash \sigma$	1		9
0	-0,2382877	-3	$+0,6981 \cdot 10^{-5}$
1	$-0,25560 \cdot 10^{-2}$	-	$-0,4072 \cdot 10^{-5}$
2	$-0,1719 \cdot 10^{-4}$	-	$-0,329 \cdot 10^{-6}$
3	$-0,95 \cdot 10^{-5}$	-	$-0,195 \cdot 10^{-7}$
4	$-0,5 \cdot 10^{-6}$	-	$-0,11 \cdot 10^{-8}$
ψ_k	-0,2410196	-3	$+0,2559 \cdot 10^{-5}$

Значения величин

$$\Delta\%_0 = \frac{\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} - 2F_1(t)}{2F_1(t)} 100,$$

характеризующие степень точности, с которой найденная функция $\varphi(z)$ удовлетворяет граничному условию в наиболее характерных точ-

ках $t = ib$ и $t = ae^{i\frac{\pi}{4}}$, соответственно равны:

$$\Delta\%_0 = -0,05146\%, \quad \Delta\%_0 = 0,02222\%.$$

Таким образом, граничное условие выполняется достаточно точно на внешней границе L_1 .

Таблица 5

k	$b_k^{(1)} : iA^3$	$b_k^{(2)} : iA^3$	$H_k : iA^3$	$b_k^{(1)} : iA^3$
1	+1,6901498	+0,9390423	+1,3998423	+0,1642245
3	-0,4926736	-0,1364394	-0,2644394	-0,1814587
5	+0,1037894	+0,403459 $\cdot 10^{-1}$	+0,403459 $\cdot 10^{-1}$	-0,177163 $\cdot 10^{-1}$
7	-0,282039 $\cdot 10^{-1}$	-0,785012 $\cdot 10^{-2}$	-0,785012 $\cdot 10^{-2}$	-0,133150 $\cdot 10^{-2}$
9	+0,172751 $\cdot 10^{-1}$	+0,322489 $\cdot 10^{-2}$	+0,322489 $\cdot 10^{-2}$	+0,56593 $\cdot 10^{-3}$
11	-0,646953 $\cdot 10^{-2}$	-0,83614 $\cdot 10^{-3}$	-0,83614 $\cdot 10^{-3}$	+0,5734 $\cdot 10^{-4}$
13	+0,393674 $\cdot 10^{-2}$	+0,32190 $\cdot 10^{-3}$	+0,32190 $\cdot 10^{-3}$	+0,7464 $\cdot 10^{-5}$
15	-0,160972 $\cdot 10^{-2}$	-0,8733 $\cdot 10^{-4}$	-0,8733 $\cdot 10^{-4}$	+0,1855 $\cdot 10^{-6}$
17	+0,101568 $\cdot 10^{-2}$	+0,2287 $\cdot 10^{-4}$	+0,2287 $\cdot 10^{-4}$	-0,940 $\cdot 10^{-7}$
19	-0,41321 $\cdot 10^{-3}$	-0,5955 $\cdot 10^{-5}$	-0,5955 $\cdot 10^{-5}$	-0,695 $\cdot 10^{-7}$

Вычисления, проведенные в точках ib , $i\frac{R+b}{2}$ и iR для величины касательных напряжений при $\sigma = 0,3$ и $\frac{R}{A} = 0,8$, дают соответственно значения:

$$x_{z,1} = 2,1565 \frac{Pb^2}{I}, \quad x_{z,2} = 2,1761 \frac{Pb^2}{I}, \quad x_{z,3} = 2,2563 \frac{Pb^3}{I},$$

где P — величина изгибающей силы,

I — момент инерции площади сечения относительно нейтральной оси.

Сопоставим величины этих напряжений с теми, которые могут быть вычислены по известной для односвязных простейших сечений формуле Д. И. Журавского. С этой целью последнюю, для рассматриваемого сечения, приведем к виду

$$x_z = \frac{0,924 - 0,667 \left(\frac{R}{b}\right)^3}{2 \left(1 - \frac{R}{b}\right)} \frac{Pb^2}{I}.$$

Тогда при $\frac{R}{b} = 0,9$ будем иметь

$$\tau = 2,1888 \frac{Pb^2}{I}.$$

Из сравнения величин напряжений, полученных по нашим формулам и по формуле Д. И. Журавского, следует, что напряжения по формуле Журавского в точке iR оказываются пониженными на 1,49%, а в точках $i\frac{b+R}{2}$ и ib повышенными, соответственно, на 0,58% и 2,99%. Как видно, напряжение определенное по формуле Журавского, достаточно близко к истинному.

Величины касательных напряжений, действующих в указанных точках, полученных нами на электрической модели (ЭМ-7):

$$x_{z,1} = 2,11 \frac{Pb^2}{I}, \quad x_{z,2} = 2,17 \frac{Pb^2}{I}, \quad x_z = 2,35 \frac{Pb^2}{I}.$$

Расхождения между касательными напряжениями, полученными по нашим формулам и на ЭМ-7, будут: в точке ib 2,17%, в точке $i\frac{b+R}{2}$ 0,03%, в точке iR 4,2%.

Азербайджанский индустриальный институт
им. М. Азизбекова

Поступило 12 X 1956

Յու. Ա. Ամենզադե

ՇՐՋԱՆԱԶԵՎ ԱՆՑՔՈՎ ՔՈՒԼԱՑՎԱԾ ՀԱՏՎԱԾԱԿՈՂՄ ԶՈՐՍՈՒԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Հոդվածում դիտարկվում է շրջանաձև անցքով թուլացված համասեռ իզոտրոպ հատվածակողմ չորսուր ծռումը քառակուսի փոքր առանցքներից մեկի երկայնությամբ կիրառված կենտրոնացած ուժի ազդեցության տակ (նկ. 1):

Անհալս սկզբնական ֆունկցիան չորսուրի զրադեցրած տիրույթում, (1.1) և (1.2) եզրային պայմանների դեպքում, որոնք է (1.3) երկու ֆունկցիաների տեսքով φ_1 — սկզբնական քառակուսու ներսում, φ_2 — սկզբնական շրջանաձևից դուրս և անվերջության մեջ գերուրի փոխարկվող: Այս մեթոդը թույլ է տալիս սովորական դեպքերում ստանալ հավասարումների պահանջով անվերջ հանրահազվական մի սխեմ, առանց խնդիրը նախապես Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարմանը բերելու: Որպես անհրաժեշտ, բայց միջակա էտապ, օգտագործվում է 'Ի. Ի. Շերմանի կողմից մեկ հաղորդված (4.11) և (4.12) արդյունքը:

Ստացված անվերջ սխեմները կրճատված, հասցված է առաջ հավասարման: Կրճատված, նորմալ ձևի բերված սխեմների առաջին հավասարման մեջ գործակիցների մոդուլների գումարը մեծ է մեկից (ինչպես այդ հետևում է աղյուսակ 2-ից), իսկ մնացած հավասարումների մեջ այդ գումարը փոքր է

մեկից: Առաջի աղ սխեմից առաջին հավասարումն առանձնացված է, իսկ երկրորդը՝ իր հավասարումները լուծված են հաջորդական մասավորությոնների մեթոդով:

Այնուհետև լուծումն ստացված է և ցույց է տրված, որ այն մեծ ճշտությամբ բավարարում է (1.1) եզրային պայմանին և ճշգրտորեն՝ (1.2) պայմանին:

Հարկավոր է բերվում է նաև չեղոք առանցքի կետերում աղյուղ շոշափող լարումների մեծությունների համեմատությունը ժուրավսկու բանաձևից բխող տվյալների հետ, եթե այն պայմանորեն տարածենք ոչ-միակապ տիրույթի վրա և, վերջապես, շոշափող լարումների արժեքները համեմատված են (էՄ-7) էլեկտրական մոդելի վրա ստացված արդյունքների հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости (1954).
2. Шерман Д. И. О напряжениях в скручиваемом круговом бруссе, ослабленном призматической полостью. Известия АН СССР, ОТН, 7 (1951).
3. Научно-технический отчет, фонд АЗНИИ по добыче нефти (1955).
4. Амензаде Ю. А. Изгиб призматического бруса, ослабленного круговой полостью. Труды АЗИИ им. М. Азизбекова, XIV (1956).
5. Амензаде Ю. А. Изгиб призматического бруса, ослабленного круговой полостью. ДАН СССР, том 114, № 1 (1957).