

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. И. Мелконян

Задача о струйном обтекании дуги плоским, ограниченным потоком и ее практическое приложение

В настоящей статье рассмотрена задача кавитационного обтекания криволинейной поверхности, помещенной в поток с прямолинейными стенками. Решение проводится по схеме, предложенной Д. А. Эфроном. При этом указывается возможность обобщения данной задачи на случай наличия перелома поверхности препятствия, имея в виду, что точка перелома расположена на оси потока.

Это позволяет решать конкретные задачи обтекания криволинейных затворов гидросооружений в случаях, когда ось вращения затвора не лежит на геометрической оси рассматриваемого потока.

Наряду с этим выводятся расчетные формулы, позволяющие вычислять коэффициент сжатия струи, а следовательно, величину гидравлического сопротивления в случае, отвечающем схеме Кирхгофа.

Данное решение подлежит в дальнейшем экспериментальной проверке, поэтому расчетные графики и материал сравнения с опытом будут приложены во второй части статьи.

1. Исходные предпосылки

Частные задачи, решаемые теорией струйного обтекания

Явление обтекания тел ограниченным потоком с отрывом струй, представляет большой практический интерес.

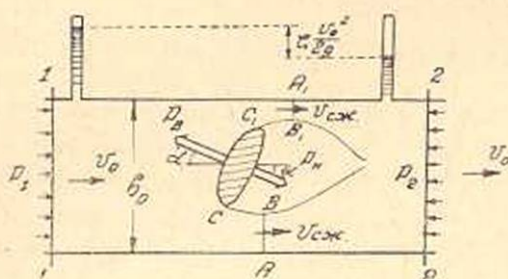
При обтекании препятствий тех или иных очертаний струя принимает вполне определенную форму, характеризующуюся коэффициентом сжатия ϵ , т. е. отношением площади сжатого сечения струи к площади отверстия в свету.

Знание величины ϵ позволяет теоретически определить коэффициент сопротивления в случае внезапного расширения потока. Из работ, посвященных этому вопросу, следует отметить работы В. М. Маккавеева [1], [2].

Постановка задачи при этом связана с принятием следующего предположения. Местные потери в напорных трубопроводах обусловлены наличием внезапного расширения потока за преградой. При этом на практике при обтекании жидкостью различного рода затворов — плоских, поворотных (дрессельных), сегментных, вальцевых и других —

струи, вытекая из отверстия, претерпевает сжатие, а затем быстрое и внезапное расширение, что позволяет применять формулу Борда к участку струи от сжатого ее сечения до полного расширения. Нетрудно видеть, что задача о теоретическом определении коэффициента местных потерь ζ сводится к вопросу определения сжатого сечения струи.

Решение вышеуказанной задачи позволяет также теоретически определять величину гидродинамического давления, возникающего от взаимодействия жидкости и обтекаемого препятствия.



Фиг. 1.

ва движения для сечений (1—1), $(A_1 B_1 C_1 CBA)$ и $(A_1 B_1 C_1 CBA)$ (2—2) (фиг. 1), получим:

$$\frac{\gamma}{g} Q (v_{сж} - v_0) = p_1 b_0 - P_b \cos \alpha - \int_{ABC} p \cos(s; x) ds - \int_{A_1 B_1 C_1} p \cos(s; x) ds,$$

$$\frac{\gamma}{g} Q (v_0 - v_{сж}) = P_n \cos \alpha - p_2 b_0 + \int_{ABC} p \cos(s; x) ds + \int_{A_1 B_1 C_1} p \cos(s; x) ds.$$

Все обозначения ясны из фиг. 1.

Сложив почленно оба выражения, придем к равенству:

$$(P_b - P_n) \cos \alpha = (p_1 - p_2) b_0 = \zeta_1 \frac{\gamma}{2g} v_0^2 b_0.$$

Наряду с этим, как это будет показано ниже, на основе полученных гидромеханических решений, возможно найти центр давлений, а также построить эпюру гидродинамического давления.

Исходные предположения о динамических соотношениях в потоке

Из предыдущего, следует, что задача сводится к определению величины ζ , которую можно определить из общих положений классической теории струй [9]. Предполагается что движение жидкости в рассматриваемом случае происходит при силах трения пренебрежимо малых по сравнению с силами инерции. Имея в виду уравнения движения реальной жидкости, условие представится в следующем виде:

$$\left| v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right| \gg |gf_x|.$$

$$\left| v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right| \gg |gfy|,$$

Здесь справа записаны члены, учитывающие влияние трения. С первого взгляда может показаться, что принятая схема движения не соответствует действительной, ввиду отбрасывания сил внутреннего трения.

Однако, в действительности в ряде случаев силы трения фактически малы, так как струя рассматривается только на участке между отверстием и сжатым сечением. Что же касается качественной стороны явления, а именно непрерывности распределения поля скоростей и давлений, то она сохраняется во всем потоке и нарушается лишь при подходе к твердым стенкам и переходе через линии отжима к зонам покоя в случае истечения под уровень.

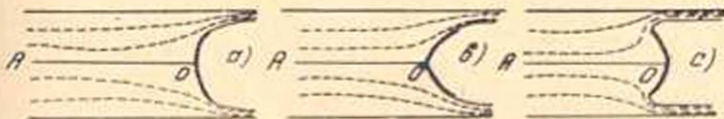
Наряду с этим предположением, движение жидкости принимается установившимся и потенциальным. Последнее условие соответствует безвихревому движению потока под действием потенциальных сил, что позволяет написать функцию потенциала скоростей φ , связанную с компонентами скоростей зависимостями:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Таким образом, задача с несколькими неизвестными v_x , v_y , v_z сводится к отысканию только функции φ . Последняя определяется при заданных граничных условиях уравнения Лапласа, для решения которого применена теория функций комплексного переменного.

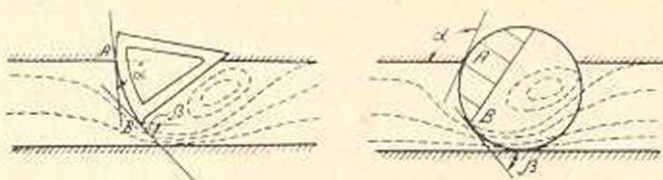
Теоретические схемы обтекания криволинейных поверхностей

Рассмотрим плоское обтекание криволинейных цилиндрических поверхностей потоком, ограниченным параллельными прямолинейными стенками (фиг. 2).



Фиг. 2.

На всех приведенных фигурах препятствия очерчены по дуге, с кромок которой происходит отрыв граничной линии тока. Не трудно видеть, что фиг. 2(в) соответствует схемам сегментного и вальцевого затворов в случае, если раздельную линию тока AO принять за твердую стенку. Действительно, напорные поверхности AB представляют собой части окружности, характеризующиеся определенным радиусом и величинами углов α и β между касательными, проведенными в точках A и B и горизонтальной осью (фиг. 3).



Фиг. 3.

Точка B является точкой отрыва граничной линии тока. В дальнейшем струя, вытекающая из отверстия затвора, рассматривается в пределах от отверстия до сжатого сечения. Скорость вдоль границы струи, не соприкасающейся с твердой стенкой, принимается постоянной.

Распределение скоростей в сжатом сечении отвечает гидростатическому закону. Однако следует сразу же указать на те пределы, в которых указанные теоретические модели будут соответствовать реальным течениям.

Остановимся более подробно на принимаемом условии постоянства скоростей вдоль границы струи. Из уравнения Бернулли, записанного вдоль границы струи от точки отрыва и до сжатого сечения без учета потерь следует, что скорость может быть величиной постоянной в случае истечения струи в атмосферу и пренебрежения членами, учитывающими эффект действия силы тяжести (т. е. $\frac{p}{\gamma} = \frac{p_{ат}}{\gamma}$ и $z = 0$).

В случае кавитационного обтекания тел, когда $\frac{p}{\gamma} = \frac{p_{кавит}}{\gamma}$, условие постоянства скоростей также возможно принять при пренебрежении силами тяжести. Истечение струи под уровень характеризуется гидростатическим распределением давлений вдоль границы струи, ибо при условии $v = \text{const}$ указанное выше уравнение Бернулли превращается в равенство:

$$\frac{p}{\gamma} + z = c.$$

Это предположение довольно удовлетворительно подтверждается экспериментами (см. [1] и [2]).

Однако принятие одного условия постоянства скоростей в случае обтекания криволинейных препятствий малого радиуса кривизны, даже при правильном его назначении, недостаточно. Важнейшую роль в построении картины обтекания играет также определение местоположения точки отрыва. Из экспериментов известно, что при обтекании цилиндра, набегающий поток, разветвившись в передней критической точке, омывает его лишь до точек отрыва, находящихся примерно на $\alpha = 84^\circ$ при числе Рейнольдса, равном 157 200, и на $\alpha = 120^\circ$ при $Re = 251\,300$, после чего поток отрывается (Л. Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа*, стр. 243 и 591). Очевидно, что эта зависимость

расположения точки отрыва от степени турбулизации потока не может быть учтена в решениях, полученных с помощью потенциальных течений. Исходя из этого, в предлагаемом нами решении заранее предполагается, что на всем протяжении преграды отрыва потока не происходит. Затем поток, достигнув кромок рассматриваемого препятствия, срывается с них, образуя до сжатого сечения струи ограниченные поверхности, на которых принимаются указанные выше условия.

Данное предположение полностью соответствует действительности, так как из экспериментов известно, что при обтекании затворов с напорными поверхностями относительно большой кривизны поведение потока аналогично описанному выше.

При обтекании препятствий малого радиуса кривизны точка отрыва потока должна в каждом частном случае определяться особо, с учетом степени турбулентности потока или же экспериментально. Решения, даваемые в этих случаях теорией отрывного обтекания (см. [7] и [10]), с нашей точки зрения кажутся маловероятными, ввиду невозможности учета вышележащих обстоятельств.

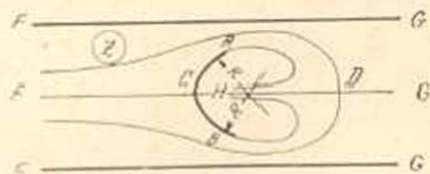
2. Кавитационное обтекание ограниченным потоком поверхности, очерченной по дуге круга

Рассмотрим общий случай кавитационного обтекания поверхности, очерченной по дуге круга, частным случаем которого будет интересующее нас обтекание криволинейных поверхностей затворов. Постановка задачи кавитационного течения принадлежит Д. А. Эфросу.

Составление уравнения связи области течения z и области параметрического переменного ω

Пусть плоский ограниченный поток обтекает симметричную поверхность, очерченную кривой, состоящей из двух дуг круга, и пусть за этой поверхностью образуется кавитационная область течения, указанная на фиг. 4. Вдоль границ струи AH и BH скорости принимаем постоянными и равными v_1 . В бесконечно удаленных точках F и G скорости равны v_0 . В критической точке потока C скорость равна нулю. Как

известно, $\frac{dw}{dz} = v e^{-i\alpha}$ есть сопряжен-



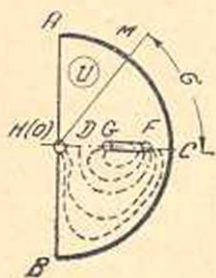
Фиг. 4.

ная скорость в любой точке области

течения $z = x + iy$, где $w = \varphi + i\psi$ — характеристическая функция, ψ — функция тока, φ — функция потенциала скоростей.

Наряду с этим в случае кавитационного обтекания существуют две отдельные криволинейные линии тока FD , разветвляющиеся в точке D на линии токов HD и DG . Очевидно, что в этой точке ско-

рость также равна нулю. Отобразим конформно область течения Z на внутренность единичного полукруга в области параметрического



Фиг. 5.

комплексного переменного u таким образом, чтобы обтекаемый контур перешел в полукруг, а свободной струе соответствовал вертикальный диаметр (фиг. 5). Нетрудно видеть, что краям преграды будут соответствовать точки $u \pm i$, критической точке потока C — значение $u = 1$, а бесконечно удаленной точке H будет соответствовать центр данного полукруга. Граничным стенкам потока в области u будут соответствовать линии разреза от точки G до точки F . Обозначим точки G, D и F в области u соответственно через g, d и f .

Составим уравнение связи $\frac{dz}{du} = f(u)$, по которому найдем выражение, связывающее область течения и область параметрического переменного в виде:

$$z = \int_{u_1}^{u_2} \frac{dz}{du} du. \quad (2.1)$$

Последнее уравнение позволяет, используя ряд граничных условий, определить в дальнейшем все неизвестные величины, которые войдут в уравнение (2.1), но

$$\frac{dz}{du} = \frac{\frac{dw}{v_1 du}}{\frac{dw}{v_1 dz}}. \quad (2.2)$$

Следовательно, задача сводится к построению двух функций:

$$\frac{dw}{v_1 du} = f_1(u) \quad \text{и} \quad \frac{dw}{v_1 dz} = f_2(u).$$

Вышеуказанные выражения построим по нулям и полюсам, определив их в области u .

Продолжим функцию $\frac{dw}{v_1 du}$ на всю плоскость. Тогда, как не трудно видеть, будем иметь нули в точках

$$\pm i; \pm d; \pm \frac{1}{d}; \pm 1,$$

а полюсы в точках

$$0; \pm g; \pm f; \pm \frac{1}{g}; \pm \frac{1}{f}.$$

Таким образом, можно сразу написать, независимо от очертаний обтекаемой преграды, следующее выражение:

$$\frac{dw}{v_1 du} = N \frac{(u^4 - 1)(d^2 - u^2)(1 - d^2 u^2)}{u(f^2 - u^2)(g^2 - u^2)(1 - f^2 u^2)(1 - g^2 u^2)}. \quad (2.3)$$

Обратим внимание на физический смысл понятия нулей и полюсов при построении функции $\frac{dw}{v_1 du}$ в области $u = u_1 + iu_2$. Можно показать, что

$$\frac{dw}{du} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial u_1} = v_{u_1} - i v_{u_2} = v e^{-i\alpha},$$

т. е. $\frac{dw}{v_1 du}$ представляет значение сопряженной скорости течения в области переменного u , возникающего ввиду наличия источника в точке f и двух стоков в $u=0$ и в $u=g$. На фиг. 5 в одной половине области показаны линии токов вышеуказанного течения, соответствующие линиям токов действительного потока в области z .

Известно, что в точках обтекания внутренности углов и в критических точках $\frac{dw}{v_1 du} = 0$ (точки нулей). В точках же расположения источников или стоков $\frac{dw}{v_1 du} = \infty$ (так как в этих точках $w = a \ln(u-g)$).

Отсюда: $\left(\frac{dw}{du}\right)_{u=g} = \left|\frac{a}{u-g}\right|_{u=g} = \infty$. В таких точках будут расположены точки полюсов.

Аналогичным образом запишем зависимость

$$\frac{dw}{v_1 dz} = f_2(u).$$

Данная функция представляет, как указывалось выше, сопряженную скорость в действительном потоке. Она обращается в нуль в критической точке C и в точке разветвления D . Продолжая полукруг в области u на всю плоскость, будем иметь нули выше указанной функции в точках $1; d; \frac{1}{d}$ и полюсы в точках $-1; -d; -\frac{1}{d}$.

В работе Л. И. Седова ([3], стр. 227) указывается, что при наличии криволинейных препятствий выражение для $\frac{dw}{v_1 dz}$ примет вид

$$\frac{dw}{v_1 dz} = f_2(u) e^{-F(u)}, \quad (2.4)$$

где $F(u)$ — некоторая регулярная в верхней полуплоскости функция.

Представим ее в виде следующего степенного ряда:

$$F(u) = A_1 u + \frac{A_3}{3} u^3 + \frac{A_5}{5} u^5 + \dots \quad (2.5)$$

На основании сказанного выше можно написать:

$$\frac{dw}{v_1 dz} = \frac{(u-1)(u-d)(du-1)}{(u+1)(u+d)(du+1)} \exp - \left(A_1 u + \frac{A_3}{3} u^3 + \frac{A_5}{5} u^5 + \dots \right). \quad (2.6)$$

Разделив равенство (2.3) на (2.5), получим:

$$\frac{dz}{du} = \frac{(u^2+1)(u+1)^2(d+u)^2(du+1)^2 \exp \left(A_1 u + \frac{A_3}{3} u^3 + \dots \right)}{u(f^2-u^2)(g^2-u^2)(1-f^2u^2)(1-g^2u^2)}. \quad (2.7)$$

Составление уравнения, определяющего радиус кривизны обтекаемой преграды

$$\text{Как известно, } R = \frac{ds}{d\theta}, \quad (2.8)$$

где R — радиус кривизны,

ds — дифференциал дуги,

θ — угол наклона вектора скорости к горизонтальной оси.

Вместе с тем $ds = |dz|$, где из (2.7)

$$dz = N \left| \frac{(e^{2i\sigma} + 1)(e^{i\sigma} + 1)^2(de^{i\sigma} + 1)^2 i e^{i\sigma} e^{Re F(u)} d\sigma}{e^{i\sigma}(f^2 - e^{2i\sigma})(g^2 - e^{2i\sigma})(1 - f^2 e^{2i\sigma})(1 - g^2 e^{2i\sigma})} \right|. \quad (2.9)$$

Здесь σ — полярный угол комплексной точки в области u .

Из (2.5) следует, что

$$F(u) = A_1 \cos \sigma + \frac{A_3}{3} \cos 3\sigma + \dots + i(A_1 \sin \sigma + \frac{A_3}{3} \sin 3\sigma + \dots). \quad (2.10)$$

В общем случае

$$\theta = \alpha + A_1 \sin \sigma + \frac{A_3}{3} \sin 3\sigma + \frac{A_5}{5} \sin 5\sigma + \dots, \quad (2.11)$$

где α — угол наклона к горизонтальной оси касательной, проведенной в точке C .

Подставив (2.9) и (2.11) в (2.8) и произведя преобразования, получим окончательно:

$$\frac{R}{N} = \frac{8 \cos \sigma \cos^2 \frac{\sigma}{2} (1 + d^2 + 2d \cos \sigma)^2 \exp \left(A_1 \cos \sigma + \frac{A_3}{3} \cos 3\sigma + \dots \right)}{(1 + f^4 - 2f^2 \cos 2\sigma)(1 + g^4 - 2g^2 \cos 2\sigma)(A_1 \cos \sigma + \frac{A_3}{3} \cos 3\sigma + \dots)}. \quad (2.12)$$

Определение коэффициентов A_n ряда (2.5)

Воспользуемся уравнением радиуса кривизны (2.12). Задаваясь в нем значениями σ , получим в левой части одну и ту же величину отношения $\frac{R}{N}$, так как обтекаемая преграда представляет собой дугу окружности.

Так, например, при $z = 0$

$$\left| \frac{R}{N} \right|_{z=0} = \frac{8(1+d)^4 \exp(A_1 + \frac{A_3}{3} + \frac{A_5}{5} + \dots)}{(1-f^2)^2 (1-g^2)^2 (A_1 + A_3 + A_5 + \dots)} \quad (2.13)$$

При $z = \frac{\pi}{4}$

$$\left| \frac{R}{N} \right|_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2} \cos^2 \frac{\pi}{8} (1+d^2 + \sqrt{2}d) \exp \frac{\sqrt{2}}{2} (A_1 - \frac{A_3}{3} - \frac{A_5}{5} + \dots)}{(1+f^4)(1+g^4)(A_1 - A_3 - A_5 + \dots)} \quad (2.14)$$

При $z = \frac{\pi}{2}$

$$\left| \frac{R}{N} \right|_{z=\frac{\pi}{2}} = \frac{4(1+d^2)^2}{(1+f^2)(1+g^2)^2 (A_1 - 3A_3 + 5A_5 - \dots)} \quad (2.15)$$

В уравнении (2.5) воспользуемся тремя членами ряда. Тогда, приравняв друг другу выведенные равенства, получим два уравнения для определения искомых коэффициентов.

Для получения дополнительного уравнения отметим, что угол наклона вектора скорости β в точке отрыва струи $A(z = \frac{\pi}{2})$ задан и равен β .

Тогда из уравнения (2.11) получим:

$$\beta = \alpha + A_1 - \frac{A_3}{3} + \frac{A_5}{5} - \dots \quad (2.16)$$

или

$$A_1 = \beta - \alpha + \frac{A_3}{3} - \frac{A_5}{5} + \dots \quad (2.17)$$

Наряду с этим можно, исходя из соображений о конечности кривизны в точке отрыва, получить еще одно довольно простое условие [10].

Запишем выражение:

$$\frac{d}{du} \left(\ln \frac{dw}{v, dz} \right) = \frac{1}{u-d} - \frac{1}{u+d} + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \frac{d}{du-1} - \frac{d}{du+1} - A_1 - A_3 u^2 - A_5 u^4 - \dots \quad (2.18)$$

Но на свободных струях $v = v_1$. Поэтому:

$$-i \frac{dw}{du} = \frac{2d}{u^2 - d^2} + \frac{2}{u^2 - 1} + \frac{2d}{d^2 u^2 - 1} -$$

$$-A_1 - A_3 u^2 - A_5 u^4 - \dots \quad (2.19)$$

С другой стороны, из (2.7) следует, что:

$$\left| i \frac{ds}{du} \right| = N \frac{(u^2 + 1)(u + 1)^2(d + u)^2(du + 1)^2 \exp\left(A_1 u + \frac{A_3}{3} u^3 + \dots\right)}{u(f^2 - u^2)(g^2 - u^2)(1 - f^2 u^2)(1 - g^2 u^2)} \quad (2.20)$$

Поделив (2.19) на (2.20), получим выражение для радиуса кривизны, из которого следует, что в точках срыва струй $u = \pm i$; $R = 0$, что противоречит действительной картине обтекания дуги определенного радиуса. Поэтому можно записать следующее условие:

$$\left| i \frac{d\theta}{du} \right|_{u=\pm i} = 0,$$

что приводит к выражению:

$$1 + \frac{4d}{1 + d^2} = -A_1 + A_3 - A_5 + \dots \quad (2.21)$$

Решая уравнение (2.17) и (2.21) относительно A_1 и A_3 , получим:

$$A_1 = \frac{3}{2}(\beta - \alpha) + \frac{1}{2} + \frac{2d}{1 + d^2} + \frac{A_5}{5}, \quad (2.22)$$

$$A_3 = \frac{3}{2}(\beta - \alpha) + \frac{3}{2} + \frac{6d}{1 + d^2} + \frac{6A_5}{5}. \quad (2.23)$$

Коэффициент A_5 определится из уравнений (2.13) и (2.15). Действительно, приравняв эти уравнения друг другу и произведя простые преобразования с исключением коэффициентов A_1 и A_3 , придем к следующему равенству, содержащему A_5 в неявном виде:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1 + f^2}{1 - f^2} \right)^2 \left(\frac{1 + d^2}{1 + d^2} \right)^2 \left(\frac{1 + g^2}{1 - g^2} \right)^2 = \\ & = \frac{\frac{3}{2}(\beta - \alpha) + 1 + \frac{3d}{1 + d^2} + \frac{6}{5}A_5}{-3(\beta - \alpha) - 4 - \frac{16d}{1 + d^2} + \frac{8}{5}A_5} \left[\begin{aligned} & 2(\beta - \alpha) + 1 + \\ & + \frac{20d}{1 + d^2} + 4A_5 + \dots \end{aligned} \right]. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Определение неизвестных параметров N , d , f и g

Для определения этих параметров имеем следующие условия:

1) условие равенства ширины потока в сечениях F и G (в области z), что равносильно выражению:

$$\int_f \frac{dz}{du} du = - \int_g \frac{dz}{du} du; \quad (2.25)$$

2) условия для скорости набегающего потока:

$$\left[\frac{dw}{v_1 dz} \right]_{u=f} = [f_2(u)]_{u=f} = \frac{v_0}{v_1} \quad (2.26)$$

и транзитного потока

$$\left[\frac{dw}{v_1 dz} \right]_{u=g} = [f_2(u)]_{u=g} = \frac{v_0}{v_1}; \quad (2.27)$$

3) условие, определяющее толщину струи b_1 :

$$ib_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{du} du; \quad (2.28)$$

4) условие равенства уравнений (2.14) и (2.15).

Выведем уравнения (2.25), (2.26), (2.27) и (2.28).

$$\begin{aligned} 1. \quad \int_f \frac{dz}{du} du &= \lim_{r \rightarrow 0} i \int_0^{\pi} r e^{i\varphi} R(f + r e^{i\varphi}) d\varphi = \\ &= - \frac{iN\pi}{2} \frac{(f^2 + 1)(f + 1)^2(d + f)^2(1 + fd)^2 \exp(A_1 f + \frac{A_3}{3} f^3 + \dots)}{f^2(g^2 - f^2)(1 - f^4)(1 - g^2 f^2)} \quad (2.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \int_g \frac{dz}{du} du = \\ &= \frac{iN\pi}{2} \frac{(g^2 + 1)(g + 1)^2(d + g)^2(1 + dg)^2 \exp\left(A_1 g + \frac{A_3}{3} g^3 + \dots\right)}{g^2(f^2 - g^2)(1 - f^2 g^2)(1 - g^4)} \quad (2.30) \end{aligned}$$

Приравняв (2.29) и (2.30), получим:

$$\begin{aligned} &\frac{g^2(1 + f^2)}{f^2(1 + g^2)} \left(\frac{1 + f}{1 + g} \right)^2 \left(\frac{d + f}{d + g} \right)^2 \left(\frac{1 + df}{1 + dg} \right)^2 \left(\frac{1 - g^4}{1 - f^4} \right) = \\ &= \exp \left[A_1(g - f) + \frac{A_3}{3}(g^3 - f^3) + \dots \right]. \quad (2.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \left| \frac{dw}{v_1 dz} \right|_{u=f} &= \frac{v_0}{v_1} = \\ &= \frac{(f - 1)(d - f)(1 - df)}{(1 + f)(d + f)(1 + df)} \exp \left(A_1 f + \frac{A_3}{3} f^3 + \dots \right); \quad (2.32) \end{aligned}$$

$$\left| \frac{dw}{v_1 dz} \right|_{u=g} = \frac{v_0}{v_1} =$$

$$= \frac{(g-1)(d-g)(1-dg)}{(1+g)(d+g)(1+dg)} \exp - \left(A_1 g + \frac{A_3}{3} g^3 + \dots \right). \quad (2.33)$$

Приравняв (2.32) и (2.33), получим после несложных преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{(g-1)(d-g)(1-dg)(1+f)(d+f)(1+df)}{(g+1)(d+g)(1+dg)(f-1)(d-f)(1-df)} = \\ = \exp \left[A_1 (g-f) + \frac{A_3}{3} (g^3 - f^3) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$3. \quad b_1 = -i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{du} du = N \frac{d^2}{f^2 g^2} \pi, \quad (2.35)$$

откуда
$$N = \frac{b_1}{\pi} \left(\frac{fg}{d} \right)^2. \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \frac{(1+d^2)^2(1+f^2)(1+g^2)}{(1+\sqrt{2}d+d^2)(1+f^2)^2(1+g^2)^2} = \\ = \sqrt{2} \cos^2 \frac{\pi}{8} \frac{A_1 - 3A_3 + 5A_5 - \dots}{A_1 - A_3 - A_5 + \dots} \exp \frac{\sqrt{2}}{2} \left(A_1 - \frac{A_3}{3} - \right. \\ \left. - \frac{A_5}{5} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Для упрощения решения уравнений (2.31) и (2.34) относительно неизвестных параметров приравняем их, что приведет к равенству, в левую и правую части которого входят параметры g , f и d :

$$\frac{(g^2 - d^2)(1 - d^2 g^2)}{g^2} = \frac{(f^2 - d^2)(1 - d^2 f^2)}{f^2}. \quad (2.38)$$

Следует отметить, что параметры f , d и g по величине меньше единицы и наряду с этим

$$f > g > d.$$

Очевидно, уравнения, полученные на основании приведенных выше четырех условий, позволяют определить четыре неизвестных параметра.

Определение величины сжатого сечения струи

Подставим в уравнение для радиуса кривизны (2.12) значение постоянной N из уравнения (2.36), предварительно разделив обе части равенства на высоту потока b_0 и решив уравнение относительно $\frac{R}{b_0}$.

Тогда получим:

$$\frac{R}{b_0} = \frac{8}{\pi} \frac{b_1}{b_0} \left(\frac{fg}{d} \right)^2 \times$$

$$\cos \sigma \cos^2 \frac{\sigma}{2} (1 + d^2 + 2d \cos \sigma)^2 \exp \left(A_1 \cos \sigma + \frac{A_3}{3} \cos 3\sigma + \dots \right) \times \\ \times \frac{1}{(1 + g^4 - 2g^2 \cos 2\sigma) A_1 \cos \sigma + A_3 \cos 3\sigma + \dots} (1 + f^4 - 2f^2 \cos 2\sigma) \quad (2.39)$$

Последнее уравнение при известных параметрах позволяет построить зависимость $\frac{R}{b_0}$ в функции от $\frac{b_1}{b_0}$, что в свою очередь позволит для заданных соотношений относительного радиуса кривизны определить значение $\frac{b_1}{b_0}$.

3. Решение задачи обтекания сегментного и вальцевого затворов в частном случае $d = g = 0$

Определение параметров, входящих в выведенные уравнения

Как нетрудно видеть, решение обтекания поверхности, очерченной по дуге круга, в случае $d = g = h = 0$ сводится к постановке задачи, предложенной Кирхгофом. В этом случае полученные уравнения сильно упрощаются.

Действительно, вычисление коэффициентов A_1 , A_3 , A_5 , возможно провести, пользуясь следующими равенствами, получающимися из (2.22), (2.23) и (2.24):

$$A_1 = \frac{3}{2} (\beta - \alpha) + \frac{1}{2} + \frac{A_5}{5}; \quad (3.1)$$

$$A_3 = \frac{3}{2} (\beta - \alpha) + \frac{3}{2} + \frac{6}{5} A_5;$$

$$\left(\frac{1+f^2}{1-f^2} \right)^2 = \frac{\frac{3}{2} (\beta - \alpha) + 1 + \frac{6}{5} A_5}{-3 (\beta - \alpha) - 4 + \frac{8}{5} A_5} \exp \left[2 (\beta - \alpha) + 1 + 4 A_5 \right]. \quad (3.2)$$

Преобразуем последнее уравнение, предварительно обозначив правую часть через $f(A_5)$. Тогда, решив его относительно f , запишем:

$$f = \sqrt{\frac{\sqrt{f(A_5)} - 1}{\sqrt{f(A_5)} + 1}}. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) позволяет построить зависимость между параметром $f < 1$ и коэффициентом A_5 при заданных значениях $(\beta - \alpha)$.

Наряду с этим из (2.39) получаем:

$$\frac{R}{b_0} = \frac{b_1}{b_0} \frac{8}{\pi} \times$$

$$\times \frac{f^2 \cos \sigma \cos^2 \frac{\sigma}{2} \exp \left(A_1 \cos \sigma + \frac{A_3}{3} \cos 3\sigma + \frac{A_5}{5} \cos 5\sigma + \dots \right)}{(1 + f^4 - 2f^2 \cos 2\sigma) (A_1 \cos \sigma + A_3 \cos 3\sigma + A_5 \cos 5\sigma + \dots)}. \quad (3.4)$$

В совокупности с (3.1) и (3.2) последнее равенство позволяет построить зависимость между $\frac{R}{b_0}$ и коэффициентом A_5 при заданном угле $(\beta - \alpha)$.

Однако для осуществления этого построения, кроме отмеченных величин, необходимо знать также зависимость входящего в (3.4) отношения $\frac{b_1}{b_0}$ от вышеуказанных величин.

Для определения этой зависимости отметим, что исходя из уравнения неразрывности, можно написать:

$$\frac{b_1'}{b_0'} = \frac{v_0}{v_1}, \quad (3.5)$$

где в данной рассматриваемой задаче, величина $b_1 = 2b_1'$,

b_0' — половина ширины потока,

а b_1' — величина сжатого сечения каждой из двух струй, обтекающих преграду (ввиду симметричности обтекаемой поверхности, величины этих сжатых сечений равны между собой). Подставляя (3.5) в (3.4) и воспользовавшись уже выведенным уравнением (2.32), представив его в виде:

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{1-f}{1+f} \exp - \left(A_1 f + \frac{A_3}{3} f^3 + \frac{A_5}{5} f^5 + \dots \right), \quad (3.6)$$

окончательно получим зависимость при известном $\beta - \alpha$.

Так как отношение $\frac{R}{b_0}$ для любых значений σ остается одним и тем же, то для упрощения выражения (3.4) примем $\sigma = \frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$\frac{R}{b_0'} = \frac{8}{\pi} \frac{v_0}{v_1} \frac{f^2}{(1+f^2)^2} \frac{1}{A_1 - 3A_3 + 5A_5}. \quad (3.7)$$

Совокупность уравнений (3.7), (3.6), (3.1), (3.2) и (3.3) позволяет определить коэффициент A_5 в зависимости от заданного отношения $\frac{R}{b_0}$.

Определение зависимости, характеризующей закон распределения давления вдоль обтекаемой преграды

Из уравнения Бернулли, записанного для крайней линии тока

CB (фиг. 6), характеризующейся постоянной ординатой b_2 и переменной y , получим

$$\frac{p-p_0}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 \right] \frac{v_1^2}{2g} - y + b_2, \quad (3.8)$$

где v — значение скорости в любой точке дуги CB . Наряду с этим

$$\left| \frac{v}{v_1} \right| = \left| \frac{dw}{v_1 dz} \right|.$$

Следовательно, для определения величины избыточного давления, оказываемого потоком на обтекаемую преграду, достаточно решить уравнение

$$\left| \frac{dw}{v_1 dz} \right| = \frac{1-u}{1+u} \exp - \left(A_1 u + \frac{A_3}{3} u^3 + \frac{A_5}{5} u^5 + \dots \right) \quad (3.9)$$

для точек, лежащих на дуге BC или AC области u (фиг. 5). Так как картина обтекания симметрична, то ограничимся положительными и меньшими, чем $\frac{\pi}{2}$, значениями σ ($\frac{\pi}{2} \geq \sigma \geq 0$). Преобразовав (3.9), придем к выражению

$$\frac{v}{v_1} = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \exp - \left(A_1 \cos \sigma + \frac{A_3}{3} \cos 3\sigma + \frac{A_5}{5} \cos 5\sigma + \dots \right). \quad (3.10)$$

Однако для окончательного решения задачи необходимо знать соответствие точек обтекаемой поверхности области u точкам области действительного течения z . Это соответствие можно установить из уравнения (2.11):

$$\theta = \alpha + A_1 \sin \sigma + \frac{A_3}{3} \sin 3\sigma + \frac{A_5}{5} \sin 5\sigma + \dots \quad (3.11)$$

Из простых геометрических построений (фиг. 6) следует, что

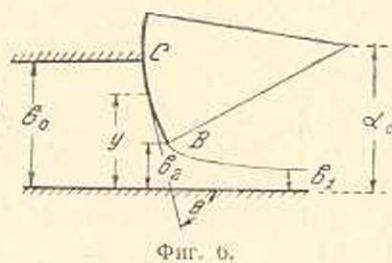
$$\cos \theta = \frac{d_0 - y}{R}; \quad (3.12)$$

$$\cos \alpha = \frac{d_0 - b_0}{R}. \quad (3.13)$$

Подставив (3.11) в (3.12) и разделив обе части равенства на b_0 , получим

$$\frac{y}{b_0} = -\frac{R}{b_0} \cos \left(\alpha + A_1 \sin \sigma + \frac{A_3}{3} \sin 3\sigma + \dots \right) + \frac{d_0}{b_0},$$

где d_0 — расстояние оси вращения затвора от дна флютбета.



Գ. Ի. Մեկրոնյան

ՈՒՂՂԱԶԻԳ ՊԱՏԵՐՈՎ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՎԱԾ ՀԱՐԹ ԱՂԵՂԻ
ՇՐՋԱՀԱՆՈՍՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ ԵՎ ՆՐԱ ՊՐԱԿՏԻԿ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգովածում դիտարկվում է ուղղաձիգ պատերով սահմանափակված աղեղի կառվարացիոն շրջահոսման խնդիրը, համաձայն Դ. Էֆրոսի առաջարկած սխեմայի: Ընդ որում խնդիրը լուծվում է այն դեպքի համար, երբ աղեղը հոսանքի առանցքի վրա ունի բեկում:

Սրանով մենք հնարավորություն ենք տեսնում լուծելու հիդրոտեխնիկական կառուցվածքների փականների (սեղմենառային և վալցային) շրջահոսման խնդիրն այն դեպքերի համար, երբ փականների պտտման առանցքները չեն համընկնում հոսանքի երկրաչափական առանցքի հետ:

Ելնելով Կիրիսեֆի սխեմայից, հոգովածում տրվում են հաշվային բանաձևեր, որոնց օգնությամբ կարելի է հաշվի առնել շիթի սեղման գործակիցը, հետևապես և հիդրավլիկական դիմադրությունը: Դրա հետ մեկտեղ տրվում է արտահայտություն, որի միջոցով կարելի է որոշել հիդրոդինամիկական ճնշման բաշխումը կոր մակերևույթի վրա:

Առաջված լուծումը ենթակա է փորձով ստուգման:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Маккавеев В. М. О теоретическом определении коэффициента местных гидравлических сопротивлений. Труды ЛИИВТа, 1 (1932).
2. Маккавеев В. М. и Коновалов И. М. Исследование на модели участка галерей Колвинского шлюза. Труды ЛИИВТа, 5. (1934).
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики (1950).
4. Гуревич М. И. Симметричное обтекание плоской пластинки, помещенной между стенками. Известия АН СССР, 4 (1946).
5. Гуревич М. И. Обтекание цилиндра в кавитацион. потоке. Труды Московск. института рыбн. промышленности, V (1953).
6. Эфрос Д. А. Гидродинамическая теория плоскопараллельного кавитационного течения. ДАН СССР, 4 (1946).
7. Берман Я. Р. Отрывное обтекание круглого цилиндра в ограниченном потоке. Прикл. матем. и механика, XIII (1949).
8. Мелконян Г. И. К вопросу отрывного обтекания затворов гидросооружений. Труды ЛИИВТ, XXIII.
9. Мелконян Г. И. Струйное несимметричное обтекание наклонной пластинки в ограниченном потоке. Труды ЛИИВТа, XXI.
10. Brodetsky. Comptes Rendus du 2-ieme congres Inter. de Mecanique appliquee Zurich (1926).