

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. И. Шерман

Об упругом равновесии пластинки, опертой по краю

§ 1. Допустим, что срединная поверхность пластинки заполняет конечную и односвязную область S , ограниченную замкнутым контуром L , и расположенную в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Будем считать декартовы координаты точек контура L требуемое число раз дифференцируемыми по дуге s . Обход L , как обычно, примем совершающимся против движения часовой стрелки. Для удобства за начало координат возьмем некоторую точку, принадлежащую S .

Прогиб $w_1(x, y)$ срединной поверхности пластинки удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta \Delta w_1 = \frac{q}{D}, \quad (1.1)$$

где Δ — оператор Лапласа, $q(x, y)$ — изгибающая пластинку нормальная нагрузка, и D — цилиндрическая жесткость. Кроме того, в случае опертой границы L должны соблюдаться на ней следующие предельные равенства:

$$w_1 = 0, \quad G(w_1) \equiv \sigma \Delta w_1 + (1 - \sigma) \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \sin 2\theta + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \sin^2 \theta \right] = 0. \quad (1.2)$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона и θ — угол между осью абсцисс и нормалью n к L , направленной во вне S . Таким образом, искомое решение $w_1(x, y)$ должно удовлетворять вкпе уравнению (1.1) и краевым условиям (1.2).

Насколько нам известно, сформулированная задача была впервые рассмотрена З. И. Халиловым [1] для случая конечной и односвязной области в предположении, что ее граница не имеет точек с нулевой кривизной. Это требование не вызывается ни существом дела, ни избранным методом решения; автор оказался вынужденным прибегнуть к нему лишь из-за не вполне удачной записи краевых условий. Несколько позже другое решение той же задачи, свободное от указанного недостатка и для более общего случая многосвязной области,

было дано М. М. Фридманом [2]. Наконец А. И. Каландия [3], всецело основываясь на теории сингулярных интегральных уравнений, предложил еще одно решение упомянутой задачи. А. И. Каландия пока не указал алгоритм для решения своей системы сингулярных уравнений. Сведение же ее посредством регуляризации к системе Фредгольма в данном случае нецелесообразно; это мнение как будто разделяется и автором. Между тем наличие упомянутого алгоритма было бы весьма желательно и как нельзя более своевременно; с одной стороны, он позволил бы завершить полное исследование вопроса, включая его численную интерпретацию, оставаясь в сфере одних и тех же идей; помимо этого, такой алгоритм отвечал бы существующей сейчас настоятельной потребности в разработке эффективных методов решения сингулярных уравнений.

Новое решение задачи, которое мы намерены здесь предложить, обладает известными преимуществами по сравнению с перечисленными.

Положим

$$w_1(x, y) = w(x, y) + w_0(x, y), \quad (1.3)$$

где $w_0(x, y)$ — некоторое каким-либо образом найденное частное решение неоднородного уравнения (1.1); новая неизвестная $w(x, y)$ является бигармонической функцией; для нее имеем краевые условия

$$w = -w_0; \quad \bar{G}(w) = -G(w_0). \quad (1.4)$$

Согласно известной формуле Гурса,

$$2w(x, y) = \bar{z}\varphi_1(z) + z\bar{\varphi}_1(\bar{z}) + \chi_1(z) + \bar{\chi}_1(\bar{z})$$

$$\psi_1(z) = \chi_1(z), \quad (1.5)$$

где $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — некоторые функции комплексного переменного z , регулярные в области S . Имея в виду (1.5) и продифференцировав первое из равенств (1.4) по дуге s , получим на L

$$R_s t_s \{\bar{\varphi}_1(t) + \bar{t}\bar{\varphi}_1(t) + \psi_1(t)\} = f_1(s), \quad (1.6)$$

$$R_s \{\lambda_0 \varphi_1(t) - t_s^2 [\bar{t}\bar{\varphi}_1(t) + \psi_1(t)]\} = g_1(s), \quad (1.7)$$

где индекс s у переменной t , обозначает дифференцирование по дуговой абсциссе, и

$$f_1(s) = -\frac{\partial w_0}{\partial s}, \quad g_1(s) = -\frac{1}{1-\sigma} G(w_0), \quad \lambda_0 = \frac{2(1+\sigma)}{1-\sigma}.$$

Весьма важно прийти отсюда к такой форме граничных условий, каждое из которых наряду с $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ содержало бы высшие производные одного и такого же (не больше второго) порядка функции $\varphi_1(z)$ и, соответственно, на единицу сниженного порядка функ-

ции $\psi_1(z)$; желательно, естественно, чтобы порядок этих производных был возможно наименьшим. Мы добьемся этого, продифференцировав равенство (1.6) по дуге s и сложив его почленно с равенством (1.7). Действительно, в результате получим

$$\operatorname{Re}\{ (1 + \lambda_0) \varphi_1'(t) + \overline{\varphi_1'(t)} + t_{ss} [\overline{\varphi_1(t)} + \overline{t} \varphi_1'(t) + \psi_1(t)] \} = f_2(s), \quad (1.8)$$

где $f_2(s) = f_1'(s) + g_1(s)$. В каждое из условий (1.6) и (1.8) входят только производные первого порядка функции $\varphi_1(z)$, кроме того, взятые вместе, они эквивалентны предельным равенствам (1.6) и (1.7).

Примечание. А. И. Каландия, [4] преследуя, по-видимому, сходную цель (устранение из граничных равенств $\varphi_1'(t)$ и $\psi_1'(t)$) в более сложной задаче, поступает несколько иначе; он интегрирует по дуге краевое равенство (1.7) и складывает его с равенством (1.6), скорректированным на специальный множитель. Из полученного в результате равенства оказываются исключенными все слагаемые с производными искомого функций, в то время как в сопутствующем равенстве (1.6) присутствует первая производная $\varphi_1(t)$. Подобная форма заменяющего (1.7) граничного равенства вполне устраивает автора; для разбираемого же здесь случая она связана с серьезными неудобствами и чревата именно теми осложнениями*, которые мы стремимся избежать. Для нас несравненно более выгодна запись условия в виде (1.8).

Дабы сделать более явственной проводимую ниже аналогию между изучаемой и некоторой задачей плоской теории упругости, введем вместо первоначальных $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ функции

$$\varphi(z) = i\varphi_1(z), \quad \psi(z) = i\psi_1(z). \quad (1.9)$$

Затем, положив

$$\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \psi(z) = p(x, y) + iq(x, y), \quad (1.10)$$

где u, v и p, q — гармонические сопряженные между собой функции, запишем (1.6) и (1.8) следующим образом:

$$x_s v - y_s u + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial x} + x_s q + y_s p = f_1(s), \quad (1.11)$$

$$x_{ss} v - y_{ss} u + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial x} + x_{ss} q + y_{ss} p = f_2(s), \quad (1.12)$$

при обозначениях

* Мы подразумеваем под таковыми затруднения, препятствующие приведению задачи непосредственно к регулярному интегральному уравнению; обычно при этом оказывается возможным прийти к нему лишь через промежуточный этап, — точнее говоря, через сингулярное уравнение, которое предварительно должно быть получено. Как отмечалось выше, в настоящее время мы, к сожалению, еще не располагаем достаточно разработанными, в смысле их эффективности, методами численного решения сингулярных уравнений. Поэтому, учитывая цели, которые мы себе ставим, сведение задачи к такому уравнению пока нельзя считать завершающим этапом исследования. Регуляризация же сингулярного уравнения, как правило, приводит к уравнению Фредгольма с громоздкими выражениями для ядер, что также не вполне приемлемо.

$$\begin{aligned}\delta_1 &= xu_s - yx_s, \quad \delta_2 = xx_s + yy_s, \quad \lambda = 2 + \lambda_0, \\ \gamma_1 &= xy_{ss} - yx_{ss}, \quad \gamma_2 = xx_{ss} + yy_{ss} + \lambda.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Прибавим теперь к левой части (1.11) оператор

$$(2S)^{-1} \text{Re} \bar{t}_s \text{Re} \varphi'(0), \quad (1.14)$$

где S — площадь области того же наименования; вновь полученное равенство (мы позволим себе его не выписывать) проинтегрируем по дуге кривой L .

Тогда, после очевидных преобразований, получим:

$$\text{Re} \varphi'(0) = 0. \quad (1.15)$$

Таким образом, две любые регулярные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющие видоизмененному равенству (1.11), обязательно обращают в нуль оператор (1.15); иначе говоря, видоизмененное равенство равносильно прежнему (1.11) при дополнительном соотношении (1.15). Назначение оператора (1.14) станет понятным в дальнейшем.

Итак, в конечном счете задача сводится к отысканию функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из граничных условий (1.11) и (1.12), причем первое из них предпочтительно брать в слегка измененной, как указано, форме.

Отметим ряд важных соотношений, справедливых на L :

$$\begin{aligned}x_s^2 + y_s^2 &= 1, \quad x_s x_{ss} + y_s y_{ss} = 0, \quad x_s (x_s y_{ss} - y_s x_{ss}) = y_{ss}, \\ -y_s (x_s y_{ss} - y_s x_{ss}) &= x_{ss}, \quad (xy_s - yx_s) (x_s y_{ss} - y_s x_{ss}) = \\ &= -(xx_{ss} + yy_{ss}), \\ (xx_s + yy_s) (x_s y_{ss} - y_s x_{ss}) &= xy_{ss} - yx_{ss}.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Они будут использованы ниже при различных выкладках. Приведем тут же основанную на тождественном преобразовании известную интегральную формулу [1] для бигармонической функции

$$\begin{aligned}& \int_L \left[w H(w) - \frac{d\tau w}{dn} G(w) \right] ds = \\ &= - \iint_S \{ \sigma (\Delta w)^2 + (1 - \sigma) [(w_{xx})^2 + (w_{yy})^2 + 2(w_{xy})^2] \} dx dy, \quad (1.17)\end{aligned}$$

где

$$H(w) = \frac{d\Delta w}{dn} + (1 - \sigma) \frac{d}{ds} [w_{xy} \cos 2\theta + (w_{yy} - w_{xx}) \cos \theta \sin \theta],$$

причем имеет место равенство

$$\int_L H(w) ds = 0. \quad (1.18)$$

Не трудно видеть, что для $w(x, y)$ тождественно равной постоянной

$$\varphi(z) = kz + C, \quad \psi(z) = \bar{C}, \quad (1.19)$$

где k и C соответственно произвольные действительная и комплексная постоянные.

§ 2. Искомые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ зададим интегральными формулами

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^2 \int_L \gamma_n(s) G_n(t, z) dt, \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^2 \int_L \gamma_n(s) H_n(t, z) dt, \quad (2.1)$$

где плотности $\gamma_1(s)$ и $\gamma_2(s)$ — пока неизвестные вещественные величины, а функции G_n и H_n таковы:

$$\begin{aligned} G_1(t, z) &= -\bar{t}_s t_{ss} G_2(t, z), \quad G_2(t, z) = -\frac{1}{\pi\lambda} \left[-1 + \ln \left(1 - \frac{z}{t} \right) \right], \\ H_1(t, z) &= \frac{1}{\pi\lambda} \left\{ \bar{t}_s \bar{t}_{ss} \ln \left(1 - \frac{z}{t} \right) + P(t) \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right) \right\}, \\ H_2(t, z) &= \frac{1}{\pi\lambda} \left\{ -\bar{t}_s^2 \ln \left(1 - \frac{z}{t} \right) + Q(t) \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right) \right\}, \\ P(t) &= -(\bar{t} t_s \bar{t}_{ss} - \lambda \bar{t}_s), \quad Q(t) = -\bar{t}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Логарифмический член в этих формулах следует считать равным нулю в начале координат, по предположению находящемся в области S . Из второго равенства (2.1) вытекает, что $\psi(0) = 0$; это соотношение будет учтено впоследствии. Обоснование представимости в виде (2.1)–(2.2) любых функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярных в области S (вторая из которых обращается в нуль при $z = 0$), равносильно, собственно говоря, доказательству возможности нахождения плотностей γ_1 и γ_2 из каких-либо краевых условий; при этом достаточно ограничиться случаем, когда правые части (свободные члены) краевых условий непосредственно составляются по левым частям, содержащим граничные значения заданных функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и производные от них. Вообще же краевые условия можно брать любыми, или подбирать специально в той мере, в какой это доступно, наимыгоднейшим образом, с целью возможно проще провести упомянутое доказательство; в частности, можно, например, исходить из условий (1.11) и (1.12). В этом случае вопрос о правомерности представления (2.1) и (2.2) оказывается тесно связанным с рассматриваемой задачей.

Читатель убедится ниже, что представление (2.1)–(2.2) обладает важными положительными качествами; они столь существенны, что позволяют с уверенностью утверждать о его решающих преимуществах, по крайней мере, в главном перед остальными представлениями, которые можно придумать или найти из каких-либо соображений.

Отделим в (2.1) вещественные и мнимые части, положив

$$\begin{aligned} G_n(t, z) &= \bar{t}_s \{u_n(s; x, y) + i v_n(s; x, y)\}, \\ H_n(t, z) &= \bar{t}_s \{p_n(s; x, y) + i q_n(s; x, y)\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда на основании (1.10) будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^2 \int_L \gamma_n(s) u_n(s; x, y) ds, \quad v(x, y) = \sum_{n=1}^2 \int_L \gamma_n(s) v_n(s; x, y) ds, \\ p(x, y) &= \sum_{n=1}^2 \int_L \gamma_n(s) p_n(s; x, y) ds, \quad q(x, y) = \sum_{n=1}^2 \int_L \gamma_n(s) q_n(s; x, y) ds, \end{aligned} \quad (2.4)$$

причем заключающиеся под знаками интегралов вещественные функции равны

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\pi \lambda} \left\{ \xi_{ss} \left(-1 + \ln \frac{r}{\rho} \right) - \eta_{ss} \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} \right) \right\}, \\ u_2 &= -\frac{1}{\pi \lambda} \left\{ \xi_s \left(-1 + \ln \frac{r}{\rho} \right) - \eta_s \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} \right) \right\}, \\ v_1 &= \frac{1}{\pi \lambda} \left\{ \eta_{ss} \left(-1 + \ln \frac{r}{\rho} \right) + \xi_{ss} \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} \right) \right\}, \\ v_2 &= -\frac{1}{\pi \lambda} \left\{ \eta_s \left(-1 + \ln \frac{r}{\rho} \right) + \xi_s \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} \right) \right\}, \\ p_1(s; x, y) &= \frac{1}{\pi \lambda} \left\{ a(s) \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial n} + b(s) \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial s} + h_1(s; x, y) \right\}, \\ p_2(s; x, y) &= \frac{1}{\pi \lambda} \left\{ -\eta \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial n} - \xi \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial s} + h_2(s; x, y) \right\}, \\ q_1(s; x, y) &= \frac{1}{\pi \lambda} \left\{ b(s) \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial n} - a(s) \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial s} + l_1(s; x, y) \right\}, \\ q_2(s; x, y) &= \frac{1}{\pi \lambda} \left\{ -\xi \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial n} + \eta \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial s} + l_2(s; x, y) \right\}, \\ a(s) &= \lambda \eta_s - \xi (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}), \quad b(s) = \lambda \xi_s + \eta (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}), \\ h_1(s; x, y) &= \left\{ \xi_{ss} \ln \frac{r}{\rho} + \eta_{ss} \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$h_2(s; x, y) = - \left\{ \xi_s \ln \frac{r}{\rho} + \eta_s \left(\arctg \frac{\eta - y}{\xi - x} - \arctg \frac{\eta}{\xi} \right) \right\},$$

$$l_1(s; x, y) = - \left\{ \eta_{ss} \ln \frac{r}{\rho} - \xi_{ss} \left(\arctg \frac{\eta - y}{\xi - x} - \arctg \frac{\eta}{\xi} \right) \right\},$$

$$l_2(s; x, y) = \left\{ \eta_s \ln \frac{r}{\rho} - \xi_s \left(\arctg \frac{\eta - y}{\xi - x} - \arctg \frac{\eta}{\xi} \right) \right\},$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

В формулах (2.1) и производной от первой из них перейдем к пределу, устремляя z к некоторой точке $t_0 = \xi_0 + i\eta_0$ кривой L . Найденные значения для функций $\varphi(t_0)$, $\psi(t_0)$ и $\varphi'(t_0)$, по отделении в них вещественной и мнимой частей, подставим в граничные условия (1.11) и (1.12), присоединив дополнительно к (1.11) оператор (1.14). Тогда, выполнив некоторые преобразования, получим для определения плотностей $v_1(s)$ и $v_2(s)$ систему интегральных уравнений Фредгольма:

$$v_j(s_0) + \sum_{n=1}^2 \int_L v_n(s) K_{n,j}(s, s_0) ds = f_j(s_0) \quad (j = 1, 2). \quad (2.6)$$

Ядра системы, как читатель увидит, являются непрерывными функциями переменных s и s_0 . Чтобы выражениям для них придать большую обозримость, положим

$$K_{n,j}(s, s_0) = P_{n,j}(s, s_0) \frac{\partial \ln r_0}{\partial n} + Q_{n,j}(s, s_0) \frac{\partial \ln r_0}{\partial s} + R_{n,j}(s, s_0) \quad (n, j = 1, 2), \quad (2.7)$$

где n — нормаль к контуру L , направленная в область внешнюю к S и $P_{n,j}$, $Q_{n,j}$, $R_{n,j}$ — некоторые функции; они могут быть при помощи (1.16) приведены к достаточно простой форме. Именно, после подчас довольно длинных вычислений, будем иметь:

$$P_{11} = \frac{1}{\pi} (\xi_s \xi_{0s} + \eta_s \eta_{0s}) - (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) Q_{21},$$

$$P_{12} = \frac{1}{\pi} (\xi_s \xi_{0ss} + \eta_s \eta_{0ss}) + (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) Q_{22},$$

$$P_{21} = -\frac{1}{\pi \lambda} \{ \xi_{0s} (\xi - \xi_0) + \eta_{0s} (\eta - \eta_0) \},$$

$$P_{22} = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{\lambda} [\xi_{0ss} (\xi - \xi_0) + \eta_{0ss} (\eta - \eta_0)] \right\},$$

$$Q_{11} = \frac{1}{\pi} [\xi_{0s} (\eta_s - \eta_{0s}) - \eta_{0s} (\xi_s - \xi_{0s})] + (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) P_{21},$$

$$\begin{aligned}
Q_{12} &= \frac{1}{\pi} [\eta_s (\xi_{ss} - \xi_{0ss}) - \xi_s (\eta_{ss} - \eta_{0ss})] + (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) \left\{ \frac{1}{\pi} - P_{22} \right\}, \\
Q_{21} &= \frac{1}{\pi \lambda} [\xi_{0s} (\eta - \eta_0) - \eta_{0s} (\xi - \xi_0)], \\
Q_{22} &= \frac{1}{\pi \lambda} [\xi_{0ss} (\eta - \eta_0) - \eta_{0ss} (\xi - \xi_0)], \\
R_{n,j} &= S_{n,j} + T_{n,j}, \quad \theta(s, s_0) = \arctg \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0} - \arctg \frac{\eta}{\xi}, \quad (2.8) \\
S_{11} &= \frac{1}{\pi \lambda} \{ -(\xi_{s0} \eta_{ss} - \eta_{0s} \xi_{ss}) + 2(\xi_{0s} \xi_{ss} + \eta_{0s} \eta_{ss}) \theta(s, s_0) \}, \\
S_{12} &= \frac{1}{\pi \lambda} \{ (\xi_{ss} \eta_{0ss} - \xi_{0s} \eta_{ss}) + 2(\xi_{ss} \xi_{0ss} + \eta_{ss} \eta_{0ss}) \theta(s, s_0) \}, \\
S_{21} &= \frac{1}{\pi \lambda} \{ (\xi_{0s} \eta_s - \xi_s \eta_{0s}) - 2(\xi_s \xi_{0s} + \eta_s \eta_{0s}) \theta(s, s_0) \}, \\
S_{22} &= -\frac{1}{\pi \lambda} \{ (\xi_s \eta_{0ss} - \xi_{0s} \xi_{ss}) + 2(\xi_s \xi_{0ss} + \eta_s \eta_{0ss}) \theta(s, s_0) \}, \\
T_{11} &= \xi_{0s} \alpha(s, s_0) + \eta_{0s} \beta(s, s_0), \quad T_{21} = \xi_{0s} \delta(s, s_0) + \eta_{0s} \gamma(s, s_0), \\
T_{12} &= \xi_{0ss} \Delta(s) + \eta_{0ss} \sigma(s), \quad T_{22} = \xi_{0ss} d(s) + \eta_{0ss} c(s), \\
c(s) &= \frac{1}{\pi \lambda \rho^2} [(\xi^2 - \eta^2) \xi_s + 2\xi \eta \eta_s], \\
d(s) &= \frac{1}{\pi \lambda \rho^2} [(\xi^2 - \eta^2) \eta_s - 2\xi \eta \xi_s], \\
\alpha(s, s_0) &= -(\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) c(s) + \frac{1}{\pi \lambda \rho^2} [\lambda \eta + (2S)^{-1} (\xi \xi_{ss} + \eta \eta_{ss}) \eta_0], \\
\beta(s, s_0) &= (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) d(s) - \frac{1}{\pi \lambda \rho^2} [\lambda \xi + (2S)^{-1} (\xi \xi_{ss} + \eta \eta_{ss}) \xi_0], \\
\delta(s, s_0) &= d(s) - \frac{(2S)^{-1}}{\pi \lambda \rho^2} (\xi \xi_s + \eta \eta_s) \eta_0, \\
\gamma(s, s_0) &= c(s) + \frac{(2S)^{-1}}{\pi \lambda \rho^2} (\xi \xi_s + \eta \eta_s) \eta_0, \\
\Delta(s) &= -(\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) c(s) + \frac{\eta}{\pi \rho^2}, \\
\sigma(s) &= (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) d(s) - \frac{\xi}{\pi \rho^2}.
\end{aligned}$$

Здесь функции, зависящие от дуги s_0 , снабжены снизу нулевым указателем; при этом видно, что $Q_{nj}(s, s_0)$ ($n, j = 1, 2$) обращаются в нуль, когда дуги s и s_0 совпадают между собой; последнее убеждает в справедливости высказанного утверждения о непрерывности ядер системы (2.6).

Устранив из второй формулы (2.1) члены, содержащие логарифмическую особенность, мы приходим к иному, на первый взгляд, более простому представлению, нежели первоначальное. Назовем его главной частью представления (2.1); оно также приводит задачу к системе уравнений Фредгольма. Изучение же этой системы, по нашему мнению, сопряжено со значительными трудностями. Предпринятые попытки исследовать ее, нужно признаться, не увенчались должным успехом; нам не удалось преодолеть встретившиеся трудности до конца. Разумеется, можно было бы продолжать усилия в этом направлении; однако они были бы целесообразны и оправданы лишь в том случае, если бы упомянутые слагаемые вносили осложнения в систему интегральных уравнений. Между тем в данном случае имеет место как раз обратное. Наличие указанных слагаемых упрощает систему.

В формулах (2.8), откровенно говоря, вопреки ожиданию автора, при этом отсутствуют логарифмические члены, благодаря чему ядра (2.7) являются непрерывными функциями аргументов s и s_0 . Это обстоятельство в известной степени облегчает численные операции над системой.

Мы думаем и, нужно полагать, не без основания, что вряд ли исследуемая задача для области произвольного очертания может быть сведена к более простой нежели (2.6) системе уравнений Фредгольма. Учитывая элементарный характер ее ядер и, в особенности, средства, которыми в настоящее время располагает вычислительная техника, можно найденное решение без преувеличения считать эффективным.

Примечание. Существует глубокая и далеко идущая аналогия между рассматриваемой задачей и плоской задачей теории упругости с заданными краевыми значениями нормальной составляющей вектора смещения и касательной составляющей вектора напряжения. Эта аналогия, насколько нам известно, была впервые подмечена М. М. Фридрихом. Здесь она сразу выявляется при сопоставлении равенств (1.11), (1.12), (2.1) и (2.2) с предельными условиями и формой представления искомых функций в названной задаче*.

§ 3. Докажем теперь, что система (2.6) всегда (при любой правой части) разрешима единственным образом. Действительно, пусть $\gamma_1^0(s)$ и $\gamma_2^0(s)$ — некоторое нетривиальное решение однородной ($f_1 = f_2 = 0$) системы (2.6); отвечающие ему функции согласно (2.1) назовем $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$; они удовлетворяют однородным равенствам (1.11) и (1.12) при добавочном соотношении (1.15) и условию $\psi_0(0) = 0$.

* См. Д. И. Шерман, Об одной задаче теории упругости со смешанными однородными условиями (находится в редакции ДАН СССР).

Отсюда по теореме единственности заключаем, что везде в области S функции $\varphi_0(z) = \psi_0(z) = 0$. Имея это в виду и полагая $z=0$ в первом равенстве (2.1), получим важное соотношение

$$\int_L \{v_1^{(0)}(s) \bar{t}_s t_{ss} - v_2^{(0)}(s)\} dt = 0. \quad (3.1)$$

Введем на контуре L функцию

$$\omega(t) = \int_n^t \{v_1^{(0)}(s) \bar{t}_s t_{ss} - v_2^{(0)}(s)\} dt, \quad (3.2)$$

равную нулю в точке с аффиксом α , соответствующем началу отсчета дуг. Из (2.1), (3.1) и (3.2) ясно, что $\omega(z) = \omega_1(x, y) + i\omega_2(x, y)$ регулярно вне L и ограничена на бесконечности; ее же производная имеет на бесконечности порядок $O(z^{-2})$.

Преобразовав посредством (3.2) к надлежащей форме второе равенство (2.1), будем иметь на L

$$v_1^{(0)}(s) \bar{t}_s t_{ss} - v_2^{(0)}(s) = \omega'(t), \\ -\overline{\omega(t)} + v_1^{(0)}(s) P(t) + v_2^{(0)}(s) Q(t) + \theta(t) = A, \quad (3.3)$$

где $\theta(z) = \theta_1(x, y) + i\theta_2(x, y)$ регулярна вне L и исчезает на бесконечности; причем A , вообще говоря, комплексная постоянная, равная

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_L \{-\overline{\omega(t)} + v_1^{(0)}(s) P(t) + v_2^{(0)}(s) Q(t)\} \frac{dt}{t}. \quad (3.4)$$

Положим далее

$$\tau(z) = \omega(z) + \bar{A}, \quad \tau(z) = \tau_1(x, y) + i\tau_2(x, y) \quad (3.5)$$

и внесем во второе равенство (3.3) вместо плотностей $v_1^{(0)}(s)$ и $v_2^{(0)}(s)$ их значения через τ_1 и τ_2 , взятые из первого равенства. После этого получим

$$\bar{\tau}(t) + \left(-i\bar{t} - \lambda \frac{\bar{t}_s}{\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}} \right) \frac{\partial \tau_2}{\partial \bar{\xi}} - \bar{t} \frac{\partial \tau_1}{\partial \bar{\xi}} - \theta(t) = 0. \quad (3.6)$$

Умножим теперь последнее равенство на t_s и отделим в нем вещественные и мнимые части; затем первое из вновь полученных соотношений дополнительно почленно умножим на $\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}$ и выполним некоторые само собой напрашивающиеся преобразования. В результате, переставив эти уравнения местами, будем иметь

$$\xi_s \tau_2 - \eta_s \tau_1 + \delta_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \bar{\xi}} + \delta_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \bar{\xi}} + \xi_s \theta_2 + \eta_s \theta_1 = 0. \quad (3.7)$$

$$\xi_{ss}\tau_2 - \eta_{ss}\tau_1 + \gamma_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \xi} + \gamma_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \xi} + \xi_{ss}\theta_2 + \eta_{ss}\theta_1 = 0. \quad (3.8)$$

Введем в области внешней к S бигармоническую функцию

$$\chi(x, y) = \bar{z}\tau(z) + z\bar{\tau}(\bar{z}) + \sigma(z) + \bar{\sigma}(\bar{z}), \quad \sigma(z) = \int^z \theta(z) dz.$$

Соотношения (3.7) и (3.8) при этом дают на L

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} = 0, \quad G(\chi) = 0. \quad (3.9)$$

Так как χ принимает постоянное значение на L и по построению $\tau(z)$ однозначная функция, то $\sigma(z)$ может иметь логарифмическую особенность, выражаемую слагаемым $D \ln z$, где коэффициент D — обязательно вещественный; в противном случае $\chi(x, y)$ при обходе контура L получила бы приращение, отличное от нуля, что невозможно. Следовательно, функция $\chi(x, y)$ является однозначной в области ее изменения. В окрестности же бесконечно удаленной части плоскости

$$\chi(x, y) = \bar{B}z + B\bar{z} + D \ln R + \chi^*(x, y), \quad (3.10)$$

где B — некоторая постоянная, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ и χ^* — ограниченная функция; ее любая n -я частная производная имеет порядок $O(R^{-n})$. Нетрудно усмотреть, что формула (1.17) остается справедливой применительно к функции $\chi(x, y)$ для бесконечной области, ограниченной L . В этом убедимся, учитывая поведение $\chi(x, y)$ на бесконечности и заметив, что $G(\chi)$ и $H(\chi)$ имеют соответственно порядок $O(R^{-2})$ и $O(R^{-3})$. В самом деле, при этих условиях криволинейный интеграл, подобный (1.17), распространенный по окружности сколь угодно большого радиуса, в пределе обращается в нуль. Далее, приняв во внимание, что взятый на контуру L интеграл в (1.17) равен нулю, на основании (3.9), заключаем, что необходимо $\chi = \text{const}$ тождественно всюду вне L . Отсюда имеем $\tau(z) = \theta(z) = 0$, что в свою очередь, если вспомним условие $\omega(z) = 0$, дает $\omega(z) = 0$, а значит и $A = 0$. Наконец, обращаясь к (3.3), найдем, что плотности $v_1^{(0)}(s) = v_2^{(0)}(s) = 0$. Таким образом, установлено, что неоднородная система (2.6) действительно имеет единственное решение.

Примечание 1. Вид первой формулы (3.3) побуждает несколько задержаться на случае, когда в состав отдельных участков, образующих контур L , входят отрезки прямых, достаточно гладко сопряженные со смежными дугами. На прямолинейных участках $\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss} = 0$, вследствие чего указанная формула становится неопределенной. Однако и в данном случае безусловно соблюдается равенство $v_1^{(0)}(s) = 0$; мы удостоверимся в этом, обратившись непосредственно к второму равенству (3.3) и взяв во внимание, что по доказанному $\omega(z) = \theta(z) = A = 0$.

Примечание II. Из условия (1.11) ясно, что найденное решение (2.1) будет удовлетворять заданному краевому значению прогиба с точностью до некоторой постоянной. Изменив решение на эту аддитивную постоянную, мы точно удовлетворим названному условию.

Институт механики АН СССР

Поступило 21/1957

Գ. Ի. Շերման

ԵԶՐՈՎ ԱԶԱՏ ՇԵՆՎԱԾ ՍԱԼԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Ի. Մ.

Հոդվածում զիտարկվում է ազատ հենված սալի լայնական ծառերին թաղարկելով, որ նրա միջին մակերևույթը գրավում է բավականաչափ հարթ փակ եզրագծով սահմանափակված վերջավոր տիրույթ: Խնդիրը հանգում է տիրույթում $z = x + iy$ կոմպլեքս փոփոխականի $\varphi(z)$ և $\psi(z)$ երկու ռեգուլյար սխտեմների որոնմանը համապատասխան եզրային պայմաններից: Այդ ֆունկցիաները տրվում են հատուկ կերպով ընտրված ինտեգրալ ձևով, որը կախված է այսպես կոչված $\nu_1(s)$ և $\nu_2(s)$ խտություններից՝ ազդել իրական ֆունկցիաներից: Այդ ձևով արտահայտված $\varphi(z)$ և $\psi(z)$ -ի տեղադրումը վերոհիշյալ եզրային պայմանների մեջ՝ հանգեցնում է Ֆրեդհոլմի երկու ինտեգրալ հավասարումների սխտեմին՝ $\nu_n(s)$ ($n=1, 2$) խտությունները որոշելու համար: Նրա միջուկներն անընդհատ են և արտահայտվում են տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Ապացուցված է, որ Ֆրեդհոլմի սաացված սխտեմն ունի միայն մեկ լուծում: Ինտեգրալ հավասարումների միջուկների պարզությունը թույլ է տալիս, նկատ ունենալով ժամանակակից հաշվողական տեխնիկայի միջոցները, համեմատաբար հեշտ կատարել երևույթի որակական և թվային անալիզը: Այդ հանգամանքը հիմք է տալիս ընդունելու, որ խնդրի աշատեղ առաջարկված լուծումը գոյություն ունեցող այլ լուծումների համեմատությամբ, ունի որոշ առավելություններ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Халилов З. И. Решение общей задачи изгиба опертой упругой пластинки. Прикл. матем. и механика, XIV, 4 (1950).
2. Фридман М. М. Решение общей задачи об изгибе тонкой изотропной упругой плиты, опертой вдоль края. Прикл. матем. и механика, XVI (1952).
3. Каландия А. И. О задаче равновесия упругой пластинки с опертыми краями. Труды Тбилисского матем. института, XIX (1953).
4. Каландия А. И. Об одной смешанной задаче изгиба упругой пластинки. Прикл. матем. и механика, XVI, 3 (1952).