ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 2, 1957 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян

О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек

1. *Основные предпосылки и гипотезы.* Рассмотрим тонкую двухслойную оболочку, составленную из двух однородных ортотропных слоев. Пусть плоскости упругой симметрии материалов каждого слоя взаимно перпендикулярны, при этом одна из плоскостей упругой симметрии в каждой точке каждого слоя параллельна внешним параллельным поверхностям оболочки, а остальные две перпендикулярны координатным линиям $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$*.

Пусть α и β являются криволинейными, ортогональными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны координатной поверхности, γ — расстояние по нормали от точки (α, β) координатной поверхности до точки (α, β, γ) оболочки.

За координатную поверхность принимаем поверхность спая слоев, которая параллельна внешним поверхностям оболочки.

Считаем, что коэффициенты первой квадратичной формы $A = A(\alpha, \beta)$ и $B = B(\alpha, \beta)$, а также главные кривизны координатной поверхности $k_1 = k_1(\alpha, \beta)$ и $k_2 = k_2(\alpha, \beta)$ при дифференцировании ведут себя как постоянные [1, 2, 3].

Предположим также, что слои после деформирования остаются упругими и работают совместно, без скольжения.

В отличие от общепринятого метода расчета слоистых оболочек, здесь в основу ставим следующие предположения:

1. В каждом слое оболочки нормальный к координатной поверхности линейный элемент оболочки после деформации не меняет своей длины.

2. При определении деформаций $e^m_{\alpha\gamma}$ и $e^m_{\beta\gamma}$ считаем, что касательные напряжения $\tau^m_{\alpha\gamma}$ и $\tau^m_{\beta\gamma}$ не отличаются от соответствующих напряжений ($\tau^m_{\alpha\gamma}$ и $\tau^m_{\beta\gamma}$), найденных в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей для всего пакета оболочки в целом [4—8]

Здесь, будучи более строгими [3, 10], первую гипотезу можно сформулировать несколько иначе. При рассмотрении деформаций пренебрегаем влиянием напряжения σ^m_γ на $e^m_{\alpha\alpha}$ и $e^m_{\beta\beta}$, а также приближенно принимаем, $e_{\gamma\gamma} = 0$.

* Здесь и в дальнейшем в основном приняты известные обозначения [2, 3, 10].

Учитывая результаты, полученные при решении плоской задачи изгиба составного бруса [7], в настоящей работе, начиная с 7-го номера, будет рассмотрен вариант теории расчета двухслойной оболочки, в котором приведенная выше первая гипотеза будет изменена следующим образом. В каждом слое оболочки нормальный к координатной поверхности линейный элемент оболочки после деформации остается линейным и не меняет своей длины. В силу этой гипотезы при рассмотрении деформаций будем пренебрегать влиянием напряжения σ_γ^m на деформации $e_{\alpha\gamma}^m$ и $e_{\beta\gamma}^m$, которые по высоте каждого слоя оболочки будут иметь прямолинейный закон распределения, а также будем считать $e_{\gamma\gamma}^m = 0$. Укажем, что и при этом варианте второе предположение остается в силе.

Принятые здесь гипотезы являются результатом логического развития гипотезы недеформируемых нормалей, принятой для всего пакета оболочки в целом, и находят подтверждение в исследованиях плоской задачи изгиба неоднородного бруса [6, 7].

2. *Исходные уравнения и соотношения.* В этом номере без доказательств приводятся известные результаты, которые лежат в основе дальнейшего изложения.

Для объемного дифференциального элемента, выделенного в каком-либо m-ом слое оболочки, имеем следующие уравнения равновесия [2]:

$$H_2 \frac{\partial \sigma_\alpha^m}{\partial \alpha} + H_1 \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^m}{\partial \beta} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1^2 H_2 \tau_{\alpha\gamma}^m) = 0,$$

$$H_1 \frac{\partial \sigma_\beta^m}{\partial \beta} + H_2 \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^m}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2^2 \tau_{\beta\gamma}^m) = 0,$$

$$H_2 \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^m}{\partial \alpha} + H_1 \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}^m}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2 \sigma_\gamma^m) - \sigma_\alpha^m H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} - \sigma_\beta^m H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} = 0, \qquad (2.1)$$

где для коэффициентов Ламе имеем

$$H_1 = A\,(1 + k_1\gamma), \qquad H_2 = B\,(1 + k_2\gamma). \qquad (2.2)$$

Для компонентов деформаций имеем

$$e_{\alpha\alpha}^m = \frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial u_\alpha^m}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} u_\gamma^m\right), \qquad e_{\beta\beta}^m = \frac{1}{H_2}\left(\frac{\partial u_\beta^m}{\partial \beta} + \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma^m\right),$$

$$e_{\alpha\beta}^m = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\alpha^m}{\partial \beta} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_\beta^m}{\partial \alpha}, \qquad (2.3)$$

$$e_{\beta\gamma}^m = H_2 \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{H_2} u_\beta^m\right) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\gamma^m}{\partial \beta},$$

$$e_{\alpha\gamma}^m = H_1 \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{H_1} u_\alpha^m\right) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_\gamma^m}{\partial \alpha}, \qquad e_{\gamma\gamma}^m = \frac{\partial u_\gamma^m}{\partial \gamma}, \qquad (2.4)$$

где $u_\alpha^m = u_\alpha^m(\alpha, \beta, \gamma)$, $u_\beta^m = u_\beta^m(\alpha, \beta, \gamma)$ и $u_\gamma^m = u_\gamma^m(\alpha, \beta, \gamma)$ — компоненты полного перемещения какой-либо точки m-го слоя оболочки.

В силу первой гипотезы, из обобщенного закона Гука, для напряжений в m-ом слое оболочки получим [4, 8]

$$\sigma_\alpha^m = B_{11}^m e_\alpha^m + B_{12}^m e_\beta^m, \quad \sigma_\beta^m = B_{22}^m e_\beta^m + B_{12}^m e_\alpha^m,$$

$$\tau_{\alpha\beta}^m = B_{66}^m e_{\alpha\beta}^m, \quad \tau_{\beta\gamma}^m = B_{44}^m e_{\beta\gamma}^m, \quad \tau_{\alpha\gamma}^m = B_{55}^m e_{\alpha\gamma}^m, \tag{2.5}$$

где

$$B_{11}^m = \frac{E_\alpha^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \qquad B_{22}^m = \frac{E_\beta^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m},$$

$$B_{12}^m = \frac{\mu_2^m E_\alpha^m}{1 - \mu_2^m \mu_2^m} = \frac{\mu_1^m E_\beta^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \tag{2.6}$$

$$B_{66}^m = G_{\alpha\beta}^m, \quad B_{55}^m = G_{\alpha\gamma}^m, \quad B_{44}^m = G_{\beta\gamma}^m,$$

где E_α^m и E_β^m — модули упругости; $G_{\alpha\gamma}^m$, $G_{\beta\gamma}^m$, $G_{\alpha\beta}^m$ — модули сдвига; $\mu_1^m = \mu_{\alpha\beta}^m$, $\mu_2^m = \mu_{\beta\alpha}^m$ — коэффициенты Пуассона (первый индекс показывает направление действия напряжения).

Перемещения и напряжения на внешних поверхностях оболочки и на поверхности контакта должны удовлетворять следующим условиям:

1) на верхней поверхности, при $\gamma = \delta_2$,

$$\overset{''}{\tau}_{\alpha\gamma} = X, \quad \overset{''}{\tau}_{\beta\gamma} = Y, \quad \overset{''}{\sigma}_\gamma = Z; \tag{2.7}$$

2) на нижней поверхности, при $\gamma = -\delta_1$,

$$\overset{'}{\tau}_{\alpha\gamma} = 0, \quad \overset{'}{\tau}_{\beta\gamma} = 0, \quad \overset{'}{\sigma}_\gamma = 0; \tag{2.8}$$

3) на поверхности контакта, при $\gamma = 0$,

$$\overset{'}{\tau}_{\alpha\gamma} = \overset{''}{\tau}_{\alpha\gamma}, \quad \overset{'}{\tau}_{\beta\gamma} = \overset{''}{\tau}_{\beta\gamma}, \quad \overset{'}{\sigma}_\gamma = \overset{''}{\sigma}_\gamma, \tag{2.9}$$

$$\overset{'}{u}_\alpha = \overset{''}{u}_\alpha, \quad \overset{'}{u}_\beta = \overset{''}{u}_\beta, \quad \overset{'}{u}_\gamma = \overset{''}{u}_\gamma.^* \tag{2.10}$$

Здесь $X = X(\alpha, \beta)$, $Y = Y(\alpha, \beta)$, $Z = Z(\alpha, \beta)$ — компоненты внешней поверхностной нагрузки, δ_1 — толщина нижнего слоя, δ_2 — толщина верхнего слоя.

Напряжения вызывают внутренние силы (T_1, T_2, T_{12}, T_{21}, Q_1, Q_2) и внутренние моменты (M_1, M_2, M_{12}, M_{21}), которые определяются обычным способом [4, 5, 9] и должны удовлетворять следующим уравнениям равновесия [10, 12]:

* Здесь и в дальнейшем для первого или второго слоев, когда m фигурирует как индекс, расположенный сверху расчетной величины, то вместо $m=1$ или $m=2$ соответственно будем употреблять один или два штриха. Например: вместо B_{ik}^1 напишем $\overset{'}{B}_{ik}$ или вместо B_{ik}^2 напишем $\overset{''}{B}_{ik}$.

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{A}\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial T_{21}}{\partial\beta}+k_1Q_1+X=0,\\
\frac{1}{B}\frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial T_{12}}{\partial\alpha}+k_2Q_2+Y=0,\\
-(k_1T_1+k_2T_2)+\frac{1}{A}\frac{\partial Q_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial Q_2}{\partial\beta}+Z=0,\\
\frac{1}{A}\frac{\partial M_{12}}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial M_2}{\partial\beta}-Q_2=0,\\
\frac{1}{B}\frac{\partial M_{21}}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial M_1}{\partial\alpha}-Q_1=0,\\
T_{12}-T_{21}+k_1M_{12}-k_2M_{21}=0.
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

3. *Значения касательных напряжений $\tau^{\circ m}_{\alpha\gamma}$ и $\tau^{\circ m}_{\beta\gamma}$ в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей для всего пакета оболочки в целом**. Согласно гипотезе недеформируемых нормалей, нормальный к координатной поверхности прямолинейный элемент оболочки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной координатной поверхности оболочки и сохраняет свою длину. В силу этой гипотезы [2]

$$
\begin{gathered}
u^{\circ m}_{\alpha}=(1+k_1\gamma)u^{\circ}-\frac{\gamma}{A}\frac{\partial w^{\circ}}{\partial\alpha},\\
u^{\circ m}_{\beta}=(1+k_2\gamma)v^{\circ}-\frac{\gamma}{B}\frac{\partial w^{\circ}}{\partial\beta},\qquad u^{\circ m}_{\gamma}=w^{\circ},
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

где $u^{\circ}=u^{\circ}(\alpha,\beta)$, $v^{\circ}=v^{\circ}(\alpha,\beta)$ и $w^{\circ}=w^{\circ}(\alpha,\beta)$ — соответственно тангенциальные и нормальное перемещения рассматриваемой точки координатной поверхности оболочки.

Подставляя значения $u^{\circ m}_{\alpha}$, $u^{\circ m}_{\beta}$ и $u^{\circ m}_{\gamma}$ из (3.1) в (2,3), учитывая при этом, что

$$
\begin{gathered}
e^{\circ m}_{\alpha}=\varepsilon_1^{\circ}+\gamma x_1^{\circ},\quad e^{\circ m}_{\beta}=\varepsilon_2^{\circ}+\gamma x_2^{\circ},\\
e^{\circ m}_{\alpha\beta}=\omega^{\circ}+\gamma\tau^{\circ},
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

получим следующие соотношения для относительных удлинений и сдвига, а также для параметров, характеризующих изменение кривизны и кручения координатной поверхности оболочки, [2, 3, 10, 11]:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_1^{\circ}=\frac{1}{A}\frac{\partial u^{\circ}}{\partial\alpha}+k_1w^{\circ},\qquad \varepsilon_2^{\circ}=\frac{1}{B}\frac{\partial v^{\circ}}{\partial\beta}+k_2w^{\circ},\\
\omega^{\circ}=\frac{1}{B}\frac{\partial u^{\circ}}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial v^{\circ}}{\partial\alpha},
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

* Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к задаче, при которой принимается гипотеза недеформируемых нормалей, отмечаем „кружочком".

$$\varkappa_1^\circ = -\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w^\circ}{\partial\alpha^2} + k_1\frac{1}{A}\frac{\partial u^\circ}{\partial\alpha}, \qquad \varkappa_2^\circ = -\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w^\circ}{\partial\beta^2} + k_2\frac{1}{B}\frac{\partial v^\circ}{\partial\beta},$$

$$\tau^\circ = -\frac{2}{AB}\frac{\partial^2 w^\circ}{\partial\alpha\partial\beta} + 2\left(k_1\frac{1}{B}\frac{\partial u^\circ}{\partial\beta} + k_2\frac{1}{A}\frac{\partial v^\circ}{\partial\alpha}\right). \tag{3.4}$$

Из (2.5) на основании (3.2) для напряжений в m-ом слое оболочки получим:

$$\begin{gathered}\sigma^{\circ m}_{\alpha} = B^m_{11}\varepsilon_1^\circ + B^m_{12}\varepsilon_2^\circ + \gamma\left(B^m_{11}\varkappa_1^\circ + B^m_{12}\varkappa_2^\circ\right),\\ \sigma^{\circ m}_{\beta} = B^m_{22}\varepsilon_2^\circ + B^m_{12}\varepsilon_1^\circ + \gamma\left(B^m_{22}\varkappa_2^\circ + B^m_{12}\varkappa_1^\circ\right),\\ \tau^{\circ m}_{\alpha\beta} = B^m_{66}\omega^\circ + \gamma B^m_{66}\tau^\circ.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Подставляя значения напряжений из (3.5) в первые два уравнения (2.1), при этом учитывая условия на внешних поверхностях (2.7) и (2.8), а также (3.3) и (3.4), для искомых касательных напряжений с точностью гипотезы недеформируемых нормалей, получим [4, 5]

$$\begin{aligned}\tau^{\circ m}_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2}\left(\delta_m^2 - \gamma^2\right)\left(B^m_{11}\frac{1}{A}\frac{\partial\varkappa_1^\circ}{\partial\alpha} + B^m_{12}\frac{1}{A}\frac{\partial\varkappa_2^\circ}{\partial\alpha} + B^m_{66}\frac{1}{B}\frac{\partial\tau^\circ}{\partial\beta}\right) +\\ &+ \left[(-1)^m\delta_m - \gamma\right]\left(B^m_{11}\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_1^\circ}{\partial\alpha} + B^m_{12}\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_2^\circ}{\partial\alpha} + B^m_{66}\frac{1}{B}\frac{\partial\omega^\circ}{\partial\beta}\right) + (m-1)X =\\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_m^2 - \gamma^2\right)E_1(B^m_{ik})\,w^\circ + \left[(-1)^m\delta_m - \gamma\right]\left[B^m_{11}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial\alpha^2} +\right.\\ &\quad + B^m_{66}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial\beta^2} + \left(B^m_{12} + B^m_{66}\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 v^\circ}{\partial\alpha\partial\beta} +\\ &\quad \left. + \left(k_1 B^m_{11} + k_2 B^m_{12}\right)\frac{1}{A}\frac{\partial w^\circ}{\partial\alpha}\right] + (m-1)X,\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\tau^{\circ m}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\left(\delta_m^2 - \gamma^2\right)\left(B^m_{22}\frac{1}{B}\frac{\partial\varkappa_2^\circ}{\partial\beta} + B^m_{12}\frac{1}{B}\frac{\partial\varkappa_1^\circ}{\partial\beta} + B^m_{66}\frac{1}{A}\frac{\partial\tau^\circ}{\partial\alpha}\right) +\\ &+ \left[(-1)^m\delta_m - \gamma\right]\left(B^m_{22}\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_2^\circ}{\partial\beta} + B^m_{12}\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_1^\circ}{\partial\beta} + B^m_{66}\frac{1}{A}\frac{\partial\omega^\circ}{\partial\alpha}\right) +\\ &+ (m-1)Y = \frac{1}{2}\left(\delta_m^2 - \gamma^2\right)E_2(B^m_{ik})\,w^\circ + \left[(-1)^m\delta_m - \gamma\right]\left[B^m_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 v^\circ}{\partial\beta^2} +\right.\\ &\quad + B^m_{66}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 v^\circ}{\partial\alpha^2} + \left(B^m_{12} + B^m_{66}\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial\alpha\partial\beta} +\\ &\quad \left. + \left(k_2 B^m_{22} + k_1 B^m_{12}\right)\frac{1}{B}\frac{\partial w^\circ}{\partial\beta}\right] + (m-1)Y,\end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$E_1(B^m_{ik}) = B^m_{11}\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} + \left(B^m_{12} + 2B^m_{66}\right)\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2},$$

$$E_2(B_{ik}^m) = B_{22}^m \frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} + (B_{12}^m + 2B_{66}^m)\frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}. \tag{3.8}$$

Таким образом, задача определения искомых напряжений $\tau_{\alpha\gamma}^{\circ m}$ и $\tau_{\beta\gamma}^{\circ m}$ сводится к нахождению перемещений u°, v° и w°.

4. *Разрешающие уравнения в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей, для всего пакета оболочки в целом.* Для построения разрешающих уравнений относительно искомых перемещений u°, v°, w°, во-первых, определим внутренние усилия. Воспользовавшись известными формулами [9] для внутренних усилий, получим

$$\begin{aligned} T_1^\circ &= C_{11}\varepsilon_1^\circ + C_{12}\varepsilon_2^\circ + K_{11}\varkappa_1^\circ + K_{12}\varkappa_2^\circ, \\ T_2^\circ &= C_{22}\varepsilon_2^\circ + C_{12}\varepsilon_1^\circ + K_{22}\varkappa_2^\circ + K_{12}\varkappa_1^\circ, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} T_{12}^\circ &= (C_{66} + k_2 K_{66})\,\omega^\circ + (K_{66} + k_2 D_{66})\,\tau^\circ, \\ T_{21}^\circ &= (C_{66} + k_1 K_{66})\,\omega^\circ + (K_{66} + k_1 D_{66})\,\tau^\circ. \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} M_1^\circ &= D_{11}\varkappa_1^\circ + D_{12}\varkappa_2^\circ + K_{11}\varepsilon_1^\circ + K_{12}\varepsilon_2^\circ, \\ M_2^\circ &= D_{22}\varkappa_2^\circ + D_{12}\varkappa_1^\circ + K_{22}\varepsilon_2^\circ + K_{12}\varepsilon_1^\circ, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$M_{12}^\circ = M_{21}^\circ = H = D_{66}\tau^\circ + K_{66}\omega^\circ, \tag{4.4}$$

где для жесткостей имеем [9, 12]:

$$\begin{aligned} C_{ik} &= (\delta_2 B_{ik}'' + \delta_1 B_{ik}'), \\ K_{ik} &= \frac{1}{2}(\delta_2^2 B_{ik}'' - \delta_1^2 B_{ik}'), \\ D_{ik} &= \frac{1}{3}(\delta_2^3 B_{ik}'' + \delta_1^3 B_{ik}'). \end{aligned} \tag{4.5}$$

В (4.1)—(4.4) мы получили наиболее простые соотношения упругости, которые, как нетрудно заметить, не противоречат шестому уравнению равновесия (2.11).

Подставляя значения внутренних усилий из (4.1)—(4.4) в уравнения равновесия, при этом учитывая (3.3) и (3.4), для определения искомых перемещений u°, v°, w° получим следующую систему из трех дифференциальных уравнений:

$$L_{11}(C_{ik}K_{ik})u^\circ + Q_{12}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 v^\circ}{\partial\alpha\partial\beta} - \left[L_{13}(D_{ik}K_{ik}) - Q_{13}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]w^\circ = -X, \tag{4.6а}$$

$$L_{22}(C_{ik}K_{ik})v^\circ + Q_{12}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial\alpha\partial\beta} - \left[L_{23}(D_{ik}K_{ik}) - Q_{23}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right]w^\circ = -Y, \tag{4.6б}$$

$$\left[L_{33}(D_{ik}) - 2F(K_{ik}) + Q_{33}\right]w^\circ - \left[L_{13}(D_{ik}K_{ik}) - Q_{13}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]u^\circ -$$

$$- \left[L_{23}(D_{ik}K_{ik}) - Q_{23}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right]v^\circ = Z, \tag{4.6в}$$

где для линейных операторов и коэффициентов введены следующие обозначения:

$$L_{11}(C_{ik}K_{ik}) = (C_{11} + 2k_1 K_{11} + k_1^2 D_{11}) \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} +$$

$$+ [C_{66} + 4k_1(K_{66} + k_1 D_{66})] \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}, \tag{4.7}$$

$$L_{22}(C_{ik}K_{ik}) = (C_{22} + 2k_2 K_{22} + k_2^2 D_{22}) \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} +$$

$$+ [C_{66} + 4k_2(K_{66} + k_2 D_{66})] \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}, \tag{4.8}$$

$$L_{33}(D_{ik}) = D_{11}\frac{1}{A^4}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + D_{22}\frac{1}{B^4}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4} +$$

$$+ 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{A^2B^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}, \tag{4.9}$$

$$L_{13}(D_{ik}K_{ik}) = (K_{11} + k_1 D_{11}) \frac{1}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} +$$

$$+ [2K_{66} + K_{12} + k_1(D_{12} + 4D_{66})] \frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2},$$

$$L_{23}(D_{ik}K_{ik}) = (K_{22} + k_2 D_{22}) \frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} +$$

$$+ [2K_{66} + K_{12} + k_2(D_{12} + 4D_{66})] \frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta},$$

$$F(K_{ik}) = (k_1 K_{11} + k_2 K_{12}) \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \tag{4.10}$$

$$+ (k_2 K_{22} + k_1 K_{12}) \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2},$$

$$Q_{12} = [C_{12} + C_{66} + k_1k_2(D_{12} + 4D_{66}) + (k_1 + k_2)(K_{12} + 2K_{66})], \tag{4.11}$$

$$Q_{13} = [C_{11}k_1 + C_{12}k_2 + k_1(k_1 K_{11} + k_2 K_{12})],$$

$$Q_{23} = [C_{22}k_2 + C_{12}k_1 + k_2(k_2 K_{22} + k_1 K_{12})], \tag{4.12}$$

$$Q_{33} = k_1^2 C_{11} + 2k_1 k_2 C_{12} + k_2^2 C_{22}. \tag{4.13}$$

В случае, когда оболочка „пологая" [2, 14] или „не слишком длинная" [3], полученные уравнения и соотношения могут быть несколько упрощены*.

---

* Здесь следует указать, что полученные уравнения и соотношения могут быть использованы как в случае пологих оболочек, если даже оболочка слишком длинная [14], так и в случае не слишком длинных оболоуек, если даже оболочка совершенно не пологая [11].

Всюду методически пренебрегая величинами порядка γk по сравнению с единицей, получим следующую упрощенную систему разрешающих дифференциальных уравнений [12]:

$$\left(C_{11}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+C_{66}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)u^\circ+(C_{12}+C_{66})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 v^\circ}{\partial\alpha\partial\beta}-$$

$$-\left[E_1(K_{ik})-(k_1C_{11}+k_2C_{12})\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]w^\circ=-X, \tag{4.14а}$$

$$\left(C_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+C_{66}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)v^\circ+(C_{12}+C_{66})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial\alpha\partial\beta}-$$

$$-\left[E_2(K_{ik})-(k_2C_{22}+k_1C_{12})\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right]w^\circ=-Y, \tag{4.14б}$$

$$[L_{33}(D_{ik})-2F(K_{ik})+Q_{33}]\,w^\circ-\left[E_1(K_{ik})-(k_1C_{11}+k_2C_{12})\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]u^\circ-$$

$$-\left[E_2(K_{ik})-(k_2C_{22}+k_1C_{12})\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right]v^\circ=Z. \tag{4.14в}$$

Укажем, что, при выводе системы (4.14), в первых двух уравнениях равновесия (2.11) величины k_1Q_1 и k_2Q_2 принимались равными нулю. Изменения кривизны и кручение имели следующий вид:

$$\varkappa_1^\circ=-\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w^\circ}{\partial\alpha^2},\qquad \varkappa_2^\circ=-\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w^\circ}{\partial\beta^2},\qquad \tau_2^\circ=-\frac{2}{AB}\frac{\partial^2 w^\circ}{\partial\alpha\partial\beta}, \tag{4.15}$$

и, наконец,

$$T_{12}^\circ=T_{21}^\circ=C_{66}\omega^\circ+K_{66}\tau^\circ. \tag{4.16}$$

5. *Несколько слов об условиях контакта слоев оболочки.* Рассматривая формулы (3.1), замечаем, что условия контакта (2.10) удовлетворяются тождественно. Что же касается условий контакта (2.9), то, как известно [4], эти условия сводятся к системе разрешающих уравнений (4.6) или в частном случае к (4.14).

Таким образом, если u°, v° и w° будут определены из системы уравнений (4.6) или в частном случае из (4.14), то условия контакта (2.9) также будут удовлетворены тождественно.

6. *Основные уравнения и соотношения поставленной задачи.* В силу принятых гипотез (гипотезы 1 и 2), для деформаций в m-ом слое оболочки имеем:

$$e_{\alpha\gamma}^{m}=\frac{\overset{m}{\tau}_{\alpha\gamma}}{B_{55}^{m}}=\frac{\overset{m}{\tau}{}^{\circ}_{\alpha\gamma}}{B_{55}^{m}}, \tag{6.1}$$

$$e_{\beta\gamma}^{m}=\frac{\overset{m}{\tau}_{\beta\gamma}}{B_{44}^{m}}=\frac{\overset{m}{\tau}{}^{\circ}_{\beta\gamma}}{B_{44}^{m}},$$

$$e_{\gamma\gamma}^{m}=0. \tag{6.2}$$

Из (6.2), учитывая (2.4), для перемещения u_γ получим

$$u_\gamma^m = w(\alpha, \beta). \tag{6.3}$$

Значит, как и во всех существующих теориях расчета тонких оболочек, перемещение u_γ какой-либо точки m-го слоя оболочки не зависит от координаты γ. Это перемещение для всех точек данного нормального элемента оболочки имеет постоянное значение, равное нормальному перемещению $w = w(\alpha, \beta)$ той точки координатной поверхности, которая образуется при пересечении данной нормали с координатной поверхностью оболочки.

Подставляя значения $\tau^{\circ m}_{\alpha\gamma}$ и $\tau^{\circ m}_{\beta\gamma}$ из(3.6) и (3.7) в (6.1), для деформаций сдвига получим:

$$\begin{gathered} e_{\alpha\gamma}^m = \varphi^{\circ m}_1 - \gamma I^{\circ m}_1 - \frac{\gamma^2}{2}\chi^{\circ m}_1, \\ e_{\beta\gamma}^m = \varphi^{\circ m}_2 - \gamma I^{\circ m}_2 - \frac{\gamma^2}{2}\chi^{\circ m}_2, \end{gathered} \tag{6.4}$$

где

$$\varphi^{\circ m}_1 = \frac{m-1}{B_{55}^m} X + (-1)^m \delta_m I^{\circ m}_1 + \frac{\delta_m^2}{2}\chi^{\circ m}_1, \tag{6.5}$$

$$\varphi^{\circ m}_2 = \frac{m-1}{B_{44}^m} Y + (-1)^m \delta_m I^{\circ m}_2 + \frac{\delta_m^2}{2}\chi^{\circ m}_2, \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} I^{\circ m}_1 &= \frac{1}{B_{55}^m}\left(B_{11}^m \frac{1}{A}\frac{\partial \varepsilon_1^\circ}{\partial \alpha} + B_{12}^m \frac{1}{A}\frac{\partial \varepsilon_2^\circ}{\partial \alpha} + B_{66}^m \frac{1}{B}\frac{\partial \omega^\circ}{\partial \beta}\right) = \\ &= \frac{1}{B_{55}^m}\left[B_{11}^m \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial \alpha^2} + B_{66}^m \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial \beta^2} + (B_{12}^m + B_{66}^m)\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 v^\circ}{\partial \alpha \partial \beta} + \right. \\ &\quad \left. + (B_{11}^m k_1 + B_{12}^m k_2)\frac{1}{A}\frac{\partial w^\circ}{\partial \alpha}\right], \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} I^{\circ m}_2 &= \frac{1}{B_{44}^m}\left(B_{22}^m \frac{1}{B}\frac{\partial \varepsilon_2^\circ}{\partial \beta} + B_{12}^m \frac{1}{B}\frac{\partial \varepsilon_1^\circ}{\partial \beta} + B_{66}^m \frac{1}{A}\frac{\partial \omega^\circ}{\partial \alpha}\right) = \\ &= \frac{1}{B_{44}^m}\left[B_{22}^m \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 v^\circ}{\partial \beta^2} + B_{66}^m \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 v^\circ}{\partial \alpha^2} + (B_{12}^m + B_{66}^m)\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial \alpha \partial \beta} + \right. \\ &\quad \left. + (B_{22}^m k_2 + B_{12}^m k_1)\frac{1}{B}\frac{\partial w^\circ}{\partial \beta}\right], \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\chi^{\circ m}_1 = -\frac{1}{B_{55}^m} E_1(B_{ik}^m)\, w^\circ, \tag{6.9}$$

$$\chi^{\circ m}_2 = -\frac{1}{B_{44}^m} E_2(B_{ik}^m)\, w^\circ. \tag{6.10}$$

Из (6.4), подставляя значения $e^m_{\alpha\gamma}$ и $e^m_{\beta\gamma}$ в (2.4), получим:

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u^m_\alpha}{H_1}\right)=-\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial u^m_\gamma}{\partial\alpha}+\frac{\varphi^{\circ m}_1}{H_1}-\frac{\gamma}{H_1}I^{\circ m}_1-\frac{\gamma^2}{2H_1}\chi^{\circ m}_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u^m_\beta}{H_2}\right)=-\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial u^m_\gamma}{\partial\beta}+\frac{\varphi^{\circ m}_2}{H_2}-\frac{\gamma}{H_2}I^{\circ m}_2-\frac{\gamma^2}{2H_2}\chi^{\circ m}_2. \tag{6.11}$$

Умножая каждое из этих уравнений на $d\gamma$ и интегрируя в пределах от нуля до γ, при этом учитывая, что при $\gamma=0$ $u^m_\alpha=u(\alpha,\beta)$ и $u^m_\beta=v(\alpha,\beta)$, получим

$$u^m_\alpha=(1+k_1\gamma)u-\frac{\gamma}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\gamma\left(1+k_1\frac{\gamma}{2}\right)\varphi^{\circ m}_1-$$

$$-\frac{\gamma^2}{2}\left(1+k_1\frac{\gamma}{3}\right)I^{\circ m}_1-\frac{\gamma^3}{6}\left(1+k_1\frac{\gamma}{4}\right)\chi^{\circ m}_1, \tag{6.12}$$

$$u^m_\beta=(1+k_2\gamma)v-\frac{\gamma}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\gamma\left(1+k_2\frac{\gamma}{2}\right)\varphi^{\circ m}_2-$$

$$-\frac{\gamma^2}{2}\left(1+k_2\frac{\gamma}{3}\right)I^{\circ m}_2-\frac{\gamma^3}{6}\left(1+k_2\frac{\gamma}{4}\right)\chi^{\circ m}_2. \tag{6.13}$$

Здесь, как и вообще [2], $u=u(\alpha,\beta)$, $v=v(\alpha,\beta)$ — тангенциальные перемещения какой-либо точки координатной поверхности.

Формулы (6.12) и (6.13) показывают, что, в отличие от существующих теорий расчета слоистых оболочек [4, 9, 12, 13], здесь тангенциальные перемещения u^m_α и u^m_β какой-либо точки оболочки, удаленной от координатной поверхности по нормали на расстояние γ, зависят от γ нелинейно. При этом коэффициенты нелинейных членов $\varphi^{\circ m}_1$, $\varphi^{\circ m}_2$, $I^{\circ m}_1$, $I^{\circ m}_2$, $\chi^{\circ m}_1$, $\chi^{\circ m}_2$ являются известными величинами, которые определяются с помощью формул (6.5) — (6.10), на основании решения задачи теории слоистой оболочки, опирающейся на гипотезу недеформируемых нормалей, данную для всего пакета оболочки в целом.

Укажем, что в формулах (6.12) и (6.13) известные коэффициенты ($\varphi^{\circ m}_1$, $\varphi^{\circ m}_2$) имеются и при γ.

В силу (6.12) и (6.13) деформации $e^m_{\alpha\alpha}$, $e^m_{\beta\beta}$ и $e^m_{\alpha\beta}$ могут быть представлены в виде многочлена по степеням γ:

$$e^m_{\alpha\alpha}=\varepsilon^m_1+\gamma\varkappa^m_1+\gamma^2\eta^m_1+\gamma^3\theta^m_1+\gamma^4\xi^m_1,$$

$$e^m_{\beta\beta}=\varepsilon^m_2+\gamma\varkappa^m_2+\gamma^2\eta^m_2+\gamma^3\theta^m_2+\gamma^4\xi^m_2, \tag{6.14}$$

$$e^m_{\alpha\beta}=\omega^m+\gamma\tau^m+\gamma^2\nu^m+\gamma^3\lambda^m+\gamma^4\zeta^m.$$

Из (6.3), (6.12) и (6.13), подставляя значения u^m_γ, u^m_α и u^m_β в (2.3) и полученные при этом значения $e^m_{\alpha\alpha}$, $e^m_{\beta\beta}$ и $e^m_{\alpha\beta}$ сравнивая с соответствующими выражениями (6.14), для коэффициентов разложений получим:

$$\varepsilon_1^m = \varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w, \qquad \varepsilon_2^m = \varepsilon_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w,$$

$$\omega^m = \omega = \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha}, \tag{6.15}$$

$$\varkappa_1^m = \varkappa_1 + \frac{1}{A}\frac{\partial \varphi_1^{\circ m}}{\partial \alpha} = -\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + k_1\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{A}\frac{\partial \varphi_1^{\circ m}}{\partial \alpha},$$

$$\varkappa_2^m = \varkappa_2 + \frac{1}{B}\frac{\partial \varphi_2^{\circ m}}{\partial \beta} = -\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + k_2\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{B}\frac{\partial \varphi_2^{\circ m}}{\partial \beta},$$

$$\tau^m = \tau + \frac{1}{B}\frac{\partial \varphi_1^{\circ m}}{\partial \beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial \varphi_2^{\circ m}}{\partial \alpha} = -\frac{2}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} +$$

$$+2\left(k_1\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta} + k_2\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) + \frac{1}{B}\frac{\partial \varphi_1^{\circ m}}{\partial \beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial \varphi_2^{\circ m}}{\partial \alpha}, \tag{6.16}$$

$$\eta_1^m = k_1\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(I_1^{\circ m} + k_1\varphi_1^{\circ m}\right),$$

$$\eta_2^m = k_2\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{1}{2B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(I_2^{\circ m} + k_2\varphi_2^{\circ m}\right),$$

$$\nu^m = (k_1 + k_2)\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{2B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[I_1^{\circ m} - (k_1 - 2k_2)\varphi_1^{\circ m}\right] -$$

$$-\frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[I_2^{\circ m} - (k_2 - 2k_1)\varphi_2^{\circ m}\right], \tag{6.17}$$

$$\theta_1^m = -\frac{1}{6A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\chi_1^{\circ m} - 2k_1 I_1^{\circ m}\right), \qquad \theta_2^m = -\frac{1}{6B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\chi_2^{\circ m} - 2k_2 I_2^m\right),$$

$$\lambda^m = -\frac{1}{6B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\chi_1^{\circ m} + (k_1 - 3k_2)\, I_1^{\circ m}\right] -$$

$$-\frac{1}{6A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\chi_2^{\circ m} + (k_2 - 3k_1)\, I_2^{\circ m}\right], \tag{6.18}$$

$$\xi_1^m = k_1\frac{1}{8A}\frac{\partial \chi_1^{\circ m}}{\partial \alpha}, \qquad \xi_2^m = k_2\frac{1}{8B}\frac{\partial \chi_2^{\circ m}}{\partial \beta},$$

$$\zeta^m = (4k_2 - k_1)\frac{1}{24B}\frac{\partial \chi_1^{\circ m}}{\partial \beta} + (4k_1 - k_2)\frac{1}{24A}\frac{\partial \chi_2^{\circ m}}{\partial \alpha} \tag{6.19}$$

Рассматривая разложения (6.14) замечаем, что они похожи на аналогичные разложения, использованные в работе [2], однако, как нетрудно заметить, здесь мы имеем лишь внешнее сходство. Дело в том, что в цитированной работе [2] при определении деформаций $e^m_{\alpha\alpha}$, $e^m_{\beta\beta}$ и $e^m_{\alpha\beta}$ пользуются рядами по степеням γ, одновременно сохраняя гипотезу недеформируемых нормалей [2, 3]. В настоящей же работе соотношения (6.14) получаются в силу исходных гипотез поставленной задачи.

Укажем также, что, как и в п°3; при определении $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и τ принято условие нерастяжимости координатной поверхности оболочки [2, 3, 10].

На основании (6.14) из обобщенного закона Гука (2.5) для расчетных напряжений в m-ом слое оболочки получим

$$\sigma^m_\alpha = (B^m_{11}\varepsilon_1 + B^m_{12}\varepsilon_2) + \gamma(B^m_{11}\varkappa^m_1 + B^m_{12}\varkappa_2) + \\ + \gamma^2(B^m_{11}\eta^m_1 + B^m_{12}\eta^m_2) + \gamma^3(B^m_{11}\theta^m_1 + B^m_{12}\theta^m_2) + \\ + \gamma^4(B^m_{11}\xi^m_1 + B^m_{12}\xi^m_2), \tag{6.20}$$

$$\sigma^m_\beta = (B^m_{22}\varepsilon_2 + B^m_{12}\varepsilon_1) + \gamma(B^m_{22}\varkappa^m_2 + B^m_{12}\varkappa^m_1) + \\ + \gamma^2(B^m_{22}\eta^m_2 + B^m_{12}\eta^m_1) + \gamma^3(B^m_{22}\theta^m_2 + B^m_{12}\theta^m_1) + \\ + \gamma^4(B^m_{22}\xi^m_2 + B^m_{12}\xi^m_1), \tag{6.21}$$

$$\tau^m_{\alpha\beta} = B^m_{66}(\omega^m + \gamma\tau^m + \gamma^2\nu^m + \gamma^3\lambda^m + \gamma^4\zeta^m). \tag{6.22}$$

Решая систему уравнений равновесия (2.1) относительно напряжений $\tau^m_{\alpha\gamma}$, $\tau^m_{\beta\gamma}$ и σ^m_γ, получим:

$$H^2_1 H_2 \tau^m_{\alpha\gamma} = -\int H_1 H_2 \frac{\partial\sigma^m_\alpha}{\partial\alpha}\,d\gamma - \int H^2_1 \frac{\partial\tau^m_{\alpha\beta}}{\partial\beta}\,d\gamma + C^m_1(\alpha, \beta),$$

$$H_1 H^2_2 \tau^m_{\beta\gamma} = -\int H_1 H_2 \frac{\partial\sigma^m_\beta}{\partial\beta}\,d\gamma - \int H^2_2 \frac{\partial\tau^m_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}\,d\gamma + C^m_2(\alpha, \beta),$$

$$H_1 H_2 \sigma^m_\gamma = Ak_1\int H_2\sigma^m_\alpha d\gamma + Bk_2\int H_1\sigma^m_\beta d\gamma - \\ - \int H_2 \frac{\partial\tau^m_{\alpha\gamma}}{\partial\alpha}\,d\gamma - \int H_1 \frac{\partial\tau^m_{\beta\gamma}}{\partial\beta}\,d\gamma + C^m_3(\alpha, \beta). \tag{6.23}$$

Входящие в эти формулы постоянные интегрирования $C^m_1(\alpha, \beta)$, $C^m_2(\alpha, \beta)$ и $C^m_3(\alpha, \beta)$ определяем из условий на поверхностях (2.7) и (2.8).

Произведя необходимые и очевидные преобразования в (6.23), при этом учитывая (6.15)—(6.22) и удовлетворяя условиям контакта двух слоев (2.9), получим следующую систему разрешающих уравнений задачи:

$$L_{11}(C_{ik}K_{ik})u + Q_{12}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} - \Big[L_{13}(D_{ik}K_{ik}) - N_{13}(D_{ik}E_{ik}) - \\ - Q_{13}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big]w = -X - \frac{1}{A}\frac{\partial T^*_1}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial T^*_{21}}{\partial\beta}, \tag{6.24a}$$

$$L_{22}(C_{ik}K_{ik})v + Q_{12}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} - \Big[L_{23}(D_{ik}K_{ik}) - N_{23}(D_{ik}E_{ik}) -$$

$$- Q_{23}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big]w = -Y - \frac{1}{B}\frac{\partial T_2^*}{\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial T_{12}^*}{\partial\alpha}. \tag{6.24б}$$

$$[L_{33}(D_{ik}) - 2F(K_{ik}) + N_{33}(D_{ik}K_{ik}E_{ik}) + Q_{33}]w - \Big[L_{13}(D_{ik}K_{ik}) -$$

$$- Q_{13}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big]u - \Big[L_{23}(D_{ik}K_{ik}) - Q_{23}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big]v = Z -$$

$$-(k_1T_1^* + k_2T_2^*) + \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 M_1^*}{\partial\alpha^2} + \frac{2}{AB}\frac{\partial^2 H^*}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 M_2^*}{\partial\beta^2}, \tag{6.24в}$$

где, кроме принятых обозначений, введены еще новые:

$$N_{13} = k_1(D_{11} + k_1E_{11})\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} + [k_2D_{12} +$$

$$+ (k_1 + k_2)(D_{66} + 2k_1E_{66}) + k_1k_2E_{12}]\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}, \tag{6.25}$$

$$N_{33} = k_1(k_1D_{11}K_{11} + k_2D_{12}K_{12})\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + k_2(k_2D_{22}K_{22} +$$

$$+ k_1D_{12}K_{12})\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - k_1E_{11}\frac{1}{A^4}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} - (k_1 + k_2)(E_{12} +$$

$$+ 2E_{66})\frac{1}{A^2B^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} - k_2E_{22}\frac{1}{B^4}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}, \tag{6.26}$$

$$N_{23} = k_2(D_{22} + k_2E_{22})\frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} + [k_1D_{12} +$$

$$+ (k_1 + k_2)(D_{66} + 2k_2E_{66}) + k_1k_2E_{12}]\frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}. \tag{6.27}$$

В этих формулах наряду с известными жесткостями (4.5) фигурируют также жесткости высшего порядка

$$E_{ik} = \frac{1}{4}(B_{ik}''\delta_2^4 - B_{ik}'\delta_1^4). \tag{6.28}$$

В правых частях уравнений системы (6.24) имеются известные величины ($T_1^* \cdots M_2^*$), которые определяются с помощью решения задачи слоистой оболочки, в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей, для всего пакета оболочки в целом. Указанные величины с точностью $k\gamma$ определяются следующими формулами:

$$T_1^* = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B_{11}''R_1'' - B_{11}'R_1') + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}(B_{12}''R_2'' - B_{12}R_2'),$$

$$T_2^* = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}(B_{22}''R_2'' - B_{22}'R_2') + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B_{12}''R_1'' - B_{12}'R_1'), \tag{6.29}$$

$$T_{12}^{*}=T_{21}^{*}=B_{66}^{''}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial R_{1}^{''}}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial R_{2}^{''}}{\partial\alpha}\right)-B_{66}^{'}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial R_{1}^{'}}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial R_{2}^{'}}{\partial\alpha}\right),$$

$$M_{1}^{*}=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B_{11}^{''}S_{1}^{''}+B_{11}^{'}S_{1}^{'}\right)+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(B_{12}^{''}S_{2}^{''}+B_{12}^{'}S_{2}^{'}\right),$$

$$M_{2}^{*}=\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(B_{22}^{''}S_{2}^{''}+B_{22}^{'}S_{2}^{'}\right)+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B_{12}^{''}S_{1}^{''}+B_{12}^{'}S_{1}^{'}\right), \tag{6.30}$$

$$H^{*}=B_{66}^{''}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial S_{1}^{''}}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial S_{2}^{''}}{\partial\alpha}\right)+B_{66}^{'}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial S_{1}^{'}}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial S_{2}^{'}}{\partial\alpha}\right).$$

где

$$R_{i}^{m}=\frac{\delta_{m}^{2}}{2}\varphi_{i}^{\circ m}-(-1)^{m}\frac{\delta_{m}^{3}}{6}\Gamma_{i}^{\circ m}-\frac{\delta_{m}^{4}}{24}\chi_{i}^{\circ m}, \tag{6.31}$$

$$S_{i}^{m}=\frac{\delta_{m}^{3}}{3}\varphi_{i}^{\circ m}-(-1)^{m}\frac{\delta_{m}^{4}}{8}\Gamma_{i}^{\circ m}-\frac{\delta_{m}^{5}}{30}\chi_{i}^{\circ m}. \tag{6.32}$$

Ограничиваясь точностью $k\gamma$ в расчетных формулах, для напряжений в m-ом слое оболочки получим

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^{m}&=\left(B_{11}^{m}\varepsilon_{1}+B_{12}^{m}\varepsilon_{2}\right)+\gamma\left(B_{11}^{m}\varkappa_{1}+B_{12}^{m}\varkappa_{2}\right)+\\&+B_{11}^{m}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\gamma\varphi_{1}^{\circ m}-\frac{\gamma^{2}}{2}\Gamma_{1}^{\circ m}-\frac{\gamma^{3}}{6}\chi_{1}^{\circ m}\right)+\\&+B_{12}^{m}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\gamma\varphi_{2}^{\circ m}-\frac{\gamma^{2}}{2}\Gamma_{2}^{\circ m}-\frac{\gamma^{3}}{6}\chi_{2}^{\circ m}\right),\end{aligned} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta}^{m}&=\left(B_{22}^{m}\varepsilon_{2}+B_{12}^{m}\varepsilon_{1}\right)+\gamma\left(B_{22}^{m}\varkappa_{2}+B_{12}^{m}\varkappa_{1}\right)+\\&+B_{22}^{m}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\gamma\varphi_{2}^{\circ m}-\frac{\gamma^{2}}{2}\Gamma_{2}^{\circ m}-\frac{\gamma^{3}}{6}\chi_{2}^{\circ m}\right)+\\&+B_{12}^{m}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\gamma\varphi_{1}^{\circ m}-\frac{\gamma^{2}}{2}\Gamma_{1}^{\circ m}-\frac{\gamma^{3}}{6}\chi_{1}^{\circ m}\right),\end{aligned} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\beta}^{m}&=B_{66}^{m}\omega+\gamma B_{66}^{m}\tau+B_{66}^{m}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\gamma\varphi_{1}^{\circ m}-\frac{\gamma^{2}}{2}\Gamma_{1}^{\circ m}-\right.\\&\left.-\frac{\gamma^{3}}{6}\chi_{1}^{\circ m}\right)+B_{66}^{m}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\gamma\varphi_{2}^{\circ m}-\frac{\gamma^{2}}{2}\Gamma_{2}^{\circ m}-\frac{\gamma^{3}}{6}\chi_{2}^{\circ m}\right).\end{aligned} \tag{6.35}$$

С такой же точностью для внутренних усилий имеем следующие расчетные формулы:

$$T_{1}=C_{11}\varepsilon_{1}+C_{12}\varepsilon_{2}+K_{11}\varkappa_{1}+K_{12}\varkappa_{2}+T_{1}^{*}, \tag{6.36}$$

$$T_{2}=C_{22}\varepsilon_{2}+C_{12}\varepsilon_{1}+K_{22}\varkappa_{2}+K_{12}\varkappa_{1}+T_{2}^{*}, \tag{6.37}$$

$$T_{12}=T_{21}=C_{66}\omega+K_{66}\tau+T_{12}^{*}. \tag{6.38}$$

$$M_1 = D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2 + K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2 + M_1^*, \tag{6.39}$$

$$M_2 = D_{22}\varkappa_2 + D_{12}\varkappa_1 + K_{22}\varepsilon_2 + K_{12}\varepsilon_1 + M_2^*, \tag{6.40}$$

$$H = D_{66}\tau + K_{66}\omega + H^*. \tag{6.41}$$

В случае „пологих" оболочек система разрешающих уравнений принимает следующий вид:

$$\left(C_{11}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + C_{66}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)u + (C_{12} + C_{66})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} -$$

$$-\left[E_1(K_{ik}) - (k_1C_{11} + k_2C_{12})\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}\right]w =$$

$$= -X - \frac{1}{A}\frac{\partial T_1^*}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial T_{21}^*}{\partial\beta}, \tag{6.42а}$$

$$\left(C_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + C_{66}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)v + (C_{12} + C_{66})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} -$$

$$-\left[E_2(K_{ik}) - (k_2C_{22} + k_1C_{12})\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right]w =$$

$$= -Y - \frac{1}{B}\frac{\partial T_2^*}{\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial T_{12}^*}{\partial\alpha}, \tag{6.42б}$$

$$[L_{33}(D_{ik}) - 2F(K_{ki}) + Q_{33}]w - \left[E_1(K_{ik}) - (k_1C_{11} + k_2C_{12})\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]u -$$

$$-\left[E_2(K_{ik}) - (k_2C_{22} + k_1C_{12})\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right]v = Z - (k_1T_1^* + k_2T_2^*) +$$

$$+\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 M_1^*}{\partial\alpha^2} + \frac{2}{AB}\frac{\partial^2 H^*}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 M_2^*}{\partial\beta^2}. \tag{6.42в}$$

В этом случае для расчетных величин остаются в силе формулы (6.33)—(6.41), однако при этом для изменений кривизны и кручения, как в (4.15), имеем

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}, \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}, \quad \tau = -\frac{2}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}. \tag{6.43}$$

Рассматривая полученные системы разрешающих уравнений (6.24) и (6.42) замечаем, что они своими левыми частями в основном совпадают с соответствующими левыми частями систем разрешающих уравнений (4.6) и (4.14), полученных на основании гипотезы недеформируемых нормалей, данной для всего пакета оболочки в целом. Дополнительные члены, уточняющие гипотезу недеформируемых нормалей, как и следовало ожидать, фигурируют в правых частях уравнений рассмотренных систем (6.24) и (6.42).

Здесь следует указать, что и в формулах расчетных величин (6.33) — (6.41) известные дополнительные члены (6.5) — (6.10), (6.29) — — (6.32) фигурируют в явной форме.

7. *Вариант теории при наличии измененной первой гипотезы.* Здесь изложим теорию расчета слоистой оболочки, имея в виду наличие первой измененной и второй гипотез (см. п° 1).

Рассматривая эти гипотезы замечаем, что в этом случае, по сути дела, для каждого слоя в отдельности принимается несколько расширенная гипотеза недеформируемых нормалей. Расширение гипотезы, что вполне естественно, заключается в том, что, в отличие от известной гипотезы недеформируемых нормалей ($e_{\alpha\gamma}=0$, $e_{\beta\gamma}=0$), здесь принимается, что в каждом слое $e_{\alpha\gamma}\neq 0$, $e_{\beta\gamma}\neq 0$. Вторая же гипотеза, которая пополняет первую, как было указано выше, подтверждается во всех задачах математической теории упругости, посвященных изгибу однородных или неоднородных балок и стержней.

В силу принятых гипотез, в отличие от (6.14), для деформаций имеем

$$e_{\alpha\alpha}^m=\varepsilon_1^m+\gamma\varkappa_1^m, \qquad e_{\beta\beta}^m=\varepsilon_2^m+\gamma\varkappa_2^m, \tag{7.1}$$

$$e_{\alpha\beta}^m=\omega^m+\gamma\tau^m.$$

Из (6.3), (6.12) и (6.14), подставляя значения u_γ^m, u_α^m и u_β^m в (2.3) и полученные при этом значения деформаций $e_{\alpha\alpha}^m$, $e_{\beta\beta}^m$ и $e_{\alpha\beta}^m$ сравнивая с (7.1), для коэффициентов разложения получим

$$\varepsilon_1^m=\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+k_1w, \qquad \varepsilon_2^m=\varepsilon_2=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+k_2w,$$

$$\omega^m=\omega=\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha}, \tag{7.2}$$

$$\varkappa_1^m=-\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+k_1\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1^{\circ m}}{\partial\alpha},$$

$$\varkappa_2^m=-\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+k_2\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2^{\circ m}}{\partial\beta},$$

$$\tau^m=-\frac{2}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}+2\left(k_1\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\right.$$

$$\left.+k_2\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1^{\circ m}}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2^{\circ m}}{\partial\alpha}, \tag{7.3}$$

которые совершенно не отличаются от соответствующих значений (6.15), (6.16). Что касается остальных коэффициентов разложения (6.17), (6.18) и (6.19), то они в этом варианте равны нулю.

Учитывая изложенное выше, из (6.33), (6.34) и (6.35) для напряжений в m-ом слое оболочки получим

$$\sigma_{\alpha}^{m} = (B_{11}^{m}\varepsilon_1 + B_{12}^{m}\varepsilon_2) + \gamma(B_{11}^{m}\varkappa_1 + B_{12}^{m}\varkappa_2) +$$

$$+ \gamma\left(B_{11}^{m}\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1^{\circ m}}{\partial\alpha} + B_{12}^{m}\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2^{\circ m}}{\partial\beta}\right), \tag{7.4}$$

$$\sigma_{\beta}^{m} = (B_{22}^{m}\varepsilon_2 + B_{12}^{m}\varepsilon_1) + \gamma(B_{22}^{m}\varkappa_2 + B_{12}^{m}\varkappa_1) +$$

$$+ \gamma\left(B_{22}^{m}\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2^{\circ m}}{\partial\beta} + B_{12}^{m}\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1^{\circ m}}{\partial\alpha}\right), \tag{7.5}$$

$$\tau_{\alpha\beta}^{m} = B_{66}^{m}\omega + \gamma B_{66}^{m}\tau + \gamma B_{66}^{m}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1^{\circ m}}{\partial\beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2^{\circ m}}{\partial\alpha}\right). \tag{7.6}$$

Формулы внутренних усилий (6.36) — (6.41) остаются без изменений, однако в случае рассматриваемого варианта дополнительные члены $T_1^* \cdots H^*$ имеют следующий вид:

$$T_1^* = \frac{\delta_2^2}{2}\left(B_{11}''\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1''^{\circ}}{\partial\alpha} + B_{12}''\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2''^{\circ}}{\partial\beta}\right) -$$

$$- \frac{\delta_1^2}{2}\left(B_{11}'\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1'^{\circ}}{\partial\alpha} + B_{12}'\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2'^{\circ}}{\partial\beta}\right), \tag{7.7}$$

$$T_2^* = \frac{\delta_2^2}{2}\left(B_{22}''\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2''^{\circ}}{\partial\beta} + B_{12}''\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1''^{\circ}}{\partial\alpha}\right) -$$

$$- \frac{\delta_1^2}{2}\left(B_{22}'\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2'^{\circ}}{\partial\beta} + B_{12}'\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1'^{\circ}}{\partial\alpha}\right), \tag{7.8}$$

$$T_{12}^* = T_{21}^* - \frac{\delta_2^2}{2}B_{66}''\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1''^{\circ}}{\partial\beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2''^{\circ}}{\partial\alpha}\right) -$$

$$- \frac{\delta_1^2}{2}B_{66}'\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1'^{\circ}}{\partial\beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2'^{\circ}}{\partial\alpha}\right), \tag{7.9}$$

$$M_1^* = \frac{\delta_2^3}{3}\left(B_{11}''\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1''^{\circ}}{\partial\alpha} + B_{12}''\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2''^{\circ}}{\partial\beta}\right) +$$

$$+ \frac{\delta_1^3}{3}\left(B_{11}'\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1'^{\circ}}{\partial\alpha} + B_{12}'\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2'^{\circ}}{\partial\beta}\right), \tag{7.10}$$

$$M_2^* = \frac{\delta_2^3}{3}\left(B_{22}''\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2''^{\circ}}{\partial\beta} + B_{12}''\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1''^{\circ}}{\partial\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{\delta_1^3}{3}\left(B_{22}'\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2'^{\circ}}{\partial\beta} + B_{12}'\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1'^{\circ}}{\partial\alpha}\right), \tag{7.11}$$

$$H^* = \frac{\delta_2^3}{3}B_{66}''\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1''^{\circ}}{\partial\beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2''^{\circ}}{\partial\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{\delta_1^3}{3}B_{66}'\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1'^{\circ}}{\partial\beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2'^{\circ}}{\partial\alpha}\right). \tag{7.12}$$

Система разрешающих уравнений (6.42) остается без изменений, а в системе (6.24) операторы $N_{13}(D_{ik}E_{ik})$, $N_{23}(D_{ik}E_{ik})$ и $N_{33}(D_{ik}E_{ik}K_{ik})$ равны нулю.

8. *Пример расчета.* Для иллюстрации хода расчета по предлагаемым теориям приводим один элементарный пример, который решаем с помощью второго варианта теории (см. п° 7). Квадратная ($a=b$) двухслойная ($\delta_1=\delta_2=\delta$) пластинка свободно оперта по всему контуру и несет распределенную нагрузку

$$Z=q_0\sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}\cdot$$

Имеем:

а) для нижнего (первого) слоя

$$B_{11}'=B_{22}'=nE,\quad B_{55}'=B_{44}',\quad B_{12}'=B_{66}'=0,\quad \frac{B_{11}'}{B_{55}'}=\frac{B_{22}'}{B_{44}'}=k;$$

б) для верхнего (второго) слоя

$$B_{11}''=B_{22}''=E,\quad B_{55}''=B_{44}'',\quad B_{12}''=B_{66}''=0,\quad \frac{B_{11}''}{B_{55}''}=\frac{B_{22}''}{B_{44}''}=k.$$

На основании приведенного из (4.5) для жесткостей имеем:

$$C=C_{11}=C_{22}=\delta E(1+n),\qquad C_{12}=C_{66}=0,$$

$$K=K_{11}=K_{22}=\frac{\delta^2}{2}E(1-n),\qquad K_{12}=K_{66}=0,$$

$$D=D_{11}=D_{22}=\frac{\delta^3}{3}E(1+n),\qquad D_{12}=D_{66}=0.$$

Основная система разрешающих уравнений (6.42) для рассматриваемой задачи ($A=B=1$) имеет вид

$$C\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-K\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}=-\frac{\partial T_1^*}{\partial\alpha},\qquad C\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}-K\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}=-\frac{\partial T_2^*}{\partial\beta},$$

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}\right)-K\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\alpha^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial\beta^3}\right)=Z+\frac{\partial^2 M_2^*}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2 M_1^*}{\partial\alpha^2}.$$

Эта система после элементарных преобразований принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}=\frac{Z}{G}+\frac{1}{G}\left[\frac{\partial^2 M_1^*}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 M_2^*}{\partial\beta^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{K}{C}\left(\frac{\partial^2 T_1^*}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 T_2^*}{\partial\beta^2}\right)\right],\tag{A}$$

где

$$G=D-\frac{K^2}{C}=E\delta^3\frac{1+14n+n^2}{12(1+n)}.$$

$M_1^*\cdots T_2^*$, входящие в (А), определяются с помощью формул (7.7)—(7.11). Для φ_i^m, входящих в эти формулы, из (6.5)—(6.10) имеем

$$\varphi_1'^{\circ} = -k\delta\left(\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial\alpha^2} + \frac{\delta}{2}\frac{\partial^3 w^\circ}{\partial\alpha^3}\right),$$

$$\varphi_2'^{\circ} = -k\delta\left(\frac{\partial^2 v^\circ}{\partial\beta^2} + \frac{\delta}{2}\frac{\partial^3 w^\circ}{\partial\beta^3}\right),$$

$$\varphi_1''^{\circ} = k\delta\left(\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial\alpha^2} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial^3 w^\circ}{\partial\alpha^3}\right),$$

$$\varphi_2''^{\circ} = k\delta\left(\frac{\partial^2 v^\circ}{\partial\beta^2} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial^3 w^\circ}{\partial\beta^3}\right),$$

Перемещения u°, v°, w° определяются из вспомогательной системы дифференциальных уравнений (4.14), которая имеет следующий вид:

$$C\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial\alpha^2} - K\frac{\partial^3 w^\circ}{\partial\alpha^3} = 0, \qquad C\frac{\partial^2 v^\circ}{\partial\beta^2} - K\frac{\partial^3 w^\circ}{\partial\beta^3} = 0,$$

$$D\left(\frac{\partial^4 w^\circ}{\partial\alpha^4} + \frac{\partial^4 w^\circ}{\partial\beta^4}\right) - K\left(\frac{\partial^3 u^\circ}{\partial\alpha^3} + \frac{\partial^3 v^\circ}{\partial\beta^3}\right) = Z.$$

Эта система, аналогично основной системе, тоже приводится к одному уравнению

$$\frac{\partial^4 w^\circ}{\partial\alpha^4} + \frac{\partial^4 w^\circ}{\partial\beta^4} = \frac{Z}{G}. \tag{B}$$

На основании вспомогательной системы для $\varphi_i^{\circ m}$ получим

$$\varphi_1'^{\circ} = -k\frac{\delta^2}{1+n}\frac{\partial^3 w^\circ}{\partial\alpha^3}, \qquad \varphi_2'^{\circ} = -k\frac{\delta^2}{1+n}\frac{\partial^3 w^\circ}{\partial\beta^3},$$

$$\varphi_1''^{\circ} = -k\frac{\delta^2 n}{1+n}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}, \qquad \varphi_2''^{\circ} = -k\frac{\delta^2 n}{1+n}\frac{\partial^3 w^\circ}{\partial\beta^3}.$$

Подставляя значения $\varphi_i^{\circ m}$ в (7.7) — (7.11), получим

$$T_1^* = 0, \qquad M_1^* = -kE\frac{2}{3}\delta^5\frac{n}{1+n}\frac{\partial^4 w^\circ}{\partial\alpha^4},$$

$$T_2^* = 0, \qquad M_2^* = -kE\frac{2}{3}\delta^5\frac{n}{1+n}\frac{\partial^4 w^\circ}{\partial\beta^4}.$$

Подставляя значения $T_1^*\cdots M_1^*$ в уравнение (А), окончательно получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} = \frac{Z}{G} - \frac{8nk\delta^2}{1+14n+n^2}\left(\frac{\partial^6 w^\circ}{\partial\alpha^6} + \frac{\partial^6 w^\circ}{\partial\beta^6}\right). \tag{C}$$

Для решения основного уравнения (С) необходимо знать значение w°, которое легко определяется из уравнения (В).

Решение уравнения (B) ищем в следующей форме:

$$w^\circ = H^\circ \sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}.$$

Как известно [2], это w° удовлетворяет условиям свободного опирания.

Подставляя значения w° и Z в уравнение (B), для H° получим

$$H^\circ = \frac{6q_0 a^4}{\pi^4 E\delta^3}\,\frac{1+n}{1+14n+n^2}$$

и окончательно для w° имеем

$$w^\circ = \frac{6q_0 a^4}{\pi^4 E\delta^3}\,\frac{1+n}{1+14n+n^2}\sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}.$$

Подставляя значение w° в уравнение (C), получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} = \frac{12(1+n)}{E\delta^3(1+14n+n^2)}\Bigg[Z + \frac{8q_0 nk\pi^2}{1+14n+n^2}\,\frac{\delta^2}{a^2}\sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}\Bigg]. \tag{D}$$

Решение этого уравнения, как и раньше, ищем в форме

$$w = H\sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}.$$

Подставляя значения w и Z в уравнение (D), для H получим

$$H = \frac{6q_0 a^4(1+n)}{\pi^4 E\delta^3(1+14n+n^2)}\left[1+\frac{8nk\pi^2}{1+14n+n^2}\,\frac{\delta^2}{a^2}\right]$$

и окончательно для w получим

$$w = w^\circ\left[1+\frac{8\pi^2 n}{1+14n+n^2}\,k\,\frac{\delta^2}{a^2}\right].$$

Рассматривая окончательное выражение w, замечаем, что второй член в скобках представляет поправку к гипотезе недеформируемых нормалей. Рассматривая поправку, замечаем, что она существенным образом зависит от относительной толщины пластинки $\left(\frac{\delta}{a}\right)$ и от отношения модуля упругости к модулю сдвига k. Она зависит также от отношения модулей упругости двух слоев (n). Безусловно, эта поправка зависит также от коэффициентов Пуассона, однако в рассмотренном примере это не видно, так как сначала же было принято, что коэффициенты Пуассона равны нулю.

Для наглядности приводим некоторые цифровые значения поправки в случае однородной ($n=1$), изотропной ($k=2$) и анизотропной ($k>2$) пластинок.

Имея значения w и w^0, нетрудно найти остальные расчетные величины задачи, однако на этом не останавливаемся, так как нашей целью была лишь иллюстрация хода расчета.

k	$\frac{\delta}{a}=\frac{1}{6}$	$\frac{\delta}{a}=\frac{1}{10}$	$\frac{\delta}{a}=\frac{1}{20}$	$\frac{\delta}{a}=\frac{1}{40}$
2	0,27	0,10	0,025	0,006
5	0,68	0,25	0,063	0,016
10	1,36	0,50	0,13	0,033
15	2,04	0,75	0,19	0,050

9. *Заключение.* В заключение отметим, что пределы применимости предлагаемых здесь теорий значительно шире пределов применимости теории, построенной на базе гипотезы недеформируемых нормалей.

Дело в том, что принятые здесь предположения о деформациях $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ значительно ближе к действительности, чем условия $e_{\alpha\gamma}=0$ и $e_{\beta\gamma}=0$, в особенности при малых значениях $G_{\alpha\gamma}$ и $G_{\beta\gamma}$, что имеет место во многих анизотропных материалах.

Следует отметить также, что, в отличие от теории построенной на базе гипотезы недеформируемых нормалей, точность предлагаемых теорий в значительной степени зависит не только от относительной толщины оболочки (δk_i), но и от отношений $\frac{B_{ik}}{B_{44}}$ и $\frac{B_{ik}}{B_{55}}$.

Укажем, что здесь, по сути дела, имеем последующее приближение, которое уточняет гипотезу недеформируемых нормалей.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 28 XI 1956

Ս. Ա. Համբարձումյան

ԵՐԿՇԵՐՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ԵՐԿՈՒ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ տրվում են երկշերտ օրթոտրոպ թաղանթների հաշվման երկու նոր տեսություն, որոնք, ի տարբերություն գոյություն ունեցող տեսությունների, չեն ընդունում դեֆորմացիայի չենթարկվող նորմալների հիպոթեզը։

Այս աշխատության հիմքում դրված են հետևյալ ընդունելությունները՝

ա) Թաղանթի միջին մակերևույթին նորմալ գծային էլեմենտները դեֆորմացիայից հետո չեն փոխում իրենց երկարությունը։

բ) Սահքի $e_{\alpha\gamma}$ և $e_{\beta\gamma}$ դեֆորմացիաները որոշելու ժամանակ ընդուն-

վում է, որ $\tau_{\alpha\gamma}$ և $\tau_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները չեն տարբերվում դեֆորմացիայի չենթարկվող նորմալների հիպոթեզի կիրառման ժամանակ ստացվող, համապատասխան շոշափող լարումներից։

Աշխատության մեջ բերվում է նաև երկրորդ, մոտավոր տեսությունը, որի կառուցման ժամանակ ընդունվում է բ) ընդունելությունը, իսկ ա) ընդունելությունը ձևափոխվում է այսպես՝ թաղանթի միջին մակերևույթին նորմալ, գծային էլեմենտները դեֆորմացիայից հետո մնում են գծային և չեն փոխում իրենց երկարությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* К расчету пологих оболочек. ПММ, XI, 5 (1947).
2. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат (1949).
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат (1953).
4. *Амбарцумян С. А.* Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки. ДАН АрмССР, VIII, 5 (1948).
5. *Амбарцумян С. А.* Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев. Известия АН АрмССР, IV, 5 (1951).
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. АН СССР (1949).
7. *Ерохин И. П.* Исследование напряженного состояния в балках, составленных из материалов с разными модулями упругости. Труды ЛИИПС, 5 (1938).
8. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат (1947).
9. *Григолюк Э. И.* О прочности и устойчивости цилиндрических биметаллических оболочек. Инж. сборник, XVI (1953).
10. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Судпромгиз (1951).
11. *Лурье А. И.* Статика тонкостенных оболочек. Гостехиздат (1947).
12. *Амбарцумян С. А.* К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР (серия ФМЕ и Т наук), VI, 3 (1953).
13. *Панов Д. Ю.* Об устойчивости биметаллических оболочек при нагреве. ПММ, XI, 6 (1947).
14. *Амбарцумян С. А.* К вопросу построения приближенных теорий расчета пологих цилиндрических оболочек. ПММ, XVIII, 3 (1954).