

Р. А. Александрян

**О корректности одной смешанной задачи
и о спектральной эквивалентности связанных
с нею двух операторов**

В работе изучается некоторая система дифференциальных уравнений, которая в известном смысле является простейшей из систем типа С. Л. Соболева, т. е. систем не типа Ковалевской, для которых все же задача Коши поставлена корректно.

Такие системы встречаются в некоторых вопросах гидродинамики и были впервые изучены С. Л. Соболевым, который решил задачу Коши в явном виде для некоторых специальных случаев, путем построения соответствующих фундаментальных решений. Исследование этих формул, дающих решение задачи Коши, обнаружило некоторые специфические особенности качественных свойств решений таких систем. Эти специальные свойства выявляются сильнее, когда рассматривается не задача Коши, а смешанная задача, т. е. когда область изменения пространственных переменных имеет границу.

Наряду с упомянутой системой в работе рассматривается тесно связанное с нею уравнение четвертого порядка; указывается способ построения решения системы по данному решению уравнения четвертого порядка и наоборот.

Доказывается корректность постановки смешанной задачи как для системы, так и для уравнения четвертого порядка, путем сведения этих задач к решению задачи Коши для операторных уравнений в соответствующих функциональных пространствах.

Устанавливается спектральная эквивалентность операторов A и B , порожденных смешанной задачей соответственно для упомянутой системы и уравнения четвертого порядка. Указывается способ сведения построения резольвенты самосопряженного оператора A к решению задачи Дирихле для одной системы дифференциальных уравнений второго порядка.

Для последней системы фундаментальное решение выписывается в явном виде.

Краткое содержание некоторых результатов работы было опубликовано автором в заметке [2], причем, как формулировки, так и

доказательства этих результатов значительно упрощены. Результаты, не упомянутые в этой заметке, публикуются впервые.

1°. В этом пункте подробно излагается постановка задачи, а также устанавливается тесная связь между одной системой дифференциальных уравнений и уравнением четвертого порядка, упомянутых в введении.

Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2} = -V_x + \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad (1.3)$$

которая, очевидно, не является системой типа Ковалевской, однако можно показать, что задача Коши для системы (1) поставлена корректно и, более того, построить формулы, дающие решение задачи Коши в явном виде. Как уже говорилось выше, мы изучаем смешанную задачу для системы (1). Всюду в дальнейшем мы будем считать, что независимые переменные x, y (пространственные координаты) в системе (1) изменяются в некоторой ограниченной области D с гладкой границей Γ на плоскости XY , а $t > 0$.

Вектор $\vec{V}(x, y, t)$ с компонентами V_x и V_y вместе со скалярной функцией $P(x, y, t)$ составляют решение системы (1), если она обладает соответствующими производными и обращает систему (1) в тождество по x, y, t в области их изменения.

Задача С. Л. Соболева, или, коротко, задача (С) для системы (1) состоит в отыскании такого решения, которое удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

$$\vec{V}(x, y, t)|_{t=0} = \vec{V}^{(0)}(x, y), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \vec{V}^{(1)}(x, y), \quad (2.2)$$

$$P(x, y, t)|_{\Gamma} = 0 \quad \text{при всех } t > 0. \quad (3)$$

Одновременно с системой (1) рассмотрим следующее уравнение четвертого порядка:

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (4)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Задача (С) для уравнения (4) состоит в отыскании такого решения, которое удовлетворяет условиям:

$$u|_{t=0} = \phi_0(x, y). \quad (5.1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_1(x, y), \quad (5.2)$$

$$u(x, y, t)|_{\Gamma} = 0 \quad \text{при всех } t > 0. \quad (6)$$

Мы изучим вопросы существования, единственности и корректности указанных выше задач.

Заметим, прежде всего, что система (1) тесно связана с уравнением (4), а именно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если гладкие $\vec{V}(x, y, t)$ и $P(x, y, t)$ удовлетворяют системе (1) при условии (3), то $P(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (4) и при заданном $\vec{V}(x, y, t)$ определяется единственным образом. Обратно, если $u = P(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (4) и условию (3), то существует вектор $\vec{V}(x, y, t)$, который вместе с $P(x, y, t)$ составляет решение системы (1), причем разность любых двух таких векторов имеет компоненты вида $V_x = a(y, t)$, $V_y = b(x, t)$.

Доказательство. Продифференцировав (1.1), (1.2) соответственно по x и y , почленно сложив, приняв во внимание (1.3), получим:

$$\Delta P = \frac{\partial V_x}{\partial x}, \quad (7)$$

т. е. $P(x, y, t)$ удовлетворяет при каждом фиксированном t уравнению Пуассона (7) и граничному условию (3); поэтому, в силу единственности решения задачи Дирихле, при заданном $\vec{V}(x, y, t)$ действительно определяется единственным образом.

Продифференцировав, далее (7), дважды по t и принимая во внимание (1.3) и (1.2), легко убеждаемся в справедливости первой части теоремы 1. Пусть теперь $P(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (4) и условию (3). Составим для данного $P(x, y, t)$ уравнение

$$\frac{\partial^4 f}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = P(x, y, t), \quad (8)$$

которое можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение. Легко доказать, что при таком $P(x, y, t)$ уравнение (8) имеет решение $f(x, y, t)$, удовлетворяющее уравнению (4). Для этого достаточно написать общее решение уравнения (8), подставить его в уравнение (4) и подобрать четыре произвольные функции от x и y ,

входящие в общее решение уравнения (8), так, чтобы обратить уравнение (4) в тождество.

Пусть теперь $P(x, y, t)$ — такое решение уравнения (8), которое удовлетворяет уравнению (4); тогда, полагая $V_x = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial t^2}$, $V_y = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial y}$, $P(x, y, t) = \frac{\partial^4 f}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, непосредственно убеждаемся, что они образуют решение системы (1). Наконец, положив $P \equiv 0$, из (7) и (1.3) получаем $V_x = a(y, t)$, $V_y = b(x, t)$. Теорема 1 доказана.

2°. В этом пункте мы сведем решение задачи (С) как для системы (1), так и для уравнения (4) к решению задачи Коши для двух операторных уравнений в специальном образом построенных гильбертовых пространствах, причем удачный подбор скалярных произведений и операторов существенен для дальнейшего исследования. Полностью установим некоторые основные свойства упомянутых операторов.

Пусть $\tilde{H}_A$ — гильбертово пространство комплексных вектор-функций $\vec{V}(x, y)$, компоненты которых $V_x(x, y)$ и $V_y(x, y)$ определены и суммируемы с квадратом модуля в области D , причем линейные операции обычные, а скалярное произведение задано формулой:

$$(\vec{V}, \vec{W}) = \iint_D (V_x \cdot \bar{W}_x + V_y \cdot \bar{W}_y) dx dy. \quad (9)$$

Пусть Ω — линейное многообразие гладких соленоидальных векторов, т. е. $\vec{V}(x, y) \in \Omega$, если V_x и V_y имеют непрерывные производные всех порядков в замкнутой области $D + \Gamma$ и всюду в D $\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$.

Замыкание Ω в скалярном произведении (9) обозначим через H_A . Это замыкание может быть описано следующим образом: $\vec{V} \in H_A$ тогда и только тогда, когда $\vec{V} \in \tilde{H}_A$ и обобщенная дивергенция $\vec{V}(x, y)$ равна нулю, т. е. $(\vec{V}, \operatorname{grad} \varphi) = 0$ для всех $\varphi(x, y) \in \Phi_0$, где Φ_0 — линейное многообразие бесконечно дифференцируемых в $D + \Gamma$ функций $\varphi(x, y)$, исчезающих вне некоторой области D_φ , такой, что $D_\varphi \subset D$.

В самом деле, если $\vec{V} \in H_A$, то существует последовательность $\vec{V}^{(k)}(x, y) \in \Omega$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{V} - \vec{V}^{(k)}\| = 0$. Интегрированием по частям легко получим, что $(\vec{V}^{(k)}, \operatorname{grad} \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \Phi_0$; поэтому $(\vec{V}, \operatorname{grad} \varphi) = (\vec{V} - \vec{V}^{(k)}, \operatorname{grad} \varphi)$, откуда в силу неравенства Буняковского — Шварца $(\vec{V}, \operatorname{grad} \varphi) = 0$, если $\varphi(x, y) \in \Phi_0$. Легко видеть также

что, если $\vec{V} \in \tilde{H}_A$ и $(\vec{V}, \text{grad } \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \Phi_0$, то найдется последовательность $\vec{V}^{(h)} \in \Omega$ такая, что $\lim_{h \rightarrow 0} \|\vec{V} - \vec{V}^{(h)}\| = 0$, т. е. $\vec{V} \in H_A$.

Пусть теперь в плотном в H_A линейном многообразии Ω задан оператор A по формуле; $\vec{W} = A\vec{V}$, где

$$W_x = -V_x + \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (10.1)$$

$$W_y = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (10.2)$$

а $P(x, y)$ определяется при заданном $\vec{V} \in \Omega$ единственным образом из уравнения (7) и граничного условия (3), в силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Семейство векторов $\vec{V}(x, y, t)$, зависящих от вещественного параметра t , будем называть траекторией в H_A , если при каждом фиксированном t $\vec{V}(x, y, t) \in H_A$. Производные траекторий по t условимся понимать в смысле сильной сходимости в H_A , т. е. если траектория дифференцируема в точке t , то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \frac{\vec{V}(x, y, t+h) - \vec{V}(x, y, t)}{h} \right\| = 0. \quad (11)$$

Легко видеть, что система (1) может быть записана в виде:

$$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = A\vec{V}, \quad (12)$$

а задача (С) сведется к отысканию дважды дифференцируемой траектории $\vec{V}(x, y, t)$, удовлетворяющей уравнению (12) и условиям (2.1) и (2.2).

Очевидно, оператор A от t не зависит. Поэтому уравнение (12) можно рассматривать как обыкновенное уравнение с „постоянными коэффициентами“ в пространстве H_A .

Теорема 2. Для всех $\vec{V} \in \Omega$ имеют место неравенства

$$-(\vec{V}, \vec{V}) \leq (A\vec{V}, \vec{V}) \leq 0, \quad (13)$$

т. е. оператор A ограниченный, симметрический и отрицательно определенный на Ω .

Доказательство. Пусть $\vec{V} \in \Omega$; тогда, очевидно

$$\begin{aligned} (A\vec{V}, \vec{V}) &= \iint_D \left\{ \left(-V_x + \frac{\partial P}{\partial x} \right) V_x + \frac{\partial P}{\partial y} V_y \right\} dx dy = \\ &= - \iint_D |V_x|^2 dx dy - \iint_D P(x, y) \cdot \text{div } \vec{V} dx dy \end{aligned}$$

или, в силу того, что $\text{div } \vec{V} = 0$, получим

$$(A\vec{V}, \vec{V}) = - \iint_D |V_x|^2 dx dy.$$

Пусть теперь H_B — полное гильбертово пространство, которое получено в результате замыкания Φ_0 в метрике, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_B = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_D \Delta u \cdot \bar{v} dx dy. \quad (14)$$

Пусть Δ^{-1} — оператор, обратный к оператору Лапласа при нулевых краевых условиях. Рассмотрим оператор

$$B = -\Delta^{-1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (15)$$

Теорема 2. Для всех $u(x, y) \in \Phi_0$ имеют место неравенства*

$$-(u, u)_B \leq (Bu, u)_B \leq 0, \quad (13^*)$$

т. е. оператор B , рассматриваемый на плотном в H_B линейном многообразии Φ_0 , является ограниченным, симметрическим и отрицательно определенным.

Доказательство. В самом деле, пусть $u \in \Phi_0$, тогда

$$(Bu, u)_B = - \iint_D \Delta Bu \cdot \bar{u} dx dy = \iint_D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \bar{u}(x, y) dx dy = - \iint_D \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 dx dy,$$

а с другой стороны $(u, u)_B = \iint_D \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right\} dx dy$, поэтому теорема доказана.

3°. В этом пункте, опираясь на приведенные выше построения и теоремы 2 и 2*, мы докажем существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решения задачи (С) как для системы (1), так и для уравнения (4).

Заметим прежде всего, что, в силу упомянутых теорем, операторы A и B , заданные лишь на плотных соответственно в H_A и H_B линейных многообразиях Ω и Φ_0 , продолжимы единственным образом на все H_A и H_B с сохранением упомянутых в этих теоремах свойств. Полученные таким образом самосопряженные операторы мы будем по-прежнему обозначать через A и B .

Теорема 3. При произвольных $\vec{V}^{(0)}(x, y)$ и $\vec{V}^{(1)}(x, y)$ из H_A существует единственная дважды непрерывно дифференцируемая по t траектория $\vec{V}(x, y, t)$ в H_A , которая удовлетворяет уравнению (12) и начальным условиям (2.1) и (2.2). Эта траектория непрерывно зависит от $\vec{V}^{(0)}$ и $\vec{V}^{(1)}$ в смысле сильной сходимости в H_A .

Доказательство. Будем искать решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям (2.1) и (2.2), пока формально, в виде степенного ряда

$$\vec{V}(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \vec{W}^{(k)}, \quad (16)$$

где коэффициенты $\vec{W}^{(k)} \in H_A$ подлежат определению.

Полагая, что указанные в (12) операции выполнимы почленно, получим без труда рекуррентные соотношения

$$\vec{W}^{(k+2)} = A \vec{W}^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (17)$$

но из начальных условий очевидно имеем: $\vec{W}^{(0)} = \vec{V}^{(0)}$, $\vec{W}^{(1)} = \vec{V}^{(1)}$, поэтому из (17) коэффициенты $\vec{W}^{(k)}$ определяются однозначно, а именно

$$\vec{W}^{(2p)} = A^p \vec{V}^{(0)}, \quad (18.1)$$

$$\vec{W}^{(2p+1)} = A^p \vec{V}^{(1)}, \quad (18.2)$$

где $(p = 0, 1, 2, \dots)$, а под нулевой степенью оператора A понимается тождественный оператор. Таким образом, ряд

$$\vec{V}(x, y, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{t^{2p}}{(2p)!} A^p \vec{V}^{(0)} + \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} A^p \vec{V}^{(1)} \right] \quad (19)$$

формально удовлетворяет как уравнению (12), так и условиям (2.1) и (2.2).

Рассмотрим теперь ряд, составленный из норм членов ряда (19):

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{|t|^{2p}}{(2p)!} \|A^p \vec{V}^{(0)}\| + \frac{|t|^{2p+1}}{(2p+1)!} \|A^p \vec{V}^{(1)}\| \right], \quad (19^*)$$

который, в силу ограниченности оператора A , сходится при любом фиксированном t ; поэтому легко видеть, что как ряд (19), так и ряды, получаемые из него, почленным дифференцированием по t или применением оператора A сколько угодно раз, сходятся по норме в пространстве H_A , а его сумма действительно является искомой траекторией. Кроме того, в силу (13), получим оценку:

$$\|\vec{V}(x, y, t)\| \leq e^{|t|} (\|\vec{V}^{(0)}\| + \|\vec{V}^{(1)}\|), \quad (20)$$

из которой непосредственно следует как единственность, так и непрерывная зависимость от начальных данных в смысле сильной сходимости в H_A .

Легко видеть, далее, что уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Bu, \quad (21)$$

где оператор B не зависит от t и является ограниченным в пространстве H_B , причем $\|B\| = 1$.

Поэтому решение задачи (C) для уравнения (4) сводится к нахождению дважды дифференцируемой траектории $u(x, y, t)$ в H_B ,

которая удовлетворяет уравнению (2.1) и начальным условиям (5.1) и (5.2).

Поступая совершенно так же, как в случае уравнения (12), легко доказать, что искомая траектория $u(x, y, t)$ представляется степенным рядом

$$u(x, y, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{t^{2p}}{(2p)!} B^p \psi_0(x, y) + \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} B^p \psi_1(x, y) \right], \quad (22)$$

причем ряды, полученные из (22) путем конечного числа почленных дифференцирований по t или применения оператора B , сходятся по норме в пространстве H_B . Кроме того, имеет место оценка

$$\|u(x, y, t)\|_B \leq e^{t^2} \{\|\psi_0\|_B + \|\psi_1\|_B\}, \quad (23)$$

т. е. верна следующая теорема.

Теорема 3^а. При любых $\psi_0(x, y)$ и $\psi_1(x, y)$ из H_B существует единственная дважды дифференцируемая по t траектория в H_B , которая удовлетворяет уравнению (21) и начальным условиям (5.1), (5.2).

Эта траектория зависит непрерывно от начальных данных в смысле сильной сходимости в H_B .

Замечание. Построенные выше траектории $\vec{V}(x, y, t) \in H_A$ и $u(x, y, t) \in H_B$ очевидно, не всегда являются решением задачи (С) соответственно для системы (1) и уравнения (4) в классическом смысле, однако представляют собой решение этих задач в некотором обобщенном смысле.

Так, например, $u(x, y, t)$, определенная формулой (22), удовлетворяет при всех $t > 0$ следующему интегральному соотношению:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi \right)_B = (u, B\varphi)_B \quad (24)$$

для всех $\varphi(x, y)$, гладких в $\bar{D}$, исчезающих на Γ , которое эквивалентно уравнению (4) и граничному условию (3), если $u(x, y, t)$ гладкая в $\bar{D}$; а при $t=0$ удовлетворяет начальным условиям (5.1), (5.2) в смысле равенства элементов H_B .

Легко видеть, далее, что оператор B — интегродифференциальный, определенный формулой:

$$Bu = \iint_D G(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} dx_0 dy_0,$$

где G — функция Грина оператора Лапласа при нулевых краевых условиях.

4°. В этом пункте мы докажем спектральную эквивалентность самосопряженных операторов A и B . Предварительно заметим, что верна следующая теорема.

Теорема 4. При любой области D числа $\lambda = -1$ и $\lambda =$

являются собственными значениями оператора A , причем соответствующие им собственные подпространства бесконечномерны.

Доказательство. В самом деле, записав уравнение $A\vec{V} = -\vec{V}$ в компонентах, получим $\frac{\partial P}{\partial x} \equiv 0$ и $V_y \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$ или, в силу (3), $P = 0$,

$V_y = 0$, откуда, в силу (7), $V_x \equiv a(y)$, т. е. если $\vec{V}$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = -1$, то V_x зависит только от y , а $V_y = 0$. Обратно, всякий такой вектор, не эквивалентный нулю, является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda = -1$, так как для такого вектора уравнение (7) превращается в уравнение Лапласа, и из (3) следует $P(x, y) \equiv 0$; поэтому уравнение $A\vec{V} = -\vec{V}$ удовлетворяется тождественно. Случай $\lambda = 0$ разбирается также элементарно. Теорема доказана.

Ортогональную сумму собственных подпространств, соответствующих собственным значениям $\lambda = -1$ и $\lambda = 0$, обозначим через H_A^* , и пусть $H_A = H_A^* \oplus H_A^0$; тогда верна следующая теорема.

Теорема 5. Собственные значения оператора A , рассматриваемого на подпространстве H_A^* , и оператора B , во всем пространстве H_B , совпадают вместе с их кратностями.

Доказательство. Из (13) и из теоремы 4 следует, что для всех λ вне интервала $(-1, 0)$ резольвента оператора A существует, и стало быть уравнение

$$(A - \lambda E)\vec{V} = 0 \quad (24)$$

имеет в H_A^* только тривиальное решение. Пусть теперь $\vec{V}^{(0)}(x, y)$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_0 \in (-1, 0)$, который предполагается пока гладким. Из уравнения (7) и граничного условия (3) легко следует, что при заданном гладком $\vec{V} \in H_A^*$ функция $P(x, y)$ определяется однозначно и, наоборот, при заданном $P(x, y)$ вектор $\vec{V} \in H_A^*$ определяется однозначно. Условимся связанные таким образом $\vec{V}$ и P называть соответствующими. Пусть теперь $P^{(0)}(x, y)$ соответствует собственному вектору $\vec{V}^{(0)}$; тогда, записав уравнение $A\vec{V}^{(0)} = \lambda_0 \vec{V}^{(0)}$ в компонентах, получим

$$-V_x^{(0)} + \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} = \lambda_0 V_x^{(0)}, \quad (24.1)$$

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial y} = \lambda_0 V_y^{(0)}, \quad (24.2)$$

или, в силу (1.3),

$$\Delta P^{(0)} = \frac{1}{1 + \lambda_0} \cdot \frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2},$$

откуда немедленно:

$$BP^{(0)} = \lambda_0 P^{(0)}. \quad (25)$$

Если бы $P^{(0)} \equiv 0$, то из $\vec{V}^{(0)} \in H_A^*$ имели бы $\vec{V}^{(0)} \equiv 0$. Таким образом, если $\vec{V}^{(0)}$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_0 , то $P^{(0)}(x, y)$, соответствующая этому вектору, является собственной функцией оператора B , соответствующей этому же собственному значению. Пусть теперь $u = u_0(x, y)$ — гладкая функция такая, что $Bu_0 = \lambda_0 u_0$, причем $u_0 \neq 0$. Тогда, очевидно, $u_0(x, y)$ исчезает на границе и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1 + \lambda_0}{\lambda_0} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0. \quad (26)$$

Составим вектор $\vec{V}^{(0)}(x, y)$ с компонентами $V_x^{(0)} = \frac{1}{1 + \lambda_0} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x}$ и $V_y^{(0)} = \frac{1}{\lambda_0} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}$. Очевидно, $\vec{V}^{(0)}(x, y) \in H_A^*$ и $\vec{V}^{(0)} \neq 0$. Найдем функцию $P_0(x, y)$, соответствующую вектору $\vec{V}^{(0)}$, т. е. решим уравнение Пуассона $\Delta u = \frac{1}{1 + \lambda_0} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ при нулевых краевых условиях; тогда получим $P_0(x, y) = u_0(x, y)$. Теперь уже очевидно, что построенный выше вектор $\vec{V}^{(0)}(x, y)$ удовлетворяет соотношениям (24.1) и (24.2), т. е. если $u_0(x, y)$ — гладкая собственная функция оператора B , то вектор $\vec{V}^{(0)}$ с указанными выше компонентами является собственным вектором оператора A , соответствующим тому же собственному значению.

Пусть теперь $\vec{V}^{(0)} \in H_A^*$ — не гладкий собственный вектор и пусть $\vec{V}^{(n)}$ — последовательность гладких векторов из H_A^* таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{V}^{(0)} - \vec{V}^{(n)}\| = 0.$$

Пусть, далее, функции $P^{(n)}(x, y)$ соответствуют гладким векторам $\vec{V}^{(n)}$; тогда последовательность $P^{(n)}(x, y)$ сходится в себе в метрике H_B , и в силу полноты H_B существует $P^{(0)} \in H_B$, к которой она сходится.

В самом деле, легко видеть, что если $P(x, y)$ соответствует вектору $\vec{V} \in H_A^*$, то имеет место оценка

$$\|P\|_B = \|\text{grad } P\| = \|A\vec{V} + I\vec{V}\| \leq \|A\vec{V}\| + \|I\vec{V}\| \leq 2\|\vec{V}\|, \quad (27)$$

где $I\vec{V}$ — вектор с компонентами V_x и 0.

Обозначим $(A - \lambda_0 E)\vec{V}^{(n)} = \vec{W}^{(n)}$. Тогда, в силу ограниченности оператора A , компоненты $W_x^{(n)}$ и $W_y^{(n)}$ будут стремиться к нулю в $L_2(D)$. Поэтому, применяя неравенство Буняковского — Шварца, легко получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \lambda_0} \iint_D W_x^{(n)} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} dx dy = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_0} \iint_D W_y^{(n)} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} dx dy = 0$$

для всех гладких в $\bar{D}$ $\varphi(x, y)$, исчезающих на Γ , откуда немедленно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D \left[\frac{\partial P^{(n)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{1 + \lambda_0}{\lambda_0} \cdot \frac{\partial P^{(n)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right] dx dy = 0,$$

а так как $\|P^{(n)} - P^{(0)}\| \rightarrow 0$, то

$$\iint_D \left[\frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{1 + \lambda_0}{\lambda_0} \cdot \frac{\partial P^{(0)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right] dx dy = 0,$$

т. е. $(BP^{(0)} - \lambda_0 P^{(0)}, \varphi)_B = 0$ для всех $\varphi(x, y)$ из плотного в H_B линейного множества.

Аналогичные рассуждения позволяют освободиться в остальных пунктах доказательства теоремы от предположения гладкости $\bar{V}^{(0)}$ или $P^{(0)}$. Легко убедиться, далее, что линейно независимым собственным векторам оператора A соответствуют линейно независимые собственные функции оператора B и наоборот. Теорема 5 доказана.

Обозначим соответственно через $S(A)$, $S(B)$ совокупности точек спектра операторов A и B . Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. $S(A) = S(B)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in S_A$; тогда, очевидно, существует последовательность гладких $\bar{V}^{(n)} \in H_A^*$ таких, что $\|\bar{V}^{(n)}\| = 1$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda_0 E)\bar{V}^{(n)}\| = 0$. Поэтому, если $P^{(n)} \in H_B$ соответствуют $\bar{V}^{(n)}$, то, как было показано выше,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D \left[\lambda_0 \cdot \frac{\partial P^{(n)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + (1 + \lambda_0) \frac{\partial P^{(n)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right] dx dy = 0$$

для всех гладких $\varphi(x, y)$, исчезающих на Γ . Обозначим $BP^{(n)} - \lambda_0 P^{(n)} = Q^{(n)}(x, y)$; тогда, очевидно, $Q^{(n)}$ гладкая в $\bar{D}$ и исчезающая на Γ функция такая, что $\Delta Q^{(n)} = -\lambda_0 \frac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial x^2} - (1 + \lambda_0) \frac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial y^2}$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \|Q^{(n)}\|_B^2 &= - \iint_D \Delta Q^{(n)} \cdot \bar{Q}^{(n)} dx dy = - \iint_D \left[\lambda_0 \cdot \frac{\partial P^{(n)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{Q}^{(n)}}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + (1 + \lambda_0) \frac{\partial P^{(n)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{Q}^{(n)}}{\partial y} \right] dx dy = -\lambda_0 (1 + \lambda_0) \iint_D \left[V_x^{(n)} \cdot \frac{\partial \bar{Q}^{(n)}}{\partial x} + \right. \end{aligned}$$

$$+ V_y^{(n)} \cdot \frac{\partial \overline{Q^{(n)}}}{\partial y} \Big) dx dy - \iint_D \left(\lambda_0 W_x^{(n)} \cdot \frac{\partial \overline{Q^{(n)}}}{\partial x} + (1 + \lambda_0) W_y^{(n)} \cdot \frac{\partial \overline{Q^{(n)}}}{\partial y} \right) dx dy,$$

откуда $\|Q^{(n)}\|_B \leq \|\vec{W}^{(n)}\|$, где, как и выше, $\vec{W}^{(n)} = (A - \lambda_0 E) \vec{V}^{(n)}$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \|BP^{(n)} - \lambda_0 P^{(n)}\| = 0$. Заметив, что $\|\vec{V}^{(n)}\| = 1$, легко заключаем, что

нормы $\|P^{(n)}\|_B$ не могут стремиться к нулю, следовательно $S(A) \subset S(B)$. Пусть теперь $\lambda_0 \in S(B)$; тогда существует последовательность гладких функций $u_n(x, y)$, исчезающих на Γ , таких, что $\|u_n\|_B = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Bu_n - \lambda_0 u_n\| = 0$. Обозначим $Bu_n - \lambda_0 u_n = v_n$; тогда, очевидно, $v_n(x, y)$ исчезает на Γ и $\lambda_0 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + (1 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = -\Delta v_n$.

Составим вектор $\vec{V}^{(n)}(x, y)$ с компонентами $V_x^{(n)} = \frac{1}{1 + \lambda_0} \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_0(1 + \lambda_0)} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial y}$, $V_y^{(n)} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{1}{\lambda_0(1 + \lambda_0)} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial x}$, который принадлежит H_A^* , так как $\operatorname{div} \vec{V}^{(n)} = 0$.

Пусть теперь $P^{(n)}(x, y)$ соответствует вектору $\vec{V}^{(n)}$, а $\vec{W}^{(n)} = (A - \lambda_0 E) \vec{V}^{(n)}$. Легко видеть, что

$$W_x^{(n)} = \frac{\partial \sigma_n}{\partial x} - \frac{1}{\lambda_0} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial x},$$

$$W_y^{(n)} = \frac{\partial \sigma_n}{\partial y} - \frac{1}{1 + \lambda_0} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial y},$$

где $\sigma_n(x, y) = P^{(n)}(x, y) - u_n(x, y)$. Так как $\|v_n\|_B \rightarrow 0$, то остается доказать, что $\|\sigma_n\|_B \rightarrow 0$. Оценим для этого квадрат нормы:

$$\begin{aligned} \|\sigma_n\|^2 &= - \iint_D \Delta \sigma_n \cdot \bar{\sigma}_n dx dy = \iint_D [\Delta u_n - \Delta P^{(n)}] \bar{\sigma}_n dx dy = \\ &= - \iint_D \left[\frac{1}{\lambda_0} \cdot \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{1}{1 + \lambda_0} \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} \right] \bar{\sigma}_n dx dy \leq \\ &\leq \|\sigma_n\|_B \cdot \sqrt{\iint_D \left[\left| \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{1}{1 + \lambda_0} \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} \right|^2 \right] dx dy}, \end{aligned}$$

откуда, очевидно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n(x, y)\|_B = 0$. Наконец, если бы $\|\vec{V}^{(n)}\| \rightarrow 0$, то из (27) следовало $\|P^{(n)}\|_B \rightarrow 0$, что нелепо. Теорема 6 доказана.

5°. В этом пункте мы сведем построение резольвенты операторов A и B к решению первой краевой задачи для одной системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициен-

тая. Выпишем для нее фундаментальное решение в явном виде и выясним характер особенности этого решения, когда параметр λ стремится к точкам спектра.

Рассмотрим уравнение

$$(A - \lambda E)\vec{V} = \vec{W}, \quad (28)$$

где $\vec{W}$ — произвольный заданный вектор из Ω . Из (13) следует, что для всех λ вне отрезка $[-1, 0]$ существует ограниченный оператор $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$. Пусть $P(x, y)$ соответствует искомому вектору $\vec{V} \in H_A^*$; тогда из (28), в силу $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1 + \lambda}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{1 + \lambda}{\lambda} \cdot \frac{\partial W_y}{\partial y}. \quad (29)$$

Кроме того, из рассуждений предыдущего пункта следует, что для нахождения $\vec{V}$ достаточно найти $P(x, y)$, а так как λ , вообще говоря, комплексно, то следует искать $P(x, y)$ в виде $P = u_1 + iu_2$. Поэтому уравнение (29) превратится в систему

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + a_1 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - a_2 \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = f_1(x, y), \quad (29.1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + a_2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + a_1 \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = f_2(x, y), \quad (29.2)$$

где положено $\frac{1 + \lambda}{\lambda} = a_1 + ia_2$, $\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{1 + \lambda}{\lambda} \cdot \frac{\partial W_y}{\partial y} = f_1 + if_2$.

Таким образом, построение резольвенты оператора A свелось к отысканию пары функций $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, удовлетворяющих (29.1), (29.2) и исчезающих на Γ , т. е. к первой краевой задаче для этой системы, которая является частным случаем систем, подробно изученных М. И. Вишиком [3]. В этой работе указаны необходимые и достаточные условия, при которых первая краевая задача для этой системы разрешима единственным образом. Эти условия состоят в следующем: либо $a_2 \neq 0$, либо $a_2 = 0$, но $a_1 > 0$. Легко видеть, что достаточность этих условий следует из неравенства (13), а необходимость вытекает из одного результата автора [4]: спектр оператора A при любой области D совпадает с отрезком $[-1, 0]$.

Рассмотрим систему (29.1), (29.2) снова как одно комплексное уравнение

$$\Delta_\mu u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

где для удобства положено $\frac{1 + \lambda}{\lambda} = -\mu^2$; поэтому условие $\lambda \in [-1, 0]$ эквивалентно условию $\operatorname{Im} \mu \neq 0$. Рассмотрим функцию $\gamma_\mu(x, y, z) = \frac{1}{4\pi i \mu} \ln(y^2 - \mu^2 x^2 + z^2)$, где z — вещественный параметр, который, в

силу условия $\text{Im} \mu \neq 0$, можно считать однозначной аналитической функцией x и y , причем легко сосчитать, что $\Delta_\lambda \gamma_\varepsilon = \frac{i\mu}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^2}{(y^2 - \mu^2 x^2 + \varepsilon^2)^2}$. Легко убедиться, далее, что интеграл от $\Delta_\lambda \gamma_\varepsilon$ по всей плоскости существует и не зависит от ε , а именно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\lambda \gamma_\varepsilon(x, y, \mu) dx dy = 1.$$

Обозначим предельную функцию через $\gamma(x, y, \mu)$:

$$\gamma(x, y, \mu) = \frac{1}{4\pi i \mu} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(y^2 - \mu^2 x^2 + \varepsilon^2).$$

Тогда, очевидно, в силу условия $\text{Im} \mu \neq 0$, что $\gamma(x, y, \mu)$ определено всюду, кроме начала координат, и всюду, кроме начала, удовлетворяет однородному уравнению $\Delta_\lambda u = 0$. Легко видеть, далее, что, в всяком случае для всех непрерывных и финитных функций $v(x, y)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, y) \Delta_\lambda \gamma_\varepsilon(x, y, \mu) dx dy = v(0, 0). \quad (30)$$

Таким образом, если δ_{M_0} — функционал Дирака, сосредоточенный в точке $M_0(x_0, y_0)$, то функция $\gamma(x, y, x_0, y_0, \mu) = \frac{1}{4\pi i \mu} \ln[(y - y_0)^2 - \mu^2(x - x_0)^2]$ удовлетворяет уравнению $\Delta_\lambda u = \delta_{M_0}$ в смысле соотношения (30) и, стало быть, является фундаментальным решением уравнения (29).

Отделяя вещественную и мнимую части, получим фундаментальное решение системы (29.1), (29.2). Полученные фундаментальные решения позволяют построить соответствующую функцию Грина. Доказать, что R_λ является интегральным оператором типа Карлемана, однако здесь мы этого делать не будем.

Заметим теперь, что когда λ стремится к точкам спектра, т. е. $\text{Im} \mu \rightarrow 0$, то в пределе уравнение (29) становится вещественным и гиперболическим, а его фундаментальное решение получает вид:

$$\begin{aligned} \gamma(x, y, x_0, y_0, \mu) &= \text{Re} \frac{1}{4\pi i \mu} \ln[(y - y_0)^2 - \mu^2(x - x_0)^2] = \\ &= \frac{1}{4\pi \mu} \arg \{[(y - y_0) - \mu(x - x_0)][(y - y_0) + \mu(x - x_0)]\}. \end{aligned}$$

Таким образом, в предельном случае, $\text{Im} \mu = 0$ фундаментальное решение обращается в кусочно постоянную функцию и представляет собой линейную комбинацию характеристических функций полуплоскостей, определяемых характеристиками уравнения (29), проходящим через точку M_0 .

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступило 24 XII 195

Ռ. Ս. Ալեքսանդրյան

ՄԻ ԽԱՌԸ ԽՆԴՐԻ ԿՈՐՐԵԿՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ՀԵՏ ԿԱՊԿԱԾ
ԵՐԿՈՒ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՀԱՄԱՐԺԵՔՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգովածում ուսումնասիրվում է դիֆերենցիալ հավասարումների մի սխեմա, որը որոշ իմաստով պարզագույնն է այն սխեմաներից, որոնց համար Կոշու խնդիրը կորելկտ է դրված, չնայած որ նրանք Կովալեվ-սկայայի տիպի չեն։ Այդպիսի սխեմաներ ծագում են, օրինակ, հիդրոմեխանիկայի որոշ հարցերում և առաջին անգամ ուսումնասիրվել են Ս. Լ. Սերուկի կողմից, որը կառուցել է Կոշու խնդրի բացահայտ լուծումը մի այդպիսի սխեմայի համար։ Սերուկի ֆորմուլաների հետազոտումը ցույց տվեց այդպիսի սխեմաների սրական հատկությունների հետաքրքիր առանձնահատկություններ, որոնք ավելի ցայտուն են դառնում, երբ ուսումնասիրվում է խառը խնդիրը, այսինքն, երբ տարածական փոփոխականների փոփոխման տիրույթն ունի կորագիծ։

Հոգովածում ապացուցված է խառը խնդրի լուծման գոյությունն ու միակությունը մեր սխեմայի համար, և այդ խնդրից ծագող երկու օպերատորների ադևկտիալ համարմեքությունը։ Բացի դրանից, ապացուցված է, որ օպերատորների ռեզոլվենաների կառուցումը բերվում է մասնական ածանցյալներով հավասարումների մի սխեմայի համար առաջին եզրային խնդրի լուծմանը, որի ֆունկցիոնալ լուծումը տրված է բացահայտ տեսքով, նշված են նաև վերջին խնդրի լուծելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ սխեմայի գործակիցների տերմիններով։

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Соболев С. Л. Известия АН СССР, сер. матем., 18, 3—50 (1954).
2. Александрян Р. А. ДАН СССР, 73, 4 (1950).
3. Вашиш М. И. Матем. сборник, 29(71), 3 (1951).
4. Александрян Р. А. Успехи матем. наук, 9, 3(61) (1954).