

А. А. Талалян

О сходимости почти всюду, подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов

Введение

В работе [2] Марцинкевичем была доказана следующая теорема:
Если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная О. Н. система функций, определенных на $[0, 1]$, то существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

не все коэффициенты которого равны нулю и для которого существует последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$, где

$$S_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n \varphi_n(x).$$

Далее он доказал, что в том случае когда функции $\varphi_n(x)$ равномерно ограничены, коэффициенты a_n могут стремиться к нулю.

Используя несколько другой метод, можно доказать следующую теорему.

Теорема I. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная О. Н. система функций, определенных на $[0, 1]$, то существует универсальный ряд по этой системе с коэффициентами, стремящимися к нулю, т. е. существуют действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ такие, что ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ обладает свойствами:

*а) для любой измеримой функции $f(x)^{**}$ найдется последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = f(x)$ почти всюду на $[0, 1]$.*

* Т. е. $\{\varphi_n(x)\}$ есть ортонормированная система на $[0, 1]$.

** $f(x)$ может быть равна $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

где

$$S_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n \tilde{\varphi}_n(x);$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Далее рассматриваются системы полные в смысле сходимости почти всюду.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, называется полной в смысле сходимости почти всюду, если для любой измеримой функции $f(x)$, заданной на $[0, 1]$, можно найти последовательность конечных линейных комбинаций функций из системы $\{f_n(x)\}$, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на $[0, 1]$.

Из теоремы 1 следует, что существуют О. Н. системы, полные в смысле сходимости почти всюду, которые не являются полными в смысле L_2 .

Если не требовать выполнения условия б), то можно доказать, что теорема 1 верна для любой системы $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, полной в смысле сходимости почти всюду.

Далее приводится пример О. Н. системы $\{\varphi_n(x)\}$ функций, определенных на $[0, 1]$, которая полна в смысле сходимости почти всюду и для которой не существует универсального ряда с коэффициентами стремящимися к нулю.

§ 1. Универсальные ряды для полных* О. Н. систем

Целью настоящего параграфа является доказательство теоремы 1. Для этого нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 1. Пусть $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ — произвольное конечное число функций, определенных на отрезке $\Delta = (\alpha, \beta)$ и принадлежащих классу $L_2(\alpha, \beta)$.

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — произвольное фиксированное число, такое, что $\varepsilon_0 < 1$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно определить функцию $f(x) \in L_2(\alpha, \beta)$, обладающую свойствами:

$$1) \quad \text{mes } E[f(x) \neq 0] \leq \varepsilon_0 |\Delta|.$$

$$2) \quad \int_{\Delta} f^2(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Delta} \phi_0^2(x) dx,$$

$$3) \quad \left| \int_{\Delta} \phi_0(x) \phi_k(x) dx - \int_{\Delta} f(x) \phi_k(x) dx \right| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

* В дальнейшем, если система $\{\varphi_n(x)\}$ полна в L_2 , то мы будем говорить, что система $\{\varphi_n(x)\}$ полна.

Лемма 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — О. Н. система функций, определенных на $[0,1]$, и $F(x)$ — произвольная функция из $L_2[0,1]$.

Тогда для любого $\varepsilon_0 > 0$ можно определить функцию $f(x) \in L_2[0,1]$, обладающую следующими свойствами:

$$a) \quad \text{mes } E[f(x) \neq 0] \leq \varepsilon_0,$$

$$b) \quad \left| \int_0^1 F(x) \varphi_n(x) dx - \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx \right| \leq \varepsilon_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эти леммы являются следствиями леммы 1 и леммы 2 из работы [4].

Лемма 3. Пусть $\varphi_n(x)$ — полная О. Н. система на множестве положительной меры $E_0 \subset [0,1]$ и $f(x) \in L_2(0,1)$, где $f(x) = 0$ при $x \in CE_0$ и $\varphi_i(x) = 0$ при $x \in CE_0$, $i = 1, 2, \dots$

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $n \geq 1$ можно определить действительные числа $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_m$ и множество $E \subset E_0$, обладающие свойствами:

$$1) \quad \left| f(x) - \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon \quad \text{при } x \in E;$$

$$2) \quad \text{mes } E > \text{mes } E_0 - \varepsilon;$$

$$3) \quad |a_k| \leq \varepsilon \quad (k = n+1, n+2, \dots, m).$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$ настолько малым, чтобы множество

$$E_1 = E_0 \cdot E \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon' |\varphi_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

имело меру

$$\text{mes } E_1 > \text{mes } E_0 - \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу леммы 2 можно определить $\varphi(x) \in L_2(0,1)$ такую, что множество $E_2 = E_0 \cdot E[\varphi(x) = 0]$ имеет меру

$$\text{mes } E_2 > \text{mes } E_0 - \frac{\varepsilon}{3}$$

и для $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ имеем:

$$\left| \int_0^1 \varphi(x) \varphi_k(x) dx - \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx \right| = \left| \int_{E_0} [\varphi(x) - f(x)] \varphi_k(x) dx \right| < \varepsilon'.$$

Очевидно, можно считать $\varphi(x) = 0$ при $x \in CE_0$.

Возьмем

$$F(x) = f(x) - \varphi(x), \quad F(x) \in L_2[0,1].$$

Положим

$$a_k = \int_0^1 F(x) \varphi_k(x) dx = \int_{E_0} F(x) \varphi_k(x) dx.$$

Тогда $|a_k| \leq \varepsilon' \quad (k = 1, 2, \dots).$

В силу полноты системы $\{\varphi_n(x)\}$ на E_0 , можно взять m настолько большим, чтобы множество

$$E_3 = E_0 \cdot E \left(\left| \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(x) - F(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

имело меру $\text{mes } E_3 > \text{mes } E_0 - \frac{\varepsilon}{3}$.

На множестве $E = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$ будет:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) - f(x) \right| &= \left| \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(x) - F(x) - \varphi(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(x) - F(x) \right| + \sum_{k=1}^n \left| \varepsilon' \varphi_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \end{aligned}$$

и так как $|a_k| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots)$ и $\text{mes } E = \text{mes } E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 > \text{mes } E_0 - \varepsilon$, то лемма 3 доказана.

Сформулируем еще две известные леммы [3]:

Лемма 4. Пусть $\varepsilon_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$ — положительные числа такие, что ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu$ сходится, и пусть $\psi_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \dots$ — измеримые функции, почти всюду конечные на $[0, 1]$ и такие, что $|\psi_\nu(x)| < \varepsilon_\nu$ при $x \in e_\nu$, где e_ν — измеримые множества, удовлетворяющие условиям:

$$\text{mes } e_\nu > 1 - \varepsilon_\nu, \quad e_\nu \subset [0, 1].$$

Тогда имеем $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi_\nu(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$.

Лемма 5. Какова бы ни была измеримая функция $f(x)$, имеющая в каждой точке сегмента определенное значение, конечное или бесконечное, можно найти последовательность полиномов

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_\nu(x), \dots,$$

которые все различны, имеют рациональные коэффициенты и удовлетворяют условию:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu(x) = f(x)$$

почти всюду на $[0, 1]$.

Доказательство теоремы 1. Перенумеруем все полиномы с рациональными коэффициентами: $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$ и возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$ такую, что

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n \dots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \quad (1)$$

Принимая в формулировке леммы 3 $n=0$, $f(x)=P_1(x)$, $\varepsilon=\varepsilon_1$, $E_0=(0,1)$, определяем числа $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}$ и множество E_1 так, чтобы выполнялись условия:

- 1) $\left| P_1(x) - \sum_{i=1}^{n_1} a_i^{(1)} \varphi_i(x) \right| < \varepsilon_1$ при $x \in E_1$;
- 2) $\text{mes } E_1 > 1 - \varepsilon_1$;
- 3) $|a_i^{(1)}| \leq \varepsilon_1$ ($i=1, 2, \dots, n_1$).

Предположим, что числа $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$; $\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}\}, \dots, \{a_{n_{k-2}+1}^{(k-1)}, \dots, a_{n_{k-1}}^{(k-1)}\}$ и множества $E_1, E_2, \dots, E_{k-1}$ уже определены.

Полагая в формулировке леммы 3 $n=n_{k-1}$, $\varepsilon=\varepsilon_k$, $E_0=(0,1)$ и

$$f(x) = P_k(x) - \left[\sum_{s=1}^{n_1} a_s^{(1)} \varphi_s(x) + \sum_{s=n_1+1}^{n_2} a_s^{(2)} \varphi_s(x) + \dots + \sum_{s=n_{k-2}+1}^{n_{k-1}} a_s^{(k-1)} \varphi_s(x) \right],$$

определяем числа $a_{n_{k-1}+1}^{(k)}, \dots, a_{n_k}^{(k)}$ и множество E_k так, чтобы выполнялись условия:

- 1) $\left| P_k(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=n_{i-1}+1}^{n_i} a_s^{(i)} \varphi_s(x) - \sum_{s=n_{k-1}+1}^{n_k} a_s^{(k)} \varphi_s(x) \right| < \varepsilon_k$, $x \in E_k$, $n_0=0$,
- 2) $\text{mes } E_k > 1 - \varepsilon_k$;
- 3) $|a_i^{(k)}| \leq \varepsilon_k$ ($i=n_{k-1}+1, \dots, n_k$).

Продолжая эти построения последовательно для всех $k=1, 2, \dots$ получаем ряд:

$$\sum_{s=1}^{n_1} a_s^{(1)} \varphi_s(x) + \sum_{s=n_1+1}^{n_2} a_s^{(2)} \varphi_s(x) + \dots + \sum_{s=n_{k-1}+1}^{n_k} a_s^{(k)} \varphi_s(x) + \dots$$

Напишем его в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad (2)$$

где полагается, что члены следуют по порядку их следования в первоначальном ряде.

Покажем, что этот ряд обладает свойствами, указанными в формулировке теоремы 1.

Из определения ряда (2) и условия 3) непосредственно видно, что $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, т. е. условие б) теоремы 1 выполнено.

Проверим условие а).

Заметим сначала, что для любого полинома с рациональными коэффициентами $P_k(x)$ найдутся натуральное число n_k и множество E_k такие, что

$$\left| P_k(x) - \sum_{i=1}^{n_k} a_i \varphi_i(x) \right| < \varepsilon_k \quad \text{при } x \in E_k, \text{ mes } E_k > 1 - \varepsilon_k. \quad (3)$$

Это непосредственно следует из определения ряда (2) и из условия 1).

Пусть $f(x)$ — произвольная измеримая функция, имеющая определенное значение, конечное или бесконечное, в каждой точке отрезка $[0, 1]$.

В силу леммы 5 можно найти последовательность полиномов с рациональными коэффициентами: $\{P_{s_\nu}(x)\}$, расположенных по порядку их следования в последовательности $\{P_k(x)\}$, такую, что

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_{s_\nu}(x) = f(x) \quad (4)$$

почти всюду на $[0, 1]$, при этом $s_{\nu-1} < s_\nu$, $\nu = 2, 3, \dots$

В силу (3), для некоторой последовательности натуральных чисел $\{m_\nu\}$ ($m_\nu = n_{s_\nu}$, $m_{\nu-1} < m_\nu$) будет иметь место:

$$\left| P_{s_\nu}(x) - \sum_{i=1}^{m_\nu} a_i \varphi_i(x) \right| < \varepsilon_{s_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, x \in E_{s_\nu}, \text{ mes } E_{s_\nu} > 1 - \varepsilon_{s_\nu}) \quad (5)$$

Согласно лемме 4,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[P_{s_\nu}(x) - \sum_{i=1}^{m_\nu} a_i \varphi_i(x) \right] = 0 \quad (6)$$

почти всюду на $[0, 1]$. Отсюда в силу (4) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_n} a_i \varphi_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{m_n}(x) = f(x)$$

почти всюду.

Теорема 1 доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы 1 условием 3) леммы 3 мы пользовались лишь для того, чтобы коэффициенты a_n , ($n = 1, 2, \dots$) универсального ряда стремились к нулю.

Если не потребовать выполнения условия б), то теорему 1 можно доказать при помощи леммы 3, используя условия 1) и 2).

§ 2. Системы функций, полные в смысле сходимости почти всюду. Универсальные ряды по таким системам

В этом параграфе рассматриваются последовательности $\{f_n(x)\}$ функций, определенных на $[0, 1]$, полные в смысле сходимости почти всюду (см. определение, стр. 18).

Теорема 2. Для того, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, была полной в смысле сходимости почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

А) Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти множество $E \subset (0, 1)$, $\text{mes } E > 1 - \varepsilon$ такое, что последовательность $\{f_n(x)\}$ полна на множестве E в смысле L_2^* .

Необходимость. Пусть $\{f_n(x)\}$ полна в смысле сходимости почти всюду. Возьмем какую-нибудь систему $\{\varphi_n(x)\}$, полную в $L_2(0, 1)$. Применяя теорему Егорова, для каждой функции $\varphi_n(x)$ можно найти последовательность линейных комбинаций из функций

системы $\{f_n(x)\}$ вида $F_{n,k}(x) = \sum_{i=1}^{m_k} C_{n,i}^{(k)} f_i(x)$, сходящуюся к $\varphi_n(x)$ при

$k \rightarrow \infty$ равномерно на множестве E_n , $\text{mes } E_n > 1 - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Тогда на

множестве $E' = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, $\text{mes } E' > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, каждая функция равномерно приближается линейными комбинациями из функций $\{f_n(x)\}$.

Так как функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ почти везде конечны, то можно найти множество $E \subset E'$, $\text{mes } E > 1 - \varepsilon$ такое, что каждая функция $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ ограничена на E и, следовательно, на множестве E принадлежит L_2 .

Очевидно, на множестве E система $\{f_n(x)\}$ будет полной в L_2 .

* Из доказательства будет видно, что теорема верна и в том случае, когда вместо $[0, 1]$ взято любое измеримое множество E_0 .

Достаточность. Пусть $F(x)$ — произвольная измеримая функция. Возьмем последовательность $\{P_k(x)\}$ полиномов так, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x) = F(x)$$

почти всюду на $[0,1]$ (см. лемму 5). Так как условие А) выполнено,

то легко видеть, что можно найти функции $\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^{n_k} a_{ki} f_i(x)$ и множества E_k такие, что

$$1) \quad |P_k(x) - \Phi_k(x)| < \varepsilon_k \quad \text{при } x \in E_k;$$

$$2) \quad \text{mes } E_k > 1 - \varepsilon_k, \quad \text{где } \varepsilon_k > 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty.$$

Тогда в силу леммы 4 будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = F(x)$$

почти всюду на $[0,1]$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Если система $\{f_n(x)\}$ полна в смысле сходимости почти всюду, то она остается полной также после удаления любого конечного числа функций, и всегда можно удалить такую бесконечную систему $\{f_{n_k}(x)\}$, что оставшаяся система $\{\varphi_n(x)\} = \{f_n(x)\} - \{f_{n_k}(x)\}$ тоже будет полной в смысле сходимости почти всюду.

Доказательство. Выделим из системы $\{f_n(x)\}$ какую-нибудь функцию, например функцию $f_1(x)$ и покажем, что последовательность $f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$ полна в смысле сходимости почти всюду.

Пусть ε — произвольное положительное число и множество E , $\text{mes } E > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ в силу условия А) выбрано так, что система $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ полна на множестве E в смысле L_2 .

Пусть $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ есть О. Н. система на E , полученная при помощи ортогонализации последовательности $f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$. Покажем, что с точностью до постоянного множителя существует не более одной не эквивалентной нулю функции, которая ортогональна ко всем функциям

$$\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

Обозначим через $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x), \dots$ О. Н. систему на E , полученную при помощи ортогонализации системы $f_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$. Система $\{\omega_n(x)\}$ будет полной О. Н. системой на множестве E , и эти функции напишутся в виде:

$$\omega_n(x) = C_{n,1} f_1(x) + C_{n,2} \varphi_2(x) + \dots + C_{n,n} \varphi_n(x) \\ (n = 1, 2, \dots).$$

Если система $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ не полна на E , то коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$, ортогональной ко всем этим функциям, по системе $\{\omega_n(x)\}$ будут:

$$a_n = \int_E \omega_n(x) \varphi(x) dx = C_{n1} \int_E f_1(x) \varphi(x) dx.$$

Итак, $a_n = C_0 \cdot C_{n,1}$, $n = 1, 2, \dots$, где $C_0 = \int_E f_1(x) \varphi(x) dx$. Тогда

$C_0 \neq 0$, ибо в силу полноты $\{\omega_n(x)\}$ было бы $\varphi(x) \equiv 0$, и функция $\varphi(x)$ определяется с точностью до постоянного множителя, отличного от нуля.

Пусть $\varphi_1(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ и $\int_E \varphi_1^2(x) dx = 1$. Тогда система $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$

есть полная О. Н. система на множестве E и, следовательно, полна в смысле сходимости почти всюду на множестве E (это следует из теоремы 1, а также из теоремы 2).

Применяя лемму 3, где положено $n = 1$, $f(x) = \varphi_1(x)$, $E_0 = E$, мы можем определить функции $\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^k a_i^{(k)} \varphi_i(x)$ и множества E_k ,

$k = 1, 2, \dots$ такие, что

- 1) $|\varphi_1(x) - \Phi_k(x)| < \varepsilon_k$ при $x \in E_k \subset E$;
- 2) $\text{mes } E_k > \text{mes } E - \varepsilon_k$ где $\varepsilon_k > 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$.

Тогда в силу леммы 4 имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = \varphi_1(x) \text{ почти всюду на } E.$$

Отсюда, так как $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ полна в смысле сходимости почти всюду на E , то система $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ тоже будет полной на E в смысле сходимости почти всюду.

В силу теоремы 2 на некотором множестве $E' \subset E$, где $\text{mes } E' > \text{mes } E - \frac{\varepsilon}{2}$, система $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ будет полной в смысле L_2 .

Система $f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$ тоже будет полной на множестве E' , ибо система $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ получена при помощи ортогонализации этой системы на множестве E , $E \supset E'$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $E' \subset (0,1)$ $\text{mes } E' > 1 - \varepsilon$, такое, что $f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$ полна на E' в смысле L_2 . В силу тео-

ремы 2 система $f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$ полна в смысле сходимости почти всюду на $[0, 1]$.

Итак, доказано, что система $\{f_n(x)\}$ остается полной в смысле сходимости почти всюду, если удалить из нее какую-нибудь одну функцию.

Отсюда непосредственно следует, что система $\{f_n(x)\}$ остается замкнутой в смысле сходимости почти всюду после удаления любого, конечного числа функций.

Покажем теперь, что из $\{f_n(x)\}$ можно удалить бесконечную систему $\{f_{n_k}(x)\}$ такую, что оставшаяся система $\{\psi_n(x)\} = \{f_n(x)\} - \{f_{n_k}(x)\}$ будет полной в смысле сходимости почти всюду.

Для этого, очевидно, достаточно выбрать систему $\{f_{n_k}(x)\}$ так, чтобы каждую функцию $f_{n_k}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, можно было приблизить линейными комбинациями из функций системы $\{\psi_n(x)\}$.

Пусть $\{\varepsilon_k\}$ — последовательность положительных чисел и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty.$$

Возьмем из системы $\{f_n(x)\}$ какую-нибудь функцию $f_{n_1}(x)$.

Так как системы $f_n(x), f_{n+1}(x), \dots, f_{n+p}(x), \dots$ при любом n полны в смысле сходимости почти всюду на $[0, 1]$, то, применяя теорему Егорова, можно найти последовательность функций вида

$$\Phi_{n_1, k}(x) = \sum_{n=n_1, k+1}^{n_1, k} b_n^{(1)} f_n(x)$$

и множества $e_k^{(1)} \subset (0, 1)$ обладающие свойствами:

- 1) $n_1 < n_{1,1}, n_{1,k} < n_{1,k+1} < n_{1,k+1} (k = 1, 2, 3, \dots)$;
- 2) $|f_{n_1}(x) - \Phi_{n_1, k}(x)| < \varepsilon_k$ при $x \in e_k^{(1)} (k = 1, 2, \dots)$;
- 3) $\text{mes } e_k^{(1)} > 1 - \varepsilon_k (k = 1, 2, \dots)$.

В силу 2) и 3) и в силу леммы 4 имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{n_1, k}(x) = f_{n_1}(x) \text{ почти всюду на } [0, 1].$$

Из условия 1) видно, что бесконечное множество функций из системы $\{f_n(x)\}$ не входит в выражения функций $\Phi_{n_1, k}(x)$, $k = 1, 2, \dots$. Обозначим это счетное множество функций через $\{f\}_1$.

Возьмем какую-нибудь функцию $f_{n_2}(x)$ из множества $\{f\}_1$, так, чтобы $n_2 > n_1$.

Точно так же, как выше, можно найти последовательность функций вида

$$\Phi_{n_2, k}(x) = \sum_{n=n_{2, k}+1}^{n_{2, k}^*} b_n^{(2)} f_n(x)$$

и множества $e_k^{(2)}$, $k=1, 2, \dots$, обладающие свойствами:

- 1) $n_2 < n_{2, 1}$, $n_{2, k} < n_{2, k}^* < n_{2, k+1}$ ($k=1, 2, \dots$);
- 2) $|f_{n_2}(x) - \Phi_{n_2, k}(x)| < \varepsilon_k$ при $x \in e_k^{(2)}$, $k=1, 2, \dots$
- 3) $\text{mes } e_k^{(2)} > 1 - \varepsilon_k$ ($k=1, 2, \dots$)

Обозначим через $[f]_2$ множество функций из $\{f_n(x)\}$, не входящих в выражения функций $\Phi_{n_2, k}(x)$, $k=1, 2, \dots$. Легко видеть, что можно положить числа $n_{2, k}$, $n_{2, k}^*$, $k=1, 2, \dots$ выбранными таким образом, чтобы наряду с условиями 1), 2) и 3) выполнялось также условие:

4) Множество $[f]_1 \cdot [f]_2$, состоящее из общих элементов множеств $[f]_1$ и $[f]_2$, состоит из бесконечного числа элементов.

Точно так же, как и выше, имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{n_2, k}(x) = f_{n_2}(x) \text{ почти всюду на } [0, 1].$$

Продолжим этот процесс неограниченно.

В m -ом шаге имеем функцию $f_{n_m} \in [f]_1 \cdot [f]_2 \cdots [f]_{m-1}$; $n_m > n_{m-1}$, последовательность функций

$$\Phi_{n_m, k}(x) = \sum_{n=n_{m, k}+1}^{n_{m, k}^*} b_n^{(m)} f_n(x) \quad (k=1, 2, \dots) \text{ при чем}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{n_m, k}(x) = f_{n_m}(x) \text{ почти всюду на } [0, 1].$$

$$n_m < n_{m, k} < n_{m, k}^* < n_{m, k+1},$$

и множество $[f]_m$, которое имеет бесконечное число общих элементов с множеством $[f]_1 \cdot [f]_2 \cdots [f]_{m-1}$.

Из системы $\{f_n(x)\}$ исключим систему $\{f_{n_m}(x)\}$ и остальную систему обозначим через $\{\psi_n(x)\}$.

Так как для любой функции $f_{n_m}(x)$, $m=1, 2, 3, \dots$ имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{n_m, k}(x) = f_{n_m}(x)$ почти всюду на $[0, 1]$ и, как видно из выбора системы $\{f_{n_m}(x)\}$, функции $\Phi_{n_m, k}(x)$, $m=1, 2, \dots$, $k=1, 2, \dots$ выражаются функциями, входящими в систему $\{\psi_n(x)\} = \{f_n(x)\} - \{f_{n_m}(x)\}$, то теорема доказана.

Замечание. В частности, когда имеем полную О. Н. систему $\{\varphi_n(x)\}$ функций, определенных на $[0, 1]$, то для нее теорема 3 непосредственно следует из теоремы 1 (см. стр. 17).

В самом деле, пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, где $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, является универсальным рядом.

Так как $a_n \rightarrow 0$, то можно взять последовательность $\{m_k\}$ так, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} \varphi_{m_k}(x)$ сходилась почти всюду на $[0, 1]$. Пусть почти везде конечная функция $F_0(x)$ является суммой этого ряда, и пусть $F(x)$ — какая-нибудь измеримая функция.

Возьмем $\Phi(x) = F(x) + F_0(x)$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ универсальный, то существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = \Phi(x).$$

Но $S_{n_k}(x) = \sum_{(s)} a_{m_s} \varphi_{m_s}(x) + \sum_{(e)} a_{p_e} \varphi_{p_e}(x)$, где φ_{p_e} , $e = 1, 2, \dots$ суть функции, оставшиеся от $\{\varphi_n(x)\}$ после удаления системы $\{\varphi_{m_k}(x)\}$.

Так как при $k \rightarrow +\infty$ первая сумма стремится к $F_0(x)$, то вторая сумма будет стремиться к $F(x)$.

Итак, система $\{\varphi_{p_e}(x)\}$ полна в смысле сходимости почти всюду. Остается заметить, что эти рассуждения можно провести также при удалении из $\{\varphi_n(x)\}$ любого конечного числа функций что и требовалось доказать.

В силу теоремы 2 отсюда следует, что при удалении любого конечного числа функций из полной О. Н. системы $\{\varphi_n(x)\}$ оставшаяся система обладает свойством А (см. теорему 2), и всегда можно удалить такую бесконечную последовательность $\{\varphi_{m_k}(x)\}$, что оставшаяся система будет обладать свойством А.

Теорема 4. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, полна в смысле сходимости почти всюду.

Тогда существуют действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ такие, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ является универсальным, т. е. для любой измеримой функции $F(x)$ существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = F(x) \text{ почти всюду на } [0, 1], \text{ где}$$

$$S_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n f_n(x).$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что, так как в силу теоремы 3 все последовательности $f_n(x)$, $f_{n+1}(x), \dots, f_{n+p}(x), \dots$, $n = 1, 2, \dots$ полны в смысле сходимости почти всюду, то для любой почти всюду конечной функции $f(x)$, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и n , применяя теорему Егорова, можно найти числа $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_m$ и множество E такие, что

$$1) \quad \left| f(x) - \sum_{k=n+1}^m a_k f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \text{при } x \in E;$$

$$2) \quad \text{mes } E > 1 - \varepsilon.$$

Таким образом, выполняются условия 1) и 2) леммы 3, которая применяется для доказательства теоремы 1 (см. стр. 17).

В силу замечания, сделанного в конце доказательства теоремы 3 (в конце § 1), мы видим, что теорема 4 верна.

Вообще говоря, для любой системы $\{f_n(x)\}$, полной в смысле сходимости почти всюду, нельзя построить универсальный ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю. Простым примером такой системы является система $\{x^n\}$, рассматриваемая на $[0, 1]$.

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ имеем $a_n \rightarrow 0$, то он будет абсолютно сходящимся для $x < 1$ и, следовательно, не может быть универсальным.

Верно также следующее утверждение:

Существует О. Н. система $\{\psi_n(x)\}$ функций, заданных на $[0, 1]$, обладающая тем свойством, что она полна в смысле сходимости почти всюду, и по этой системе нельзя построить универсальный ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю.

Построение системы $\{\psi_n(x)\}$.

Возьмем последовательность интервалов

$$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots \quad \delta_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1} \right),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Разделим последовательность $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ на счетное число бесконечных последовательностей $\{\delta_k^{(m)}\}$ так, чтобы

1) при $m \neq l$ последовательности $\{\delta_k^{(m)}\}$ и $\{\delta_k^{(l)}\}$ не имели общих интервалов;

2) в каждой последовательности $\{\delta_k^{(m)}\}$, $m = 1, 2, \dots$; интервалы следовали по порядку их следования в последовательности $\{\delta_n\}$ и при $m < l$ интервал $\delta_k^{(m)}$ предшествовал в последовательности $\{\delta_n\}$ интервалу $\delta_k^{(l)}$ для любого $k = 1, 2, \dots$

Положим:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(1)}, \\ 0 & \text{при } x \notin \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(1)}. \end{cases}$$

Определим $\varphi_2(x)$ следующим образом: возьмем из последовательности $\{\delta_k^{(1)}\}$ какой-нибудь интервал $\delta_{k_2}^{(1)}$, расположенный левее от δ_1 .

Заметим, что в силу свойства 2) все интервалы $\delta_k^{(2)}$ расположены левее интервала δ_1 .

Положим:

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in \delta_0 + \delta_1 = \left(\frac{1}{3}, 1\right), \\ 1 & \text{при } x \in \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(2)}, \\ \frac{\int_{\delta_0+\delta_1} x \varphi_1(x) dx}{|\delta_{k_2}^{(1)}|} & \text{при } x \in \delta_{k_2}^{(1)}, \\ 0 & \text{в остальных точках отрезка } [0,1]. \end{cases}$$

Из определения функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ и из свойства 1) имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx &= \int_{(\delta_0+\delta_1)} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx + \int_{C(\delta_0+\delta_1)} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \\ &= \int_{(\delta_0+\delta_1)} x \varphi_1(x) dx + \int_{\delta_{k_2}^{(1)}} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ уже определены так, что они попарно ортогональны на $[0,1]$, и функция $\varphi_i(x)$, $1 < i \leq n$ определена так, что:

$$(*) \varphi_i(x) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin (\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{i-1}) + (\delta_{k_1}^{(1)} + \delta_{k_1}^{(2)} + \dots + \delta_{k_1}^{(i-1)}) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(i)}, \\ 1 & \text{при } x \in \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(i)}. \end{cases}$$

Здесь $\delta_{k_i}^{(j)}$ есть интервал из последовательности $\{\delta_k^{(j)}\}$ $j > i$, и полагается k_i выбранным настолько большим, что интервал $\delta_{k_i}^{(1)}$, а, следовательно, и интервалы $\delta_{k_i}^{(j)}$, $j > 1$, расположены левее интервала δ_{i-1} (см. свойство 2).

Интервал $\delta_i^{(1)}$ лежит левее интервалов $\delta_i^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots$, ($i = 1$).

Тогда $\delta_i^{(1)}$ лежит левее $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}$, и, следовательно, все интервалы $\delta_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \dots$ лежат левее интервала δ_{i-1} (см. условия 1 и 2).

Далее, полагаем, что $k_i < k_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, (n-1)$.

Определим функцию $\varphi_{n+1}(x)$. Возьмем $k_{n+1} > k_n$ так, чтобы выполнялось условие:

(**) Интервал $\delta_{k_{n+1}}^{(1)}$ левее интервала δ_n . Заметим, что интервалы $\delta_k^{(n+1)}$, $k = 1, 2, \dots$ лежат левее интервала δ_n .

Положим:

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} x^n & \text{при } x \in \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n = \left(\frac{1}{n+2}, 1\right), \\ -\frac{\int_{\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n} x^n \varphi_i(x) dx}{|\delta_{k_{n+1}}^{(i)}|} & \text{при } x \in \delta_{k_{n+1}}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n, \\ 1 & \text{при } x \in \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(n+1)}, \\ 0 & \text{в остальных точках отрезка } [0, 1]. \end{cases}$$

Проверим, равенство $\int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_{n+1}(x) dx = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В силу свойства (*) функции $\varphi_i(x)$ и определения функции $\varphi_{n+1}(x)$, учитывая, что $\varphi_i(x) = 0$ на $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(n+1)}$ (см. 1), имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_{n+1}(x) dx &= \int_{\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n} \varphi_i(x) \varphi_{n+1}(x) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{\delta_{k_{n+1}}^{(j)}} \varphi_j(x) \varphi_{n+1}(x) dx. \end{aligned}$$

При $j \neq i$ интервалы $\delta_{k_{n+1}}^{(j)}$ отличны от всех интервалов $\delta_k^{(i)}$ $k = 1, 2, \dots$. Далее, интервалы $\delta_{k_{n+1}}^{(j)}$ лежат левее δ_n и, следовательно, левее от $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i$ ($i < n$) в силу (**) и свойства 2). Следовательно, в силу (*) будет $\varphi_i(x) = 0$ на $\delta_{k_{n+1}}^{(j)}$ при $j \neq i$.

Итак:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_{n+1}(x) dx &= \int_{(\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n)} \varphi_i(x) \varphi_{n+1}(x) dx + \int_{\delta_{n+1}^{(1)}} \varphi_{n+1}(x) \varphi_i(x) dx = \\ &= \int_{(\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n)} x^n \varphi_i(x) dx - \int_{(\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n)} x^n \varphi_i(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что из определения функции $\varphi_{n+1}(x)$ непосредственно видно, что она тоже обладает свойством (*) функций $\varphi_i(x)$, $i \leq n$. Следовательно, так как $\varphi_2(x)$ обладает свойством (*), то $\varphi_i(x)$ обладают свойством (*) при любом $i = 1, 2, \dots$.

Неограниченно продолжая вышеуказанные построения мы получим систему $\{\varphi_n(x)\}$, ортогональную на $[0, 1]$. Положим:

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n(x)\|}$$

Тогда система $\{\psi_n(x)\}$ будет О. Н. системой на $[0, 1]$.

Покажем, что $\{\psi_n(x)\}$ есть искомая система.

Для этого оценим нормы $\|\varphi_n(x)\|$, $n = 1, 2, \dots$

Имеем:

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\| &= \left(\int_0^1 \varphi_n^2(x) dx \right)^{1/2} > \left(\int_{\delta_{k_n}^{(1)}} \varphi_n^2(x) dx \right)^{1/2} = \\ &= \left[\left(\frac{\int_{(\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1})} \varphi_1(x) \varphi_n(x) dx}{|\delta_{k_n}^{(1)}|} \right)^2 \cdot |\delta_{k_n}^{(1)}| \right]^{1/2} > \left(\frac{\left[\int_{1/2}^1 x^{n-1} dx \right]^2}{|\delta_{k_n}^{(1)}|} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как в силу (**) интервал $\delta_{k_n}^{(1)}$ лежит левее интервала δ_{n-1} и длины интервалов убывают с возрастанием номера, то:

$$|\delta_{k_n}^{(1)}| \leq |\delta_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Итак.

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\| &> \sqrt{(n+1)(n+2)} \int_{1/2}^1 x^{n-1} dx = \sqrt{(n+1)(n+2)} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n \cdot n} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{n}} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) > A > 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

По определению системы $\{\psi_k(x)\}$, для любого натурального N имеем при $k > N$

$$\psi_k(x) = \frac{x^k}{\|\varphi_k\|} \quad \text{при } x \in \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_N = \left(\frac{1}{N+2}, 1\right).$$

Отсюда видно, что система $\{\psi_k(x)\}$ полна в L_2 на любом интервале $\left(\frac{1}{N}, 1\right)$, $N = 1, 2, \dots$ и, следовательно, полна в смысле сходимости почти всюду (см. теорему 2). С другой стороны, любой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x)$, где $a_k \rightarrow 0$, будет абсолютно сходящимся в интервале $(0,1)$,

ибо для любого N имеем, при $x \in \left(\frac{1}{N+3}, 1\right)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x) = \sum_{k=1}^N a_k \psi_k(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k x^k}{\|\varphi_k\|},$$

и второй ряд абсолютно сходится, так как $\|\varphi_k\| > A > 0$. Таким образом, любой ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$, где $a_n \rightarrow 0$, не может быть универсальным.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 1 VIII 1956

Յ. Յ. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԱՍՆԱԿԻ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐՅԱ ԱՄԵՆՈՒՐԵՔ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում դիտարկվում են $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ շարքերը, որտեղ $f_n(x)$

($n = 1, 2, \dots$) $[0,1]$ հատվածի վրա որոշված համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի ֆունկցիա է:

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեման:

Թեորեմ. եթե $\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը կազմում է լրիվ օրթոգոնալ սիստեմ, ապա, ըստ այդ սիստեմի, գոյություն ունի ունիվերսալ շարք, որի գործակիցները ձգտում են զրոյի, այսինքն գոյություն ունի իրական քվերի այնպիսի $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ հաջորդականություն, որի համար՝

ա) $[0,1]$ հատվածում որոշված ցանկացած $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի բնական քվերի այնպիսի $\{n_k\}$ հաջորդականություն, որ $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = f(x)$ համարյա ամենուրեք $[0,1]$ -ի վրա, որտեղ

$$S_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n f_n(x),$$

$$p) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0;$$

եթե $p)$ պայմանը չպահանջենք, ապա թեորեման ճիշտ կլինի ցանկացած $(f_n(x))$ հաջորդականության համար, եթե այդ հաջորդականության ֆունկցիաների վերջավոր գծային կոմբինացիաները միևնույն թիվ են համարյա միևնույնք զուգամիտելու իմաստով:

Այդ թեորեմաները հանգիստանում են ոչ-զրոյական շարքերի վերաբերյալ Մարցինկևիչի թեորեմաների ընդհանրացումը [2]:

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaczmarz und Steinhaus. Theorie der Orthogonalreihen. Warszawa-Lwow (1935).
2. Marcinkiewicz. Quelques theorems sur les series orthogonales. Ann. de la Soc. Pol de math. XVI, 84—95 (1938).
3. Меньшов Д. Е. О частных суммах тригонометрических рядов. Матем. сборник, 20 (62): 2.
4. Талалян А. А. О сходимости по мере рядов по базисам пространства L_p , $p > 1$. Известия АН Армянской ССР, серия физико-матем. наук, 10, 1 (1957).