

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. В. Пештмалджян

К расчету симметрично нагруженных слоистых
 анизотропных оболочек вращения

1. *Основные положения.* Будем рассматривать тонкую много-
 слойную оболочку, собранную из произвольного числа ортотропных
 слоев, плоскости упругой симметрии которых взаимно параллельны.
 За координатную поверхность принимаем внешнюю поверхность с
 вогнутой стороны оболочки. Предполагается, что одна из плоскостей
 упругой симметрии параллельна внешним поверхностям оболочки, а
 остальные две — перпендикулярны координатным линиям $s = \text{const}$ и
 $\varphi = \text{const}$ [4], совпадающим с линиями главной кривизны поверхности.

Как известно [1], расчет такой симметрично нагруженной обо-
 лочки вращения нулевой гауссовой кривизны сводится к решению
 системы:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dV}{ds} - \frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} = \frac{P_1}{C_{11}} \frac{d^2 W}{ds^2} + \\ & + \frac{P_2 - P_1}{C_{11}} \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dW}{ds} - \left(\frac{P_3}{C_{11}} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} - \frac{\Omega}{C_{11} R_2} \right) W + \Phi_1(s), \quad (1.1) \\ & \frac{d^2 W}{ds^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dW}{ds} - \frac{D_{22} - D_{22}^*}{D_{11} - D_{11}^*} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} W = - \frac{P_1}{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)} \frac{d^2 V}{ds^2} + \\ & + \frac{P_2 + P_1}{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)} \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dV}{ds} + \left[\frac{P_3}{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{D_{11} - D_{11}^*} \frac{1}{R_2} \right] V + \Phi_2(s), \end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{r} \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{d}{ds} F_1(s) - \frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{\sin \alpha}{r} F_1(s), \\ \Phi_2 &= \frac{1}{r} \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)} \frac{d}{ds} F_1(s) - \frac{1}{r (D_{11} - D_{11}^*)} F_2(s) - \\ & - \frac{K_{22} C_{12} - K_{12} C_{22}}{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)} \frac{\sin \alpha}{r^2} F_1(s), \end{aligned}$$

$$F_1 = \sin \alpha \int_{s_0}^s r E_r ds + \cos \alpha \left(\frac{P_z}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right),$$

$$F_2 = -\cos \alpha \int_{s_0}^s r E_r ds + \sin \alpha \left(\frac{P_z}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right),$$

$$P_1 = K_{11} C_{12} - K_{12} C_{11}, \quad P_2 = K_{22} C_{11} - K_{11} C_{22}, \quad P_3 = K_{22} C_{12} - K_{12} C_{22},$$

$$\Omega = C_{11} C_{22} - C_{12}^2, \quad D_{11} = \frac{K_{11}^2 C_{22} - 2K_{11} K_{12} C_{12} + K_{12}^2 C_{11}}{\Omega},$$

$$D_{12} = \frac{K_{11} K_{12} C_{22} - (K_{11} K_{22} + K_{12}^2) C_{12} + K_{22} K_{12} C_{11}}{\Omega},$$

$$D_{22} = \frac{K_{22}^2 C_{11} - 2K_{22} K_{12} C_{12} + K_{12}^2 C_{22}}{\Omega},$$

$$C_{ik} = \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m - \delta_{m-1}), \quad K_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m^2 - \delta_{m-1}^2),$$

$$D_{ik} = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m^3 - \delta_{m-1}^3) \quad (i, k = 1, 2),$$

$$B_{11}^m = \frac{E_1^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \quad B_{12}^m = \frac{E_1^m \mu_2^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \quad B_{22}^m = \frac{E_2^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m},$$

где E_1, E_2 — модули упругости вдоль главных направлений (s, φ);
 μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона;

P_z — значение главного вектора внешних сил, приложенных к границе параллельного круга;

E_r, E_z — радиальная и осевая проекции внешней силы [4];

δ_m — расстояние контактных поверхностей от координатной поверхности оболочки;

V и W — искомые функции, через которые выражаются все расчетные величины [1].

Усилия и моменты:

$$N_1 = -\frac{\sin \alpha}{r} V + \frac{1}{r} F_1 N_2 = \frac{dV}{ds} Q = \frac{\cos \alpha}{r} V + \frac{1}{r} F_2,$$

$$M_1 = (D_{11} - D_{11}^*) \frac{dW}{ds} - (D_{12} - D_{12}^*) \frac{\sin \alpha}{r} W + \frac{K_{11} C_{12} - K_{12} C_{11}}{\Omega} \frac{dV}{ds} + \\ + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \frac{1}{r} (\sin \alpha V - F_1) \quad (A)$$

Перемещения:

$$\begin{aligned}
 u = & -\frac{1}{\Omega} \int \left[C_{22} \frac{\sin \alpha}{r} V + C_{12} \frac{dV}{ds} + (K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}) \frac{\sin \alpha}{r} W - \right. \\
 & \left. - (K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}) \frac{dW}{ds} - C_{22} \frac{1}{r} F_1 \right] ds, \\
 w = & \frac{r}{\cos \alpha} \frac{1}{\Omega} \left[C_{12} \frac{\sin \alpha}{r} V + C_{11} \frac{dV}{ds} - \right. \\
 & \left. - (K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}) \frac{\sin \alpha}{r} W + (K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}) \frac{dW}{ds} - \right. \\
 & \left. - C_{12} \frac{1}{r} F_1 \right] + ur \operatorname{tg} \alpha.
 \end{aligned} \quad (B)$$

Напряжения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_i^m = & (-1)^i \frac{1}{\Omega} \left(\Delta_{i2}^m \frac{\sin \alpha}{r} V + \Delta_{i1}^m \frac{dV}{ds} \right) - (-1)^i \left[\frac{1}{\Omega} (K_{11} \Delta_{i2}^m - \right. \\
 & \left. - K_{12} \Delta_{i1}^m) + (-1)^i z B_{i1}^m \right] \frac{dW}{ds} + (-1)^i \left[\frac{1}{\Omega} (K_{12} \Delta_{i2}^m - K_{22} \Delta_{i1}^m) + \right. \\
 & \left. + (-1)^i z B_{i2}^m \right] \frac{\sin \alpha}{r} W - (-1)^i \frac{\Delta_{i2}^m}{\Omega} \frac{1}{r} F_1,
 \end{aligned} \quad (C)$$

где $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11}^m &= B_{11}^m C_{12} - B_{12}^m C_{11} & \Delta_{22}^m &= B_{22}^m C_{12} - B_{12}^m C_{22}, \\
 \Delta_{12}^m &= B_{11}^m C_{22} - B_{12}^m C_{12} & \Delta_{21}^m &= B_{22}^m C_{11} - B_{12}^m C_{12}.
 \end{aligned}$$

Если предположить, что выполняется условие

$$\frac{D_{22}}{D_{11}} = \frac{K_{22}}{K_{11}} = \frac{C_{22}}{C_{11}} = K, \quad (1.2)$$

то с помощью некоторой комплексной функции [4]

$$\sigma = W + i \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}} V \quad (1.3)$$

задача окончательно приводится к решению одного уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \sigma}{ds^2} \left(1 - \frac{i P_1}{\sqrt{C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^*)}} \right) + \frac{d\sigma}{ds} \left(-1 + \frac{i P_1}{\sqrt{C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^*)}} \right) \frac{\sin \alpha}{r} + \\
 + \sigma \left[\left(-K + \frac{i P_2}{\sqrt{C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^*)}} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} - \right. \\
 \left. - \frac{i \sqrt{\Omega}}{\sqrt{C_{11} (D_{11} - D_{11}^*)}} \frac{\cos \alpha}{r} \right] = \Phi(s),
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

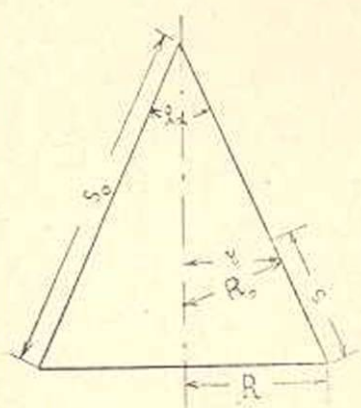
где

$$\Phi(s) = \Phi_2(s) + i \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}} \Phi_1(s).$$

Остановимся подробно на случаях конической и цилиндрической оболочек. Как и следует ожидать, задача сведется к решению уравнений такого же типа, как и в случае однородной оболочки [4].

В дальнейшем будем рассматривать однородные уравнения, так как нахождение частных решений не представляет трудностей.

2. Коническая оболочка. Учитывая, что в данном случае $\alpha = \text{const}$, $R_2 = \frac{\cos \alpha}{r}$, $r = (s_0 - s) \sin \alpha$ (фиг. 1), из (1.4) будем иметь:



Фиг. 1.

$$\frac{d^2 \tau}{ds^2} - \frac{1}{s_0 - s} \frac{d\tau}{ds} - \left[K \frac{1}{(s_0 - s)^2} + \beta R \frac{\text{ctg } \alpha}{s_0 - s} \right] \tau = \Psi(s), \quad (2.1)$$

где

$$\beta = \frac{k\Omega}{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*) + P_1^2} \left\{ -P_1 + i\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*)} \right\}, \quad k = \frac{1}{R}.$$

R — радиус основания конуса,

$$\Psi(s) = \frac{1}{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*) + P_1^2} \left\{ C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*) \Phi_2(s) - C_{11}P_1\Phi_1(s) + i\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*)} [C_{11}\Phi_1(s) + P_1\Phi_2(s)] \right\}.$$

Если принять [4]

$$x = \frac{2V(s_0 - s)\text{ctg } \alpha}{\sqrt{\delta}} \quad \text{и} \quad \tau = \sqrt{x} \, z, \quad (2.2)$$

то (2.1) преобразуется к виду

$$z'' - \left[\left(4K - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{x} + \delta R \beta \right] z = 0.$$

Получили одну из форм уравнения Бесселя, общий интеграл которого можно представить в виде [5]:

$$\tau = \sqrt{x} \left[C_1 I_{2\sqrt{\delta R \beta}}(i\sqrt{\delta R \beta} x) + C_2 Y_{2\sqrt{\delta R \beta}}(i\sqrt{\delta R \beta} x) \right], \quad (2.3)$$

где I_ν , Y_ν — функции Бесселя первого и второго рода индекса ν .

Ограничимся рассмотрением точек, достаточно удаленных от вершины конуса, при малом угле α . Тогда, вместе с x , аргумент бесселевых функций принимает большие значения, и для них будут справедливы асимптотические разложения. Для получения последних рассматриваем разложения функций Ханкеля, через которые I_ν и Y_ν выражаются следующим образом:

$$I_\nu = \frac{1}{2} (H_\nu^{(1)} + H_\nu^{(2)}),$$

$$Y_\nu = \frac{1}{2i} (H_\nu^{(1)} - H_\nu^{(2)}).$$

Для функций Ханкеля имеем формулы [5]:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(z - \frac{1}{2}\pi\nu - \frac{1}{4}\pi)} \left[\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(-1)^m (\nu, m)}{(2iz)^m} + O(z^{-p}) \right],$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(z - \frac{1}{2}\pi\nu - \frac{1}{4}\pi)} \left[\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(\nu, m)}{(2iz)^m} + O(z^{-p}) \right],$$

где

$$(\nu, m) = \frac{[4\nu^2 - 1^2][4\nu^2 - 3^2] \cdots [4\nu^2 - (2m-1)^2]}{2^{2m} m!},$$

а символ $O(z^{-p})$ обозначает функцию порядка z^{-p} .

В зависимости от значений аргумента, учитывая требуемую точность, можно ограничиться определенным числом членов. Так, ограничиваясь одним слагаемым, с точностью $\frac{1}{z}$, для функций Бесселя получим:

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ Y_\nu(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

откуда для искомых функций V и W , в силу (2.2) и (2.3), будем иметь:

$$\begin{aligned} W &= E_1 \frac{1}{Vx} \cos\left(-\gamma\sqrt{R\delta}x - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K}\pi\right) \operatorname{ch} \alpha\sqrt{R\delta}x + \\ &+ F_1 \frac{1}{Vx} \sin\left(-\gamma\sqrt{R\delta}x - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K}\pi\right) \operatorname{sh} \alpha\sqrt{R\delta}x + \\ &+ E_2 \frac{1}{Vx} \sin\left(-\gamma\sqrt{R\delta}x - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K}\pi\right) \operatorname{ch} \alpha\sqrt{R\delta}x - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -F_2 \frac{1}{Vx} \cos \left(-\gamma \sqrt{R\delta} x - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K} \pi \right) \operatorname{sh} \alpha \sqrt{R\delta} x, \quad (2.5) \\
 V = & \sqrt{\frac{2(D_{11} - D_{11}')}{C_{11}}} \left\{ F_1 \frac{1}{Vx} \cos \left(-\gamma \sqrt{R\delta} x - \frac{\pi}{4} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sqrt{K} \pi \right) \operatorname{ch} \alpha \sqrt{R\delta} x - E_1 \frac{1}{Vx} \sin \left(-\gamma \sqrt{R\delta} x - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K} \pi \right) \operatorname{sh} \alpha \sqrt{R\delta} x + F_2 \frac{1}{Vx} \sin \left(-\gamma \sqrt{R\delta} x - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K} \pi \right) \operatorname{ch} \alpha \sqrt{R\delta} x + E_2 \frac{1}{Vx} \cos \left(-\gamma \sqrt{R\delta} x - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K} \pi \right) \operatorname{sh} \alpha \sqrt{R\delta} x \right\}.
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sqrt{\frac{k\Omega [V C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}') + P_1^2 - P_1]}{2 [C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}') + P_1^2]}}, \\
 \gamma &= \sqrt{\frac{k\Omega [V C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}') + P_1^2 + P_1]}{2 [C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}') + P_1^2]}}.
 \end{aligned}$$

E, F — вещественные постоянные, которые определяются из краевых условий.

Имея значения V и W , по формулам (А, В, С) можем получить все расчетные величины.

Отметим случай изотропных слоев. Условие (1.2) в данном случае всегда имеет место; поэтому в самом общем случае решение выражается с помощью функций Бесселя индекса два.

$$\tau = \sqrt{x} [C_1 I_2(i\sqrt{\delta R\beta} x) + C_2 Y_2(i\sqrt{\delta R\beta} x)]. \quad (2.6)$$

Не налагаем никаких ограничений на рассматриваемые точки и угол конусности. Функции индекса два в решении (2.6) могут быть выражены через $I_1(i\sqrt{\delta R\beta} x)$ и $I_0(i\sqrt{\delta R\beta} x)$, которые табулированы для значений $|i\sqrt{\delta R\beta} x| \leq 10$.

При больших значениях аргумента, как показывают вычисления, можно брать для бесселевых функций выражения (2.4). Тогда для искомых функций будем иметь:

$$\begin{aligned}
 W = & E_1 \frac{1}{Vx} \cos(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{ch}(\alpha \sqrt{\delta R} x) + \\
 & + F_1 \frac{1}{Vx} \sin(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{sh}(\alpha \sqrt{\delta R} x) + E_2 \frac{1}{Vx} \times \\
 & \times \sin(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{ch}(\alpha \sqrt{\delta R} x) - F_2 \frac{1}{Vx} \cos(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{sh}(\alpha \sqrt{\delta R} x),
 \end{aligned}$$

$$V = \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{12})}{C_{11}}} \left\{ F_1 \frac{1}{Vx} \cos(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{ch}(\alpha \sqrt{\delta R} x) - \right. \\ \left. - E_1 \frac{1}{Vx} \sin(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{sh}(\alpha \sqrt{\delta R} x) + F_2 \frac{1}{Vx} \times \right. \\ \left. \times \sin(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{ch}(\alpha \sqrt{\delta R} x) + E_2 \frac{1}{Vx} \cos(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{sh}(\alpha \sqrt{\delta R} x) \right\}.$$

Подобная задача была решена для двухслойной оболочки [3], но в процессе решения предполагалось, что коэффициенты Пуассона слоев одинаковы.

Рассмотрим для примера замкнутую коническую оболочку, состоящую из изотропных слоев и нагруженную по краю распределенными силой q и моментом m .

На краю $s = 0$ выполняются условия:

$$M_1 = m \quad Q \cos \alpha - N_1 \sin \alpha = q. \quad (2.7)$$

Решение (2.6) с помощью соотношения

$$Y_2(z) = -iH_2^{(1)}(z) + iI_2(z)$$

можно представить в виде:

$$z = C_1 I_2(i\sqrt{\delta R} x) + C_2 H_2^{(1)}(i\sqrt{\delta R} x),$$

где C_1, C_2 — комплексные числа.

Чтобы решение оставалось конечным по всему протяжению оболочки, константа C_2 должна быть принята равной нулю [4].

Следовательно, будем иметь:

$$z = (A - iB) I_2(i\sqrt{\delta R} x).$$

Представим функцию Бесселя индекса два через I_0 и I_1 с помощью рекуррентной формулы

$$I_2(z) = \frac{2}{z} I_1(z) - I_0(z), \quad \text{где} \quad z = i\sqrt{\delta R} x = \rho e^{i\varphi}.$$

Введем обозначения:

$$\operatorname{Re}(I_0) = u_0(\rho, \varphi), \quad \operatorname{Im}(I_0) = v_0(\rho, \varphi),$$

$$\operatorname{Re}(I_1) = u_1(\rho, \varphi), \quad \operatorname{Im}(I_1) = v_1(\rho, \varphi).$$

Тогда

$$I_0(\rho e^{i\varphi}) = u_0(\rho, \varphi) + i v_0(\rho, \varphi),$$

$$I_1(\rho e^{i\varphi}) = u_1(\rho, \varphi) + i v_1(\rho, \varphi),$$

и окончательно для искомых функций получим:

$$W = A \left[\frac{2}{\rho} u_1 \cos \varphi + \frac{2}{\rho} v_1 \sin \varphi - u_0 \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + B \left[\frac{2}{\rho} v_1 \cos \varphi - \frac{2}{\rho} u_1 \sin \varphi - v_0 \right], \\
 V = & \sqrt{\frac{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)}{C_{11}}} \left\{ -B \left[\frac{2}{\rho} u_1 \cos \varphi + \frac{2}{\rho} v_1 \sin \varphi - u_0 \right] + \right. \\
 & \left. + A \left[\frac{2}{\rho} v_1 \cos \varphi - \frac{2}{\rho} u_1 \sin \varphi - v_0 \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Подставляя значения V и W в (2.7), учитывая при этом (A) и известные соотношения бесселевых функций

$$I_1(z) = -\frac{d}{dz} I_0(z) \quad \text{и} \quad z I_1'(z) + I_1(z) = z I_0'(z),$$

для определения A и B получим систему:

$$\begin{aligned}
 & A \left[\frac{2}{\rho} v_1 \cos \varphi - \frac{2}{\rho} u_1 \sin \varphi - v_0 \right] - B \left[\frac{2}{\rho} u_1 \cos \varphi + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{\rho} v_1 \sin \varphi - u_0 \right] = \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)}} q s_0 \sin \alpha, \\
 & A \left\{ (D_{11} - D_{11}^*) \frac{d\rho}{ds} \left[\left(-\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) u_1 \cos \varphi - \left(\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) v_1 \sin \varphi + \frac{2}{\rho} u_0 \right] - \right. \\
 & \left. - (D_{12} - D_{12}^*) \frac{1}{s_0} \left[\frac{2}{\rho} u_1 \cos \varphi + \frac{2}{\rho} v_1 \sin \varphi - u_0 \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{K_{11} C_{12} - K_{12} C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)}{C_{11}}} \frac{d\rho}{ds} \left[\left(-\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) v_1 \cos \varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) u_1 \sin \varphi + \frac{2}{\rho} v_0 \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \frac{1}{s_0} \sqrt{\frac{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)}{C_{11}}} \left[\frac{2}{\rho} v_1 \cos \varphi - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2}{\rho} u_1 \sin \varphi - v_0 \right] \right\} + B \left\{ (D_{11} - D_{11}^*) \frac{d\rho}{ds} \left[\left(-\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) v_1 \cos \varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) u_1 \sin \varphi + \frac{2}{\rho} v_0 \right] - \right. \\
 & \left. - (D_{12} - D_{12}^*) \frac{1}{s_0} \left[\frac{2}{\rho} v_1 \cos \varphi - \frac{2}{\rho} u_1 \sin \varphi - v_0 \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{K_{11} C_{12} - K_{12} C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)}{C_{11}}} \frac{d\rho}{ds} \left[\left(-\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) u_1 \cos \varphi - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{4}{\rho^2} + 1\right) v_1 \sin \varphi + \frac{2}{\rho} u_0 \Big] - \\ - \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \frac{1}{s_0} \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)}{C_{11}}} \left[\frac{2}{\rho} u_1 \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{2}{\rho} v_1 \sin \varphi - u_0 \right] \Big] = m,$$

где всюду $s = 0$, а u и v — известные величины.

3. *Цилиндрическая оболочка.* Для цилиндрической оболочки $r = R = \text{const}$, $\alpha = \pi$. Исходное уравнение (1.3) может быть получено для этого случая без допущения (1.2). Следовательно, для любых комбинаций упругих постоянных слоев, из (1.3) будем иметь:

$$\frac{d^2 z}{ds^2} - \beta^2 z = \Psi(s). \quad (3.1)$$

Решение этого уравнения получаем в виде

$$V = \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)}{C_{11}}} [F_1 \theta_1(s) + E_1 \xi_1(s) + F_2 \theta(s) - E_2 \xi(s)], \\ W = E_1 \theta_1(s) - F_1 \xi_1(s) + E_2 \theta(s) + F_2 \xi(s), \quad (3.2)$$

где

$$\theta(x) = e^{-\alpha x} \cos \gamma x \quad \xi(x) = e^{-\alpha x} \sin \gamma x, \\ \theta_1(x) = e^{\alpha x} \cos \gamma x \quad \xi_1(x) = e^{\alpha x} \sin \gamma x.$$

Для расчетных величин из (А, В) получим

$$N_1 = 0$$

$$N_2 = \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)}{C_{11}}} [(\alpha E_1 - \gamma F_1) \xi_1(s) + (\alpha F_1 + E_1 \gamma) \theta_1(s) + \\ + (\alpha E_2 - \gamma F_2) \xi(s) - (\alpha F_2 + \gamma E_2) \theta(s)],$$

$$Q = k \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)}{C_{11}}} [F_1 \theta_1(s) + E_1 \xi_1(s) + F_2 \theta(s) - E_2 \xi(s)],$$

$$M_i = \left[(D_{11} - D_{11}^0) (E_1 \alpha - F_1 \gamma) + \frac{K_{11}C_{12} - K_{12}C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)}{C_{11}}} (E_1 \gamma + \right. \\ \left. + \alpha F_1) \right] \theta_1(s) + \left[- (D_{11} - D_{11}^0) (F_1 \alpha + E_1 \gamma) + \right. \\ \left. + \frac{K_{11}C_{12} - K_{12}C_{11}}{\Omega} (E_1 \alpha - F_1 \gamma) \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)}{C_{11}}} \right] \xi_1(s) + \\ + \left[(D_{11} - D_{11}^0) (F_2 \gamma - E_2 \alpha) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{K_{12}C_{12} - K_{22}C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}{C_{11}}} (E_2\gamma + \alpha F_2) \Big] \theta(s) + \\
& + \left[-(D_{11} - D_{11}^*)(F_2\alpha + E_2\gamma) + \right. \\
& + \frac{K_{12}C_{12} - K_{22}C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}{C_{11}}} (\alpha E_2 - \gamma F_2) \Big] \xi(s), \\
\varpi = & \frac{1}{k\Omega} \{ [V C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^*) (\alpha F_1 + \gamma E_1) - P_1 (E_1\alpha - F_1\gamma)] \theta_1(s) + \\
& + [V C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^*) (\alpha E_1 - \gamma F_1) + P_1 (\alpha F_1 + \gamma E_1)] \xi_1(s) - \\
& - [V C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^*) (\alpha F_2 + \gamma E_2) + P_1 (F_2\gamma - E_2\alpha)] \theta(s) + \\
& + [V C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^*) (\alpha E_2 - \gamma F_2) + P_1 (F_2\alpha + E_2\gamma)] \xi(s) \}.
\end{aligned}$$

Имея значения функций V и W , нетрудно определить зону распространения краевого эффекта. В выражениях (3.2) имеем функции типа $e^{\pm \alpha s} \cos \gamma s$ и $e^{\pm \alpha s} \sin \gamma s$, попарно убывающие при удалении от краев. Убывание этих функций определяется экспоненциальным множителем. Поэтому, с достаточной точностью, на расстоянии

$$s > s_0 = \pi \sqrt{\frac{2[C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*) + P_1^2]}{k\Omega[V C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*) + P_1^2 - P_1]}} \quad (3.3)$$

от края можно пренебречь влиянием его на напряженное состояние в оболочке [4]. Из (3.3) легко получить формулы для симметрично собранной, однородной анизотропной и изотропной оболочек. Для этого достаточно подставить $K_{ik} = 0$ и соответствующие значения жесткостей изгиба и растяжения [2.4].

Рассмотрим для примера некоторые задачи цилиндрических оболочек.

Имеем длинную ($l \gg s_0$) цилиндрическую оболочку, по краям которой ($s = 0, s = l$) действуют перерезывающие усилия Q_1^*, Q_2^* и изгибающие моменты M_1^*, M_2^* .

Пренебрегая взаимным влиянием краев, определим постоянные E, F в формулах (3.2) через данные величины [2]. Получим

$$\begin{aligned}
E_1 &= A_1^* Q_1^* + A_1^* M_1^* & E_2 &= A_2^* Q_1^* + A_2^* M_1^*, \\
F_1 &= B_1^* Q_1^* + B_1^* M_1^* & F_2 &= B_2^* Q_1^*,
\end{aligned}$$

где

$$A_i^* = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}} \times$$

$$\times \frac{V \sqrt{C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^0)} [\gamma \theta(s) + \alpha \xi(s)] - P_1 [\alpha \theta(s) - \gamma \xi(s)]}{2 \sqrt{C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^0)} + \gamma P_1},$$

$$A_i' = V \sqrt{\frac{C_{11} \Omega}{D_{11} - D_{11}^0}} \frac{(-1)^{i+1} \theta(s)}{2 \sqrt{C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^0)} + \gamma P_1};$$

$$B_i' = \frac{1}{k} V \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega (D_{11} - D_{11}^0)}} \frac{1}{\theta_1(s)} - \frac{\xi(s)}{\theta(s)} A_i',$$

$$B_i^* = - \frac{\xi(s)}{V \sqrt{C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^0)} \alpha + \gamma P_1} V \sqrt{\frac{C_{11} \Omega}{D_{11} - D_{11}^0}};$$

при $i = 1$ подставляем $s = l$, а при $i = 2$ подставляем $s = 0$.

Для V и W получим следующие значения:

$$V = V \sqrt{\frac{\Omega (D_{11} - D_{11}^0)}{C_{11}}} [[B_1' \theta_1(s) + A_1' \xi_1(s)] Q_1' + [B_1' \theta_1(s) + A_1' \xi_1(s)] M_1' +$$

$$+ [B_2' \theta(s) - A_2' \xi(s)] Q_1^* - A_2^* \xi(s) M_1^*],$$

$$W = [A_1' \theta_1(s) - B_1' \xi_1(s)] Q_1' + [A_1' Q_1(s) - B_1' \xi_1(s)] M_1' +$$

$$+ [A_2' \theta(s) + B_2' \xi(s)] Q_1^* + A_2^* \theta(s) M_1^*. \quad (3.4)$$

Отсюда при $M_1' = Q_1' = 0$ получим решение для полубесконечной цилиндрической оболочки с загруженным краем.

Выражения для расчетных величин, ввиду их громоздкости, не приводим.

Рассмотрим также бесконечный цилиндр, загруженный в сечении $s = 0$ силами и моментами, равномерно распределенными по окружности сечения. Интенсивность силы q кг/см, а момента M кг.

При $s > 0$ будем иметь [5]:

$$V = \frac{q}{2k} \theta(s) - \frac{M}{2k} [\alpha \theta(s) + \gamma \xi(s)], \quad (3.5)$$

$$W = \frac{q}{2k} V \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega (D_{11} - D_{11}^0)}} \xi(s) + \frac{M}{2k} V \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega (D_{11} - D_{11}^0)}} [\gamma \theta(s) - \alpha \xi(s)],$$

при $s < 0$:

$$V = - \frac{q}{2k} \theta_1(s) - \frac{M}{2k} [\alpha \theta_1(s) - \gamma \xi_1(s)], \quad (3.6)$$

$$W = \frac{q}{2k} V \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega (D_{11} - D_{11}^0)}} \xi_1(s) + \frac{M}{2k} V \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega (D_{11} - D_{11}^0)}} [\gamma \theta_1(s) + \alpha \xi_1(s)].$$

Наконец, рассмотрим полубесконечную цилиндрическую оболочку.

ку, нагруженную силами и моментами, равномерно распределенными по окружности сечения [6], находящегося на расстоянии t от свободного конца оболочки.

Для получения решения суммируем результаты двух предыдущих задач со следующими изменениями: в (3.4) подставляем $M_1^* = Q_1^* = 0$, а M_1^* и Q_1^* принимаем равными по величине перерезывающей силе и моменту, возникающим в бесконечной оболочке в сечении $s = -t$, т. е.

$$\begin{aligned} Q_1^* &= \frac{q}{2} \theta(t) + \frac{M}{2} [x\theta(t) + \gamma\zeta(t)], \\ M_1^* &= -\frac{q}{2k} \left\{ \sqrt{\frac{C_{11}(D_{11} - D_{11}^0)}{\Omega}} [\gamma\theta(t) - x\zeta(t)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{P_1}{\Omega} [x\theta(t) - \gamma\zeta(t)] \right\} - \\ &\quad - \frac{M}{2k} \left\{ \sqrt{\frac{C_{11}(D_{11} - D_{11}^0)}{\Omega}} [(\gamma^2 - x^2)\zeta(t) + 2x\gamma\theta(t)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{P_1}{\Omega} [2x\gamma\zeta(t) + (x^2 - \gamma^2)\theta(t)] \right\}. \end{aligned}$$

Кроме того, начало координат смещаем влево на величину t .

В результате будем иметь:

при $0 \leq s_1 \leq t$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{2} \left\{ -\frac{1}{k} \theta_1(s_1 - t) + \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)}{C_{11}}} [B_2^* \theta(s_1) \theta(t) - A_2^* \zeta(s_1) \theta(t)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_2^*}{k} (D_{11} - D_{11}^0) \zeta(s_1) [\gamma\theta(t) - x\zeta(t)] - \frac{A_2^*}{k} P_1 \sqrt{\frac{D_{11} - D_{11}^0}{C_{11}\Omega}} \zeta(s_1) [x\theta(t) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma\zeta(t)] \right\} + \frac{M}{2} \left\{ -\frac{1}{k} [x\theta_1(s_1 - t) - \gamma\zeta_1(s_1 - t)] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)}{C_{11}}} [B_2^* \theta(s_1) - A_2^* \zeta(s_1)] [x\theta(t) + \gamma\zeta(t)] + \right. \\ &\quad \left. + A_2^* \frac{D_{11} - D_{11}^0}{k} \zeta(s_1) [(\gamma^2 - x^2)\zeta(t) + 2x\gamma\theta(t)] - \right. \\ &\quad \left. - A_2^* \frac{P_1}{k} \sqrt{\frac{D_{11} - D_{11}^0}{C_{11}\Omega}} \zeta(s_1) [2x\gamma\zeta(t) + (x^2 - \gamma^2)\theta(t)], \right. \\ W &= \frac{q}{2} \left\{ \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)}} \zeta_1(s_1 - t) + [A_2^* \theta(s_1) + B_2^* \zeta(s_1)] \theta(t) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -A_2^* \frac{1}{k} \theta(s_1) \left[\sqrt{\frac{C_{11}(D_{11}-D_{11}^*)}{\Omega}} \xi_1(t) + \frac{P_1}{\Omega} \theta'(t) \right] + \quad (3.7) \\
& + \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11}-D_{11}^*)}} [\gamma \theta_1(s_1-t) + \alpha \xi_1(s_1-t)] - \right. \\
& \quad \left. - [A_2^* \theta(s_1) + B_2^* \xi(s_1)] \theta'(t) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{A_2^*}{k} \theta(s_1) \left[\sqrt{\frac{C_{11}(D_{11}-D_{11}^*)}{\Omega}} (\alpha \xi'(t) - \gamma \theta'(t)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{P_1}{\Omega} (\alpha \theta'(t) + \gamma \xi'(t)) \right] \right\}, \\
& \text{при } t \leq s_1 \leq \infty:
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V = & \frac{q}{2} \left\{ \frac{1}{k} \theta(s_1-t) + \sqrt{\frac{\Omega(D_{11}-D_{11}^*)}{C_{11}}} [B_2^* \theta(s_1) \theta(t) - A_2^* \xi(s_1) \theta(t)] + \right. \\
& + \frac{A_2^*}{k} (D_{11}-D_{11}^*) \xi(s_1) [\gamma \theta(t) - \alpha \xi(t)] - \\
& - \frac{A_2^*}{k} P_1 \sqrt{\frac{D_{11}-D_{11}^*}{C_{11}\Omega}} \xi(s_1) [\alpha \theta(t) + \gamma \xi(t)] \left. \right\} + \\
& + \frac{M}{2} \left\{ -\frac{1}{k} [\alpha \theta(s_1-t) - \gamma \xi(s_1-t)] + \right. \\
& + \sqrt{\frac{\Omega(D_{11}-D_{11}^*)}{C_{11}}} [B_2^* \theta(s_1) - A_2^* \xi(s_1)] [\alpha \theta(t) + \gamma \xi(t)] + \\
& + A_2^* \frac{D_{11}-D_{11}^*}{k} \xi(s_1) [(\gamma^2 - \alpha^2) \xi(t) + 2\alpha\gamma\theta(t)] - \\
& - A_2^* \frac{P_1}{k} \sqrt{\frac{D_{11}-D_{11}^*}{C_{11}\Omega}} \xi(s_1) [2\alpha\gamma\xi(t) + (\alpha^2 - \gamma^2) \theta(t)] \left. \right\}. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W = & \frac{q}{2} \left\{ \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11}-D_{11}^*)}} \xi(s_1-t) + [A_2^* \theta(s_1) + B_2^* \xi(s_1)] \theta(t) - \right. \\
& - A_2^* \frac{1}{k} \theta(s_1) \left[\sqrt{\frac{C_{11}(D_{11}-D_{11}^*)}{\Omega}} \xi_1(t) + \frac{P_1}{\Omega} \theta'(t) \right] + \\
& + \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11}-D_{11}^*)}} [\gamma \theta(s_1-t) - \alpha \xi(s_1-t)] - \right. \\
& \left. - [A_2^* \theta(s_1) + B_2^* \xi(s_1)] \theta'(t) - \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{A_2}{k} \theta(s_1) \left[\sqrt{\frac{C_{11}(D_{11} - D_{11}^*)}{\Omega}} (z \xi'(t) - \gamma \theta'(t)) + \right. \\ \left. + \frac{P_1}{\Omega} (z \theta'(t) + \gamma \xi'(t)) \right].$$

В заключение, для иллюстрации хода расчета, рассмотрим один численный пример. Полубесконечная двухслойная цилиндрическая оболочка радиуса R , нагруженная в сечении t кольцевой распределенной силой q . Общая толщина оболочки $\delta_2 = (1 + e) \delta_1$, где δ_1 — толщина внутреннего слоя, а e — отношение толщин слоев. Модуль упругости материала внутреннего слоя — $E_1 = E_2 = nE_s$, а наружного — $E_1 = E_s$, $E_2 = mE_s$.

Для простоты коэффициент Пуассона принимаем равным нулю. Тогда из формул (В, С) и (3.7), (3.8) получим:

$$\text{при } 0 \leq s_1 \leq t:$$

$$w = \frac{q\alpha}{2k^2 C_{22}} [\xi_1(s_1 - t) - \theta_1(s_1 - t) - 3\theta(s_1) \theta(t) + \theta(s_1) \xi(t) + \\ + \theta(t) \xi(s_1) - \xi(s_1) \xi(t)],$$

$$\sigma_s^m = \left(\frac{K_{11}}{C_{11}} - z \right) \frac{q\alpha B_{11}^m}{2k \sqrt{C_{22}(D_{11} - D_{11}^*)}} [\theta_1(s_1 - t) + \xi_1(s_1 - t) - \\ - \theta(s_1) \theta(t) - 3\theta(t) \xi(s_1) + \xi(t) \xi(s_1) + \xi(t) \theta(s_1)],$$

$$\sigma_r^m = \frac{B_{22}^m}{C_{22}} \frac{q\alpha}{2k} [\xi_1(s_1 - t) - \theta_1(s_1 - t) + \theta(t) \xi(s_1) - 3\theta(t) \theta(s_1) + \\ + \xi(t) \theta(s_1) - \xi(t) \xi(s_1)],$$

$$\text{при } t \leq s_1 \leq \infty:$$

$$w = \frac{q\alpha}{2k^2 C_{22}} [-\xi(s_1 - t) - \theta(s_1 - t) - 3\theta(s_1) \theta(t) + \theta(s_1) \xi(t) + \\ + \xi(s_1) \theta(t) - \xi(s_1) \xi(t)],$$

$$\sigma_s^m = \left(\frac{K_{11}}{C_{11}} - z \right) \frac{q\alpha B_{11}^m}{2k \sqrt{C_{22}(D_{11} - D_{11}^*)}} [\theta(s_1 - t) - \xi(s_1 - t) - \\ - \theta(t) \theta(s_1) - 3\theta(t) \xi(s_1) + \xi(t) \xi(s_1) + \xi(t) \theta(s_1)],$$

$$\sigma_r^m = \frac{B_{22}^m}{C_{22}} \frac{q\alpha}{2k} [-\xi(s_1 - t) - \theta(s_1 - t) + \theta(t) \xi(s_1) -$$

$$-3\theta(t)\theta(s_1) + \xi(t)\theta(s_1) - \xi(t)\xi(s_1)],$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2R}} \sqrt{\frac{C_{22}}{D_{11} - D_{11}^*}}, \quad C_{11} = E_s \delta_1 (e + n), \quad C_{22} = E_s \delta_1 (me + n),$$

$$K_{11} = \frac{1}{2} E_s \delta_1^2 (n + 2e + e^2), \quad D_{11} - D_{11}^* = \frac{n^2 + e^4 + 6ne^2 + 4ne + 4ne^3}{12(n + e)}.$$

Зона распространения краевого эффекта определится по формуле:

$$s_0 = \frac{\pi \sqrt{R \delta_1}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{n^2 + e^4 + 6ne^2 + 4ne + 4ne^3}{(me + n)(n + e)}}.$$

Положим $t = 50$ см, $R = 1,5$ м, $\delta_1 = 1$ см, $e = 5$ и рассмотрим два случая: 1) $n = 10$, $m = 1$; 2) $n = m = 10$. Тогда $s_0^{(1)} = 69,41$ см, $s_0^{(2)} = 49,41$ см.

Результаты вычислений приведены в таблицах.

Значения $10^5 \frac{k}{q} \sigma_s^m$

$n = 10, m = 1$

s_1 точки	0	12,5	25	37,5	50	62,5	75	87,5	100
1	0	-67	-71	+313	+1393	+243	-212	-289	-205
2	0	-22	-23	+104	+464	+81	-70	-96	-68
3	0	-2	-2	+10	+46	+8	-7	-9	-6
4	0	+20	+21	-93	-417	-72	+63	+86	+61

$n = m = 10$

1	0	-74	-177	+2	+959	-5	-202	-125	-39
2	0	-24	-59	+0,6	+319	-1	-67	-41	-13
3	0	-2	-5	+0,06	+31	-0,1	-6	-4	-1
4	0	+22	+53	-0,6	-287	+1	+60	+37	+11

Значения $10^5 \frac{k}{q} \sigma_z^m$

$n = 10, m = 1$

s_1	0	12,5	25	37,5	50	62,5	75	87,5	100
I слой	+399	+103	-654	-1235	-1552	-1214	659	-245	-19
II слой	+39	+10	-65	-123	-155	-121	-65	-24	-1

$n = m = 10$

I и II слой	+88	+15	-113	-345	-231	-340	-106	+1	+22
----------------	-----	-----	------	------	------	------	------	----	-----

Значения $10^5 \frac{E_1 2k^*}{q} w$

s_1	0	12,5	25	37,5	50	62,5	75	87,5	100
$n=10$ $m=1$	+80	+21	-130	-247	-310	-242	-132	-35	-4
$n=10$ $m=10$	+17	+3	-22	-68	-105	-67	-21	+0,7	+4

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 21 I 1957

Ջ. Վ. ՓԵՏՄԱԼԺՅԱՆ

ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՊՏՏՄԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկվում են կամարաձև թվով օրթոտրոպ շերտերից կազմված պատման թաղանթները, որոնք ունեն գծային ծնիչներ և բևեռավորված են սիմետրիկ ընտով:

Ընդհանուր դեպքում ստացված են լուծումներ գլանային և կոնական թաղանթների համար: Լուծված են մի շարք խնդիրներ: Բերված է մեկ թվային օրինակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. Известия АН Армянской ССР, VI, 3 (1953).
2. Амбарцумян С. А. Длинные анизотропные оболочки вращения. Известия АН Армянской ССР, IV, 6 (1951).
3. Григолюк Э. И. Уравнения осесимметричных биметаллических упругих оболочек. Инж. сборник, XVIII (1954).
4. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат (1947).
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. Издат. ин. лит. (1949).
6. Амбарцумян С. А. К расчету анизотропных цилиндрических оболочек вращения, подкрепленных поперечными ребрами. Известия АН СССР, ОТИ, 12 (1955).