ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 1, 1957 Физико-математические науки

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. Х. Арутюнян, М. М. Джрбашян, Р. А. Александрян

Об одном методе решения гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную

Известно, что ряд задач математической физики, как, например, задача о распространении звуковых волн в поступательно движущемся потоке жидкости, а также в пористой среде, или же задача о продольных колебаниях упругих стержней при наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости деформаций, приводится к интегрированию гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную, т. е. уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}, \tag{1}$$

где a — постоянная.

В настоящей заметке приводится решение так называемой смешанной задачи для уравнения (1), которая состоит в отыскании функции $u(x, t)$ в области $t>0$, $0<x<l$, которая удовлетворяет уравнению (1) и следующим начальным и краевым условиям:

$$u\Big|_{t=0}=f(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x), \tag{2}$$

$$u(0,\ t)=u(l,\ t)=0. \tag{3}$$

Применение метода, близкого к методу Фурье для решения этой задачи, порождает некоторую краевую задачу на собственные значения, причем собственные функции оказываются не ортогональными в обычном смысле, но обладают некоторым свойством, которое естественно называть обобщенной ортогональностью.

Это свойство аналогично интересному свойству, впервые обнаруженному А. Ф. Папковичем [1] для уравнения четвертого порядка, и позволяет из начальных условий (2) определить единственным образом оставшиеся неопределенными коэффициенты разложений совершенно так же, как в классическом случае уравнения колебания струны.

Отметим также, что построения П. Ф. Папковича, основанные на возможности одновременного разложения двух произвольных функций в специальные ряды по собственным функциям, были затем обоснованы в работе Г. А. Гринберга [2].

В первой части настоящей заметки приводится формальное построение решения смешанной задачи (1), (2), (3) в предположении, что соответствующие разложения по системе собственных функций справедливы, а во второй части доказывается, что при определенных условиях, налагаемых на начальные функции $f(x)$ и $g(x)$, указанные разложения справедливы, и построенное в виде ряда формальное решение является действительным решением поставленной задачи.

1°. *Построение решения*. Ищем решение смешанной задачи (1), (2), (3), формально, в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{(k)} a_k e^{i\lambda_k t} \varphi_k(x), \tag{4}$$

где система функций $\{\varphi_k(x)\}$, последовательность чисел $\{\lambda_k\}$ и коэффициенты $\{a_k\}$ подлежат определению.

Легко видеть, что если система функций $\{\varphi_k(x)\}$ и последовательность чисел $\{\lambda_k\}$ суть соответственно собственные функции и собственные числа следующей граничной задачи

$$y'' - 2ai\lambda y' + \lambda^2 y = 0, \tag{5}$$

$$y(0) = y(l) = 0, \tag{6}$$

то ряд (4) формально удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (3) при произвольных комплексных значениях коэффициентов $\{a_k\}$.

Вся совокупность собственных чисел и собственных функций граничной задачи (5), (6) может быть выписана в явном виде, а именно:

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l\sqrt{1 + a^2}}; \tag{7}$$

$$\varphi_k(x) = e^{ia\lambda_k x} \sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{e^{ir_1\lambda_k x} - e^{-ir_2\lambda_k x}}{2i}, \tag{8}$$

где $k = \pm 1, \pm 2, \cdots$,

$$r_1 = \sqrt{1 + a^2} + a, \qquad r_2 = \sqrt{1 + a^2} - a.$$

Таким образом, для формального построения решения задачи (1), (2), (3) остается лишь выбрать коэффициенты $\{a_k\}$ так, чтобы ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t} \varphi_k(x), \tag{4'}$$

где последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\varphi_k(x)\}$ определены по формулам (7) и (8), удовлетворял также и начальным условиям (2). С этой целью покажем сначала, что система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\int_0^l \varphi_n(x)\{(\lambda_k+\lambda_n)\overline{\varphi_k(x)}+2ai\overline{\varphi_k'(x)}\}dx=\begin{cases}0, & k\neq n,\\ \pi\sqrt{1+a^2}n, & k=n,\end{cases} \tag{9}$$

при $k, n=\pm 1, \pm 2, \cdots$

Свойство системы $\{\varphi_k(x)\}$, выражаемое интегральным соотношением (9), естественно называть обобщенной ортогональностью.

Для доказательства первой формулы (9) заметим, что из определения собственных функций следует, что имеют место тождества:

$$\varphi_n''(x)-2ai\lambda_n\varphi_n'(x)+\lambda_n^2\varphi_n(x)=0, \tag{10}$$

$$\overline{\varphi_k''(x)}+2ai\lambda_k\overline{\varphi_k'(x)}+\lambda_k^2\overline{\varphi_k(x)}=0, \tag{10'}$$

при $n, k=\pm 1, \pm 2, \cdots$

Умножая (10) на $\overline{\varphi_k(x)}$, (10′) на $\varphi_n(x)$, вычитая первый результат из второго, интегрируя полученное тождество от 0 до l и, наконец, преобразуя некоторые слагаемые интегрированием по частям при учете граничных условий (6), легко получим

$$(\lambda_k-\lambda_n)\int_0^l \varphi_n(x)[(\lambda_n+\lambda_k)\overline{\varphi_k(x)}+2ai\overline{\varphi_k'(x)}]\,dx=0. \tag{11}$$

Из (11) немедленно следует первая из формул (9).

Далее, из (8) имеем

$$2\lambda_n\overline{\varphi_n(x)}+2ai\overline{\varphi_n'(x)}=$$

$$=2\lambda_n(1+a^2)e^{-i\lambda_n x}\sin\frac{\pi nx}{l}+\frac{2\pi ani}{l}e^{-i\lambda_n x}\cos\frac{\pi nx}{l},$$

откуда получим

$$\int_0^l \varphi_n(x)[2\lambda_n\overline{\varphi_n(x)}+2ai\overline{\varphi_n'(x)}]dx=$$

$$=2\lambda_n(1+a^2)\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx+\frac{in\pi a}{l}\int_0^l \sin\frac{2\pi nx}{l}dx=$$

$$=\lambda_n(1+a^2)l=\pi n\sqrt{1+a^2},$$

т. е. вторую из формул (9).

Теперь покажем, что, пользуясь формулами (9) обобщенной ортогональности, мы можем определить коэффициенты $\{a_k\}$ в (4′) так, чтобы функция $u(x, t)$ удовлетворяла также начальным условиям (2).

В самом деле, из (4′) следует, что начальные условия (2) формально удовлетворяются, если имеют место одновременные разложения

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{12}$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\lambda_n a_n \varphi_n(x) \tag{12'}$$

на интервале $(0, l)$.

Полагая, пока лишь формально, что разложения вида (12) и (12′) возможны, покажем, что при равномерной сходимости обоих рядов на отрезке $[0, l]$ коэффициенты $\{a_n\}$ определяются единственным образом через функции $f(x)$ и $g(x)$.

В самом деле, из (12) и (12′) непосредственно следует

$$f(x)[\lambda_k \overline{\varphi_k(x)} + 2ai\overline{\varphi_k'(x)}] - ig(x)\overline{\varphi_k(x)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi_n(x)[(\lambda_n + \lambda_k)\overline{\varphi_k(x)} + 2ai\overline{\varphi_k'(x)}], \tag{13}$$

где $k = \pm 1, \pm 2, \cdots$

Интегрируя (13) и принимая во внимание формулы (9), получим

$$a_k = \frac{1}{\pi k \sqrt{1+a^2}} \int_0^l \{f(t)[\lambda_k \overline{\varphi_k(t)} + 2ai\overline{\varphi_k'(t)}] - ig(t)\overline{\varphi_k(t)}\} dt, \tag{14}$$

$$(k = \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Теперь очевидно, что если в ряде (4′) числа $\{\lambda_k\}$, функции $\{\varphi_k(x)\}$ и коэффициенты $\{a_k\}$ определяются соответственно по формулам (7), (8), (14), то его сумма $u(x, t)$ формально удовлетворяет уравнению (1), граничным условиям (3) и начальным условиям (2).

В следующем пункте доказывается законность вышеприведенных формальных построений.

2°. *Обоснование метода.* В этом пункте сначала докажем, что если $f(x)$ и $g(x)$ суть независимые друг от друга достаточно гладкие функции, то одновременные разложения (12) и (12′) действительно возможны.

Теорема. *Пусть $f(x)$—дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0, l]$, удовлетворяющая граничным условиям (3), а функция $g(x)$ лишь непрерывно дифференцируема на том же отрезке.*

Если в рядах (12) и (12′) коэффициенты $\{a_k\}$ определены по формулам (14), то ряды эти сходятся, притом равномерно в любом подинтервале, а их суммы равны соответственно $f(x)$ и $g(x)$.

Доказательство. Введем обозначения

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \varphi_k(x); \qquad T_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} i\lambda_k a_k \varphi_k(x);$$

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi k\sqrt{1+a^2}}\int_0^l f(t)\,[\lambda_k\overline{\varphi_k(t)}+2ai\overline{\varphi_k'(t)}]dt; \tag{15}$$

$$a_k(g)=\frac{1}{\pi ki\sqrt{1+a^2}}\int_0^l g(t)\overline{\varphi_k(t)}\,dt; \tag{16}$$

$$S_N(x,f)=\sum_{k=-N}^{N}a_k(f)\,\varphi_k(x);\quad S_N(x,\ g)=\sum_{k=-N}^{N}a_k(g)\,\varphi_k(x);$$

$$T_N(x,f)=\sum_{k=-N}^{N}i\lambda_k a_k(f)\,\varphi_k(x);\quad T_N(x,\ g)=\sum_{k=-N}^{N}i\lambda_k a_k(g)\,\varphi_k(x).$$

Очевидно, что

$$a_k=a_k(f)+a_k(g);\quad S_N(x)=S_N(x,\ f)+S_N(x,\ g);$$
$$T_N(x)=T_N(x,\ f)+T_N(x,\ g),$$

и теорема будет доказана, если мы покажем, что при сделанных в теореме предположениях относительно функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{N\to\infty}S_N(x,f)=f(x);\qquad \lim_{N\to\infty}S_N(x,\ g)=0; \tag{17}$$

$$\lim_{N\to\infty}T_N(x,g)=g(x);\qquad \lim_{N\to\infty}T_N(x,f)=0; \tag{17'}$$

при этом равномерно внутри отрезка $[0,\ l]$.

Положим в дальнейшем $l=\pi$, что, разумеется, не ограничивает общности. Подставляя значение $a_k(f)$ в $S_N(x,\ f)$ и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$S_N(x,f)=\frac{1}{\pi(1+a^2)}\int_0^\pi f(t)\left\{\sum_{k=-N}^{N}\varphi_k(x)\frac{\lambda_k\overline{\varphi_k(t)}+2ai\overline{\varphi_k'(t)}}{k}\right\}dt.$$

Подставляя здесь выражение для $\varphi_k(t)$ через показательные функции и проделав элементарные преобразования, будем иметь

$$S_N(x,f)=\frac{1}{4\pi(1+a^2)}\int_0^\pi f(t)\left\{(1+2ar_1)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}+\right.$$

$$+(1-2ar_2)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_2(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}-$$

$$
-(1+2ar_1)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1t+r_2x}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_1t+r_2x}{2\sqrt{1+a^2}}}-
$$

$$
-(1-2ar_2)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1x+r_2t}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_1x+r_2t}{2\sqrt{1+a^2}}}\Bigg\}dt.
$$

Заметим теперь, что при фиксированном $x\in(0,\pi)$ выражения r_2x+r_1t и r_1x+r_2t не обращаются в нуль ни при одном значении t из промежутка $[0,\pi]$; поэтому, в силу теоремы Римана—Лебега, при $N\to\infty$ получим

$$
S_N(x,f)=\frac{1}{4\pi(1+a^2)}\int_0^\pi f(t)\Bigg\{(1+2ar_1)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}+
$$

$$
+(1-2ar_2)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}\Bigg\}dt+o(1), \tag{18}
$$

притом равномерно относительно x в любом отрезке, лежащем внутри $(0,\pi)$.

Еще раз применив теорему Римана — Лебега, мы можем в формуле (18) заменить выражения

$$
\sin\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}},\quad \sin\frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}
$$

через

$$
\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}},\qquad \frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}};
$$

тогда получим при $N\to+\infty$

$$
S_N(x,f)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1+a^2}}\int_0^\pi f(t)\Bigg\{\left(\frac{1}{r_1}+2a\right)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}{x-t}+
$$

$$
+\left(\frac{1}{r_2}-2a\right)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}{x-t}\Bigg\}dt+o(1)
$$

равномерно относительно x в любом отрезке, лежащем внутри $(0,\pi)$.

Но по условию $f'(t)$ непрерывна; поэтому по известной теореме теории рядов Фурье будем иметь

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x, f) = \frac{1}{2\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) f(x) = f(x),$$

при этом равномерно внутри $(0, \pi)$, т. е. первое из соотношений (17) доказано.

Докажем теперь первое из соотношений (17′). Принимая во внимание (16), меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь

$$T_N(x, g) = \frac{1}{\pi(1+a^2)}\int_0^\pi g(t)\left\{\sum_{k=-N}^{N} \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}\right\} dt$$

или, подставляя выражения φ_k через показательные функции и проделав элементарные преобразования, получим

$$T_N(x, g) = \frac{1}{4\pi(1+a^2)}\int_0^\pi g(t)\left\{\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_2(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}\right\} dt + o(1), \quad N\to\infty,$$

где мы уже воспользовались сделанным выше замечанием и теоремой Римана — Лебега. Далее, заменив опять знаменатели ядер через соответствующие аргументы, получим

$$T_N(x, g) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+a^2}}\int_0^\pi g(t)\left\{\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{x-t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_2}\cdot\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_2(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{x-t}\right\} dt + o(1), \quad N\to\infty. \tag{19}$$

Из (19), в силу непрерывности $g'(t)$, будем иметь:

$$\lim_{N\to\infty} T_N(x, g) = \frac{1}{2\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) g(x) = g(x),$$

притом равномерно внутри $(0, \pi)$, т. е. первое из соотношений (17′) также доказано.

Для доказательства вторых соотношений из (17) и (17′) преобразуем выражения коэффициентов $a_k(f)$ и $a_k(g)$ путем интегрирования по частям.

Пусть $G'(x) \equiv g(x)$; тогда легко видеть, что

$$a_k(g) = \frac{1}{\pi k i \sqrt{1+a^2}} \int_0^{\pi} \overline{\varphi_k(t)} dG(t) = -\frac{1}{\pi k i \sqrt{1+a^2}} \int_0^{\pi} G(t) \overline{\varphi_k'(t)}\, dt.$$

Наконец, пользуясь тождеством (10') и тем, что по условию теоремы $f(x)$ исчезает на концах промежутка, будем иметь:

$$a_k(f) = -\frac{1}{\pi k^2} \int_0^{\pi} f(t) \overline{\varphi_k''(t)}\, dt = \frac{1}{\pi k^2} \int_0^{\pi} f'(t) \overline{\varphi_k'(t)}\, dt.$$

Подставляя теперь эти выражения $a_k(g)$ и $a_k(f)$ соответственно в $S_N(x, g)$ и $T_N(x, f)$, получим

$$S_N(x, g) = \frac{i}{\pi \sqrt{1+a^2}} \int_0^{\pi} G(t) \left\{ \sum_{k=-N}^{N} \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k'(t)}}{k} \right\} dt, \tag{20}$$

$$T_N(x, f) = \frac{i}{\pi \sqrt{1+a^2}} \int_0^{\pi} f'(t) \left\{ \sum_{k=-N}^{N} \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k'(t)}}{k} \right\} dt. \tag{21}$$

Таким образом, интеграл (21) получается из интеграла (20) заменой функции $G(t)$ на $f'(t)$; поэтому нам достаточно доказать лишь, что $\lim\limits_{N \to \infty} S_N(x, g) = 0$.

Подставляя значение функции в (20), получим

$$S_N(x, g) = \frac{1}{4\pi(1+a^2)} \int_0^{\pi} G(t) \left\{ r_1 \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}} - \right.$$

$$\left. - r_2 \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_2(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_2(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}} \right\} dt + 0(1), \quad N \to \infty,$$

применяя теорему Римана — Лебега. Далее, поступив так же, как и выше, получим

$$\lim_{N \to \infty} S_N(x, g) = \frac{1}{2\sqrt{1+a^2}} [G(x) - G(x)] = 0,$$

притом равномерно относительно x внутри $(0, \pi)$.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Заметим теперь, что из выражений коэффициентов $a_k(f)$ и $a_k(g)$ легко следует, что если $f(x)$ и $g(x)$ имеют кусочно непрерывные производные соответственно до четвертого и третьего порядков и удовлетворяют условиям:

$$f(0) = f''(0) = f'''(0) = f(l) = f''(l) = f'''(l),$$
$$g(0) = g'(0) = g''(0) = g(l) = g'(l) = g''(l),$$

то $a_k = 0\left(\frac{1}{k^4}\right)$

Таким образом, во всяком случае тогда, когда начальные данные $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют перечисленным условиям, числовой ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 |a_k|$$

сходится, и, стало быть, построенная по формуле (4′) функция $u(x, t)$ является решением задачи (1), (2), (3) в классическом смысле.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 20 XII 1956

Ն. Խ. Հարությունյան, Մ. Մ. Ջրբաշյան, Ռ. Ա. Ալեքսանդրյան

ԽԱՌՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԻՊԵՐԲՈԼԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հայտնի է, որ մաթեմատիկական ֆիզիկայի մի շարք խնդիրներ, օրինակ՝ համընթաց շարժվող հեղուկի հոսանքի մեջ, ինչպես նաև ծակոտկեն միջավայրում ձայնային ալիքների տարածման խնդիրը, կամ առաձգական ձողերի երկայնական տատանումների խնդիրը դեֆորմացիաների արագությանը համեմատական դիմադրության ուժերի առկայության դեպքում, բերվում են խառն ածանցյալ պարունակող հիպերբոլիկ հավասարման ինտեգրման, այսինքն հետևյալ տեսքի հավասարման՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \tag{1}$$

որտեղ a-ն հաստատուն է։

Ներկա հոդվածում բերվում է (1) հավասարման համար, այսպես կոչված, խառը խնդրի լուծումը, այսինքն $t > 0$, $0 < x < l$ տիրույթում կառուցվում է այնպիսի $u(x, t)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է (1) հավասարմանը և հետևյալ սկզբնական ու եզրային պայմաններին՝

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x),$$
$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Папкович П. Ф.* Строительная механика корабля, II (1941).
2. *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем, Прикл. матем. и механика, XVII (1953).