

И. С. Саргсян

Асимптотическое поведение производных спектральной функции оператора Штурма-Лиувилля

Пусть дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля

$$L[y] = \frac{d^2}{dx^2} y(x) - q(x)y(x) \quad (1)$$

задан на полупрямой $(0, \infty)$, и вещественная функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале.

Краевая задача для оператора (1) определяется граничным условием в нуле:

$$y'(0) - hy(0) = 0. \quad (2)$$

Обозначим через $\varphi(x, \mu)$ решение уравнения

$$L[y] + \lambda y = 0, \quad (\lambda = \mu^2, \lambda > 0), \quad (3)$$

при начальных условиях

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h. \quad (4)$$

Каждой краевой задаче (2) соответствует неубывающая, ограниченная в каждом конечном интервале, непрерывная слева функция $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$, порождающая изометрическое отображение пространства $L^2(0, \infty)$ на $L^2_{[\rho]}(-\infty, \infty)$ по формулам

$$F(\mu) = l.i.m._{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x) \varphi(x, \mu) dx,$$

$$f(x) = l.i.m._{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(\mu) \varphi(x, \mu) d\rho(\mu),$$

где интегралы сходятся в метриках пространств $L^2_{[\rho]}(-\infty, \infty)$ и $L^2(0, \infty)$, соответственно, и справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f^2(x) dx = \int_{-\infty}^\infty F^2(\mu) d\rho(\mu).$$

Назовем спектральной функцией уравнения (3) (при начальных данных (4)) функцию

$$\left. \begin{aligned} \theta(x, s; \mu) &= \int_0^x \varphi(x, \nu) \varphi(s, \nu) d\nu, & \mu > 0, \\ \theta(x, s; \mu) &= -\theta(x, s; -\mu), & \mu < 0, \\ \theta(x, s; \mu) &= 0, & \mu = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Настоящая заметка посвящена изучению асимптотического поведения производных спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ при больших μ , вернее, улучшению полученных нами в работе [7] асимптотических формул для производных спектральной функции. В работе [7] было установлено следующее предложение:

Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(k-1)$ -ю производную, то при каждом фиксированном x и s при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка:

$$\left| \int_0^x \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^k d\nu \left\{ \frac{\partial^k \theta(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} - \frac{\partial^k \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} \right\} \right| < C,$$

$$(i+j=k=1, 2, \dots).$$

где $\theta^*(x, s; \mu)$ — спектральная функция уравнения (3) при $q(x) \equiv 0$, а C — некоторая постоянная, зависящая от x и s и не зависящая от μ .

Цель настоящей работы доказать следующую теорему:

Теорема. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(k-1)$ -ю производную, то при каждом фиксированном x и s справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^x \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^k d\nu \left[\frac{\partial^k \theta(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} - \frac{\partial^k \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial^k u(x, t, s)}{\partial x^i \partial s^j} \cdot \frac{I_{k+1/2}(\mu t)}{(\mu t)^{k+1/2}} dt \right\} = 0$$

$$(i+j=k=1, 2, \dots),$$

где $\theta^*(x, s; \mu)$ — спектральная функция уравнения (3) при $q(x) \equiv 0$, функция $w(x, t, s)$ строится по функции Римана уравнения в частных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, а $I_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка p .

Асимптотическое поведение самой спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ изучено Б. М. Левитаном [1] и В. А. Марченко [4]–[5].

Основными вспомогательными средствами в настоящей работе являются метод Б. М. Левитана [1] и одна спектральная тауберова теорема В. А. Марченко [5].

1. Некоторые вспомогательные формулы и леммы

Для простоты изложения будем предполагать, что $h = 0$, т. е. будем рассматривать задачу:

$$\begin{cases} y'' + [\lambda - q(x)] y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

Далее, будем предполагать, что спектр задачи (6) неотрицателен или, если отрицательный спектр существует, то он снизу ограничен. Последний случай легко приводится к предыдущему. Пусть $\lambda = \mu^2$, ($\mu > 0$). Обозначим через $\varphi(x, \mu)$ решение задачи (6).

Как известно (см., например, [2], стр. 78), для произвольного действительного числа t справедлива формула

$$\begin{aligned} \varphi(x, \mu) \cos \mu t &= \frac{1}{2} \{ \varphi(x+t, \mu) + \varphi(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s) \varphi(s, \mu) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

О дифференцируемости функции $w(x, t, s)$ по x и s в работе [7] была доказана следующая

Лемма 1. Если функция $q(x)$ имеет производные до порядка $k-1$, то функция $w(x, t, s)$ по x и s дифференцируема k раз и из суммируемости и ограниченности $(k-1)$ -й производной функции $q(x)$ следует, соответственно, суммируемость и ограниченность производной k -го порядка по x и s функции $w(x, t, s)$.

Обозначим через $g_s^{(l)}$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $g_s(t)$ четна, т. е. $g_s(t) = g_s(-t)$
2. $g_s(t)$ обращается в нуль вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$.
3. $g_s(t)$ бесконечно дифференцируема.

Обозначим через $\psi_s(\mu) \cos$ — преобразование Фурье функции $g_s(t)$, т. е. положим

$$\psi_s(\mu) = \int_0^\varepsilon g_s(t) \cos \mu t dt. \quad (8)$$

Дифференцируя равенство (7) по x , получим:

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \cos \mu t &= \frac{1}{2} \{ \varphi'_x(x+t, \mu) + \varphi'_x(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \{ w(x, t, x+t) \varphi(x+t, \mu) - w(x, t, x-t) \varphi(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \varphi(s, \mu) ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Из определения функции $w(x, t, s)$ следует, что $w(x, t, x \pm t) = 0$, поэтому равенство (9) примет вид:

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \cos \mu t &= \frac{1}{2} \{ \varphi'_x(x+t, \mu) + \varphi'_x(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \varphi(s, \mu) ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Помножим обе части равенства (10) на $g_s(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до x , после чего, в силу (8), получим:

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \phi_s(\mu) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^x \varphi'_t(x+t, \mu) g_s(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x \varphi'_t(x-t, \mu) g_s(t) dt \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x g_s(t) \left\{ \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \varphi(s, \mu) ds \right\} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем первый член в правой части равенства (11). Интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi'_t(x+t, \mu) g_s(t) dt &= -\varphi(x, \mu) g_s(0) - \int_0^x \varphi(x+t, \mu) g'_s(t) dt, \\ \int_0^x \varphi'_t(x-t, \mu) g_s(t) dt &= -\varphi(x, \mu) g_s(0) - \int_0^x \varphi(x-t, \mu) g'_s(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^x \varphi'_t(x+t, \mu) g_s(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^x \varphi'_t(x-t, \mu) g_s(t) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \varphi(x+t, \mu) g'_s(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x \varphi(x-t, \mu) g'_s(t) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_x^{x+x} \varphi(s, \mu) g'_s(s-x) ds - \frac{1}{2} \int_{x-x}^x \varphi(s, \mu) g'_s(s-x) ds = \\ &= -\int_{x-x}^{x+x} \varphi(s, \mu) g'_s(s-x) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу равенства (12) равенство (11) можем переписать в виде:

$$\varphi'_x(x, \mu) \psi_s(\mu) = \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left\{ g'_s(x-s) + \right. \\ \left. + \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_s(t) dt \right\} \varphi(s, \mu) ds. \quad (11')$$

Пусть функция $f(x) \in L^2(0, \infty)$. Обозначим через $F(\mu)$ преобразование Фурье функции $f(x)$ (по функциям $\varphi(x, \mu)$), т. е. положим

$$F(\mu) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x) \varphi(x, \mu) dx. \quad (13)$$

Тогда в силу равенства Парсеваля из (11') и (13) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) \psi_s(\mu) \varphi'_x(x, \mu) d\mu = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \left\{ g'_s(x-s) + \right. \\ \left. + \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_s(t) dt \right\} ds. \quad (14)$$

В силу произвольности функции $f(x)$, из (14) следует тождество:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) \varphi(s, \mu) \varphi'_x(x, \mu) d\mu = \\ \begin{cases} g'_s(x-s) + \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_s(t) dt, & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon. \end{cases} \quad (15)$$

В силу определения спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$, т. е. (5), тождество (15) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) d\mu \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} = \\ = \begin{cases} g'_s(x-s) + \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_s(t) dt, & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon. \end{cases} \quad (16)$$

Обозначим через $\theta^*(x, s; \mu)$ спектральную функцию задачи (6) при $q(x) \equiv 0$, т. е. положим

$$\theta^*(x, s; \mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \cos vx \cdot \cos vs \, dv. \quad (17)$$

Выписывая для функции $\theta^*(x, s; \mu)$ формулу, аналогичную формуле (16) и вычитывая ее из (16), притом учитывая, что из $q(x) \equiv 0$ следует $w(x, t, s) \equiv 0$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x} \right\} \int_{|x-s|}^s \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_s(t) dt. \quad (18)$$

Из определения функции $\theta^*(x, s; \mu)$ следует следующая

Лемма 2. При фиксированных x и s и при $\mu_0 > 0$ имеет место оценка

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \frac{1}{|a|} \bigvee_a^{\alpha + \mu_0} \left\{ \frac{\partial \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x} \right\} < \infty. \quad (19)$$

Оценка (19) имеет место равномерно на полупрямой $(0, \infty)$.

Так как тождество (18) имеет место для любой бесконечно дифференцируемой функции $g_s(t)$, то оценка (19) удовлетворяется и для первой производной спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$, как это следует из вычислений В. А. Марченко [5], т. е. справедлива.

Лемма 3. Если функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале, то при каждом фиксированных x и s и при $\mu_0 > 0$ имеет место оценка

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \frac{1}{|a|} \bigvee_a^{\alpha + \mu_0} \left\{ \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} \right\} < \infty. \quad (20)$$

Оценка (20) имеет место равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s .

В силу тождества (18) и оценок (19) и (20) применима тауберова теорема 4.1 вышеупомянутой работы В. А. Марченко, согласно которой и в силу леммы 1 (при $k=1$) при больших μ имеет место

Лемма 4. Если функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале, то при каждом фиксированных x и s и при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x} = o(\mu). \quad (21)$$

Оценка (21) имеет место равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s .

§ 2. Доказательство теоремы

Докажем теорему при $k=1$.

Теорема 1. Если функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале, то при каждом фиксированных x и s справедлива асимптотическая формула:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) d\nu \left[\frac{\partial \theta(x, s; \nu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cdot \frac{I_{\nu}(\mu t)}{(\mu t)^{1/2}} dt \right\} = 0,$$

где $I_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка p .
Доказательство. Положим

$$\alpha(x, s; \mu) = \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cos \mu t dt, \quad (22)$$

Тогда в силу равенства Парсеваля для обычных интегралов Фурье из (8) и (22) следует:

$$\int_0^{\infty} \psi_s(\mu) \alpha(x, s; \mu) d\mu = \frac{\pi}{2} \int_{|x-s|}^{\infty} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_s(t) dt. \quad (23)$$

В силу четности функций $\psi_s(\mu)$ и $\alpha(x, s; \mu)$ по μ , из (18) и (23) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \alpha(x, s; \nu) d\nu \right\} = 0. \quad (24)$$

Из одной леммы Б. М. Левитана (см. [3], лемма 1. 1. 3) в силу равенства (24) следует, что преобразование Бохнера — Стильтьеса функции

$$\frac{\partial \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \alpha(x, s; \nu) d\nu \quad (25)$$

— линейная функция в каждом конечном интервале изменения x и s . Тогда в силу оценки (21) применима одна тауберова теорема Б. М. Левитана (см. [3]), согласно которой из формулы (24) следует, что средние по М. Риссу первого порядка функции (25) стремятся к нулю равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s , т. е.

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) d\nu \left\{ \frac{\partial \theta(x, s; \nu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\nu} \alpha(x, s; \sigma) d\sigma \right\} = 0. \quad (26)$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, s; \nu) d\nu.$$

В силу определения функции $\alpha(x, s; \mu)$, т. е. (22), имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, s; \nu) d\nu = \\ &= \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \left\{ \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cos \nu t dt \right\} d\nu. \end{aligned} \quad (27)$$

Меняя порядок интегрирования в (27), получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, s; \nu) d\nu = \\ & \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \cos \nu t d\nu \right\} dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Как известно (см. [6], стр. 234),

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \cos \nu t d\nu = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mu \frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}}. \quad (29)$$

Из (28) и (29) имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, s; \nu) d\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cdot \frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}} dt,$$

что с формулой (26) доказывает теорему.

Для исследования асимптотического поведения второй производной спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ воспользуемся формулой (16). Дифференцируя эту формулу по s , получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\mu) d\mu \frac{\partial^2 \theta(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} &= \begin{cases} -g_1^*(x-s) - g_1(x-s) \frac{\partial w^2(x, t, s)}{\partial x \partial s} \Big|_{t=|x-s|} + \\ 0, \end{cases} \\ &+ \int_{|x-s|}^{\infty} \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} g_1(t) dt, \quad |x-s| \leq \varepsilon, \\ &|x-s| \geq \varepsilon. \end{aligned} \quad (30)$$

Выпишем для функции $\theta^*(x, s; \mu)$ формулу, аналогичную формуле (30). Так как в этом случае $w(x, t, s) \equiv 0$, то получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} \frac{\partial^2 \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} = \begin{cases} -g_{\varepsilon}^*(x-s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (31)$$

Вычитая формулу (31) из формулы (30), находим:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} \left\{ \frac{\partial^2 \theta(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} \right\} = \\ & = -g_{\varepsilon}(x-s) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=|x-s|} + \int_{|x-s|}^{\varepsilon} g_{\varepsilon}(t) \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} dt. \end{aligned} \quad (32)$$

В силу формулы обращения, из (8) следует

$$g_{\varepsilon}(x-s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) \cos(x-s)\mu d\mu. \quad (33)$$

Пусть $0 < \varepsilon \leq 1$. Положим

$$\alpha(x, s; \mu) = \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} \cos \mu t dt. \quad (34)$$

Тогда, в силу равенства Парсеваля для обычных интегралов Фурье, из (8) и (34) следует

$$\int_0^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) \alpha(x, s; \mu) d\mu = \frac{\pi}{2} \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} g_{\varepsilon}(t) dt. \quad (35)$$

В силу равенств (33), (35) и четности функций $\psi_{\varepsilon}(\mu)$ и $\alpha(x, s; \mu)$ по μ , формула (32) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} \Phi(x, s; \mu) = 0, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x, s; \mu) = & \frac{\partial^2 \theta(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} + \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=|x-s|} \cos \mu(x-s) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \alpha(x, s; \nu) d\nu. \end{aligned} \quad (37)$$

Рассуждая аналогичным образом, легко установить леммы, обобщающие леммы 2, 3 и 4.

Лемма 5. При фиксированных x и s и при $\mu_0 > 0$ имеет место оценка

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \frac{1}{|a|^k} \sum_a^{\alpha + \mu_0} \left\{ \frac{\partial^{k+j} \eta^*(x, s; \mu)}{\partial x^i \partial s^j} \right\} < \infty, \quad (i+j=k=1, 2, \dots). \quad (38)$$

Оценка (38) имеет место равномерно в полупрямой $(0, \infty)$.

Лемма 6. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(k-1)$ -ю производную, то при каждом фиксированных x и s и при $\mu_0 > 0$ имеет место оценка

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \frac{1}{|a|^k} \sum_a^{\alpha + \mu_0} \left\{ \frac{\partial^{k+j} \eta(x, s; \mu)}{\partial x^i \partial s^j} \right\} < \infty, \quad (i+j=k=1, 2, \dots). \quad (39)$$

Оценка (39) имеет место равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s .

Из равенства (4) лемм 5 и 6 (при $k=2$) и вышеупомянутой тауберовой теоремы В. А. Марченко следует

Лемма 7. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(k-1)$ -ю производную, то при каждом фиксированных x и s при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\frac{\partial^k \eta(x, s; \mu)}{\partial x^i \partial s^j} - \frac{\partial^k \eta^*(x, s; \mu)}{\partial x^i \partial s^j} = o(\mu^k), \quad (i+j=k=1, 2, \dots). \quad (40)$$

Оценка (40) имеет место равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s .

Докажем теорему при $k=2$.

Теорема 2. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую первую производную, то при каждом фиксированных x и s справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2} \right)^2 dv \left[\frac{\partial^2 \eta(x, s; v)}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \eta^*(x, s; v)}{\partial x \partial s} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\Gamma(3)}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-s|}^{\mu} \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} \cdot \frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}} dt \right\} = 0.$$

Доказательство. Из одной леммы Б. М. Левитана (см. [3], лемма 1. 1. 3) в силу равенства (36) следует, что преобразование Бохнера—Стильтьеса функции $\Phi(x, s; \mu)$ 2-эквивалентно нулю (т. е. полином второй степени) в каждом конечном интервале изменения x и s . Тогда в силу леммы 7 применима одна тауберова теорема Б. М. Левитана (см. [3]), согласно которой из формулы (36) следует, что средние по М. Риссу второго порядка функции (37) стремятся к нулю равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s , т. е.

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 d\nu \left[\frac{\partial^2 \theta(x, s; \nu)}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x \partial s} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \bigg|_{t=|x-s|} \cos \nu(x-s) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\nu} \alpha(x, s, \sigma) d\sigma \right\} = 0 \quad (41)$$

Вычислим интегралы

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \bigg|_{t=|x-s|} \cos \nu(x-s) d\nu, \\ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) \alpha(x, s; \nu) d\nu.$$

Как известно (см. [6], стр. 234),

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 \cos \nu t d\nu = \Gamma(3) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mu \frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}}. \quad (42)$$

Тогда

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \bigg|_{t=|x-s|} \cos \nu(x-s) d\nu = \\ = \Gamma(3) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \bigg|_{t=|x-s|} \frac{I_{3/2}[\mu(x-s)]}{[\mu(x-s)]^{3/2}}. \quad (43)$$

Из асимптотики функций Бесселя, при неограниченном возрастании аргумента, из леммы 1 и (43) следует, что

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \bigg|_{t=|x-s|} \cos \nu(x-s) d\nu = 0 \quad (44)$$

равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s .

Далее, из определения функции $\alpha(x, s; \mu)$, т. е. (34), следует, что

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 \alpha(x, s; \nu) d\nu = \\ = \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 \left\{ \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} \cos \nu t dt \right\} d\nu.$$

Меняя порядок интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^2 \alpha(x, s; \nu) d\nu = \\ &= \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^2 \cos \nu t d\nu \right\} dt. \end{aligned} \quad (45)$$

Тогда из (42) и (45) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^2 \alpha(x, s; \nu) d\nu = \\ &= \frac{\Gamma(3)}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} \cdot \frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}} dt, \end{aligned}$$

что с формулами (41) и (44) доказывает теорему при $k=2$.

Случай любого k доказывается аналогичным образом.

Применяя полученные асимптотические формулы для производных спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ можно получить (как это сделано в работе [7]) теоремы о равной суммируемости по М. Риссу производных разложения по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам функций с интегрируемым квадратом.

Введем обозначения:

$$S^*(x, \mu) = \int_0^{\infty} f(x) \theta^*(x, s; \mu) ds, \quad S(x, \mu) = \int_0^{\infty} f(s) \theta(x, s; \mu) ds.$$

В силу доказанных асимптотических формул для производных спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ справедлива

Теорема. Пусть $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(k-1)$ -ю производную, то равномерно в каждом конечном интервале имеет место равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^k d\nu \left\{ \frac{\partial^k S(x, \nu)}{\partial x^k} - \frac{\partial^k S^*(x, \nu)}{\partial x^k} \right\} = 0,$$

т. е. разность между средними по М. Риссу k -го порядка производными k -го порядка разложения функции $f(x)$ по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам, стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 5.1 работы [7].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 20 VII 1956

Ереванский Армянский
Гос. пед. институт им. Х. Абовяна

Ի. Ս. Սարգսյան

ՇՏՈՒՐՄ-ԼԻՈՒՎԼԼԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՎԱՐՔԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է $(0, \infty)$ կիսաառանցքի վրա որոշված Շտուրմ-Լիովիլի

$$L[y] = \frac{d^2}{dx^2} y(x) - q(x)y(x) \quad (1)$$

դիֆերենցիալ օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի ածանցյալների ասիմպտոտիկ վարքը: Մեր [7] հոդվածում ստացել էինք գնահատականներ (1) օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի ածանցյալների համար, որոնք արտահայտվում էին հետևյալ թևորևմամբ՝

Թեորեմ 1. Եթե $q(x)$ ֆունկցիան ամեն մի վերջավոր ինտերվալում ունի հանրագումարելի $(k-1)$ -րդ կարգի ածանցյալ, ապա ամեն մի ֆիքսած x և s արժեքների համար երբ $\mu \rightarrow \infty$ տեղի ունի հետևյալ ասիմպտոտիկ գնահատականը՝

$$\left| \int_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^k d\nu \left[\frac{\partial^k \theta(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} - \frac{\partial^k \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} \right] \right| < C$$

$$(i+j=k=1, 2, 3, \dots),$$

որտեղ $\theta^*(x, s; \mu)$ -ով նշանակված է (1) օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիան, իսկ $\theta(x, s; \mu)$ -ով՝ նույն օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիան, երբ $q(x) \equiv 0$, C -ն հաստատուն է՝ կախված x -ից և s -ից:

Բ. Մ. Լևիտանի մեթոդի [1] և Վ. Ա. Մարչենկոյի հատուկ առաքերյան թևորևմալի [5] օգնությամբ ներկա հոդվածում ստացված է սպեկլի ճշգրիտ ասիմպտոտիկ բանաձև՝ (1) օպերատորի $\theta(x, s; \mu)$ սպեկտրալ ֆունկցիայի ածանցյալների համար: Ապացուցված է հետևյալ թևորևման՝

Թեորեմ 2. Եթե $q(x)$ ֆունկցիան ամեն մի վերջավոր ինտերվալում ունի հանրագումարելի $(k-1)$ -րդ կարգի ածանցյալ, ապա ամեն մի ֆիքսած x և s արժեքների համար տեղի ունի հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևը՝

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 d\nu \left[\frac{\partial^k \theta(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} - \frac{\partial^k \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} \right] - \right.$$

$$-\frac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial^k w(x, t, s)}{\partial x^i \partial s^i} \cdot \frac{I_{k+1/2}(\mu t)}{(\mu t)^{k+1/2}} dt \Big\} = 0,$$

որտեղ $I_p(x)$ — Բեսսելի ֆունկցիան է առաջին սենի և p կարգի:

Հորվածում բերվում է թեորեմա 2-ի ապացույցը առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալների համար, միաժամանակ ցույց տալով, որ անալոգիալով թեորեման կարելի է ապացուցել ցանկացած կարգի ածանցյալի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. Известия АН СССР, сер. матем., 19, 33—58, (1955).
2. Левитан Б. М. Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Успехи матем. наук, IV, 3—112, (1949).
3. Левитан Б. М. О разложении по собственным функциям оператора Лапласа. Матем. сборник, 35 (77): 2, 267—316, (1954).
4. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. Труды Московского матем. общества, I, 327—420, (1952).
5. Марченко В. А. Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов. Известия АН СССР, серия матем., 19, 381—422, (1955).
6. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
7. Саргсян И. С. О дифференцировании разложений по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля. Известия АН СССР серия математическая, 21 (1957), 263—282.
8. Саргсян И. С. Суммирование производных разложения по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля. ДАН СССР, 104, 6, 821—824, (1955).