

М. М. Джрбашян

О разложении аналитических функций в ряд
по рациональным функциям с заданным мно-
жеством полюсов

В настоящей работе для данного ограниченного замкнутого континуума K строится система рациональных функций $\{M_n(z)\}$ с заданным множеством полюсов. При определенных ограничениях, налагаемых на область D и на множество полюсов $\{\omega_k\}$, расположенных вне области D , доказываем, что любая аналитическая в D и непрерывная в $\bar{D}$ функция $f(z)$ разлагается в ряд вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n(z),$$

равномерно сходящийся внутри области D .

Построенные здесь рациональные функции являются естественными обобщениями полиномов Фабера.

1. Пусть K — ограниченный замкнутый континуум, содержащий более одной точки, и G_{∞} — та из смежных с ним областей, которая содержит точку $z = \infty$. Область G_{∞} односвязна, и ее граница $L \subset K$.

Пусть функция

$$w = \Phi(z), \quad \Phi(\infty) = \infty, \quad \Phi'(\infty) > 0 \quad (1)$$

конформно отображает область G_{∞} на внешнюю область единичного круга $|w| > 1$, а $z = \Psi(w)$ — обратная функция.

Пусть $\{\omega_k\}$, $(k = 0, 1, 2, \dots)$ — последовательность комплексных чисел, среди которых могут быть и равные, образы которых принадлежат области G_{∞} и нумерованы так, что

$$|\Phi(\omega_0)| \geq |\Phi(\omega_1)| \geq \dots \geq |\Phi(\omega_n)| \geq \dots \quad (2)$$

Отметим при этом, что не исключается случай, когда в последовательности $\{\omega_k\}$, $\omega_0 = \omega_1 = \dots = \omega_N = \infty$, $0 \leq N \leq \infty$.

Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n[\Phi(z)] = \frac{(|\Phi(\omega_0)|^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\Phi(\omega_0) - \Phi(z)},$$

$$\varphi_n[\Phi(z)] = \frac{(|\Phi(\omega_n)|^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\Phi(\omega_n) - \Phi(z)} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - \overline{\Phi(\omega_k)}\Phi(z)}{\Phi(z) - \Phi(\omega_k)}, \quad n \geq 1. \quad (3)$$

каждая из которых голоморфна в области G_∞ , кроме конечного числа точек, где они имеют полюсы. Если $\omega_0^*, \dots, \omega_m^*$ — суть образы чисел $\omega_0, \dots, \omega_m$ на плоскости z и $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m$ — кратности этих точек, то функция $\varphi_n[\Phi(z)]$ голоморфна в G_∞ , кроме точек $\omega_0^*, \dots, \omega_m^*$, где она имеет полюсы порядков $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m$ соответственно.

Отметим, что в частном случае, когда $\omega_0 = \omega_1 = \dots = \omega_n = \dots = \infty$, из (1) и (3) следует

$$\varphi_n[\Phi(z)] = [\Phi(z)]^n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Обозначим через $M_n(z)$ главную часть функции $\varphi_n[\Phi(z)]$. Очевидно, что $M_n(z)$ — рациональная функция вида

$$M_n(z) = \frac{P_n(z)}{\prod_{k=0}^n (z - \omega_k)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5)$$

где $P_n(z)$ — некоторый полином степени n .

Заметим также, что в случае, когда $\omega_k = \infty$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), из (4) следует, что $M_n(z)$ нужно определить как совокупность членов с неотрицательными степенями z в лорановом разложении функций $[\Phi(z)]^n$. Иначе говоря, в этом случае $M_n(z)$ представляет собой n -й полином Фабера, порожденный континуумом K . Поэтому естественно в общем случае называть $\{M_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) с системой рациональных функций, порожденной континуумом K и последовательностью $\{\omega_k\}$.

Для данного значения $n \geq 0$ замкнутую спрямляемую жордановую кривую I_n , лежащую в области G_∞ , выберем так, чтобы образы чисел $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$, т. е. точки $\omega_0^*, \omega_1^*, \dots, \omega_n^*$, принадлежали внешней части I_n . Очевидно, что, если граница L континуума K представляет собой замкнутую спрямляемую кривую Жордана, то за I_n можно взять просто кривую L .

Покажем, что при таком выборе кривой I_n , если точка z лежит внутри I_n , имеет место интегральное представление

$$M_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_n} \frac{\varphi_n[\Phi(\xi)]}{\xi - z} d\xi. \quad (6)$$

Действительно, функция $\varphi_n[\Phi(\xi)] - M_n(\xi)$ голоморфна в области G_∞ , а в бесконечно удаленной точке $\xi = \infty$ имеет нуль не ниже первого порядка. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{I_n} \frac{\varphi_n[\Phi(\xi)] - M_n(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0, \quad (7)$$

если точка z лежит внутри I_n .

Но функция $M_n(\xi)$ голоморфна в замкнутой области ограниченной кривой l_n ; поэтому если z лежит внутри l_n , то

$$M_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_n} \frac{M_n(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_n} \frac{\varphi_n[\Phi(\xi)]}{\xi - z} d\xi,$$

в силу формулы (7).

2°. Пусть односвязная область D ограничена замкнутой спрямляемой кривой Жордана L . Пусть система рациональных функций $\{M_n(z)\}$ порождена континуумом $K = D \cup L$ и последовательностью комплексных чисел $\{\omega_n\}$, образы которых лежат в дополнительной к D области G_∞ и нумерованы как выше.

Ниже, при некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на последовательность точек $\{\omega_n\}$ и на кривую L , будет установлено, что система рациональных функций $\{M_n(z)\}$ образует базис в пространстве функций аналитических на континууме K .

Докажем теперь две предварительные леммы:

Пусть, как и в пункте 1, функция $z = \Psi(w)$, $\Psi(\infty) = \infty$, $\Psi'(\infty) > 0$ конформно отображает область $|w| > 1$ на внешнюю часть кривой L , т. е. на область G_∞ .

Функция

$$\chi(w, z) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} \quad (8)$$

при любом фиксированном $z \in D$ голоморфна в области $|w| > 1$, при этом $\chi(\infty, z) = 0$. Отсюда следует, что при $z \in D$ справедливо разложение

$$\chi(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(z)}{w^{n+1}}, \quad |w| > 1, \quad (9)$$

где $\{c_n(z)\}$ — вполне определенные функции от z в области D .

Из (9) следует, что функция

$$\chi_1(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta} \chi\left(\frac{1}{\zeta}, z\right), \quad (10)$$

при $z \in D$, голоморфна в круге $|\zeta| < 1$.

Условимся говорить, что кривая L принадлежит к классу U (коротко $L \in U$), если

$$\lim_{r \rightarrow 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\Psi'(re^{i\theta})|^2 d\theta < +\infty.$$

Лемма 1. Если граница L области D принадлежит к классу U , то функция $\chi_1(\zeta, z)$ принадлежит к классу H_2 Рисса в единичном круге $|\zeta| < 1$.

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$; обозначим

$$\inf_{\zeta \in L} |\zeta - z_0| = d(z_0) > 0;$$

тогда очевидно, что

$$|\Psi(w) - z_0| \geq d(z_0) \text{ при } |w| = r \gg 1.$$

Отсюда и из того, что $L \subset U$, следует

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\chi(re^{i\varphi}, z_0)|^2 d\varphi &< \\ &\leq \frac{1}{d^2(z_0)} \lim_{r \rightarrow 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\Psi'(re^{i\varphi})|^2 d\varphi < +\infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее, из определения (10) функции $\chi_1(\zeta, z)$ получим, что, при $0 < \rho < 1$,

$$\int_0^{2\pi} |\chi_1(\rho e^{i\varphi}, z_0)|^2 d\varphi = \frac{1}{\rho^2} \int_0^{2\pi} \left| \chi\left(\frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}, z_0\right) \right|^2 d\varphi.$$

откуда и из (11) следует, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sup \int_0^{2\pi} |\chi_1(\rho e^{i\varphi}, z_0)|^2 d\varphi \leq M(z_0) < +\infty. \quad (12)$$

Но, как указывалось выше, при любом $z \in D$ функция $\chi_1(\zeta, z)$ голоморфна в круге $|\zeta| < 1$; поэтому (12) означает, что $\chi_1(\zeta, z) \in H_2$ в круге $|\zeta| < 1$, при $z \in D$. Лемма доказана.

Пусть $\{z_k\}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) — некоторая последовательность комплексных чисел, лежащих в круге $|\zeta| < 1$, нумерованных в порядке

$$0 \leq |z_0| \leq |z_1| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$$

Составим систему рациональных функций

$$\Phi_0(\zeta) = c_0(1 - |z_0|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - \bar{z}_0 \zeta},$$

$$\Phi_n(\zeta) = c_n(1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - \bar{z}_n \zeta} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\zeta - z_k}{1 - \bar{z}_k \zeta}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

с полюсами на последовательности $\{\bar{z}_n^{-1}\}$, где $c_0, c_1, \dots$ — любая последовательность комплексных чисел, для которых $|c_0| = |c_1| = \dots = 1$.

Известно [1], что система функций $\{\Phi_n(\zeta)\}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), ортогональна на единичной окружности $|\zeta| = 1$, причем

$$\int_{|\zeta|=1} \Phi_n(\zeta) \overline{\Phi_m(\zeta)} |d\zeta| = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2\pi, & m = n. \end{cases} \quad (13)$$

Лемма 2. Пусть граница L области D принадлежит к классу U ; если

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |z_n|) = +\infty, \quad (14)$$

то справедливо разложение

$$\chi(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) \psi_n(w), \quad (15)$$

где

$$\psi_n(w) = \frac{1}{w} \overline{\Phi_n\left(\frac{1}{w}\right)}, \quad (16)$$

$$A_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} \chi(w, z) \overline{\psi_n(w)} |dw|, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (17)$$

в среднем сходящееся на окружности $|w| = 1$, при этом равномерно относительно $z \in \bar{D}_1 \subset D$.

Доказательство. Известно [1], что при условии (14) система $\{\Phi_n(\zeta)\}$ полна в классе функций H_2 . Поэтому, так как по лемме 1 функция $\chi_1(\zeta, z)$ принадлежит к классу H_2 в круге $|\zeta| < 1$ при $z \in D$, то для коэффициентов Фурье функции

$$a_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \chi_1(t, z) \overline{\Phi_n(t)} |dt| \quad (18)$$

справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} |\chi_1(t, z)|^2 |dt| \leq M(z) < +\infty. \quad (19)$$

Из определения (10) функции $\chi_1(\zeta, z)$ и из формул (18), (16) и (17) следует, что

$$a_n(z) = \overline{A_n(z)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (20)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \overline{a_n(z)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \overline{\chi_1(t, z)} \Phi_n(t) |dt| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{1}{t} \chi\left(\frac{1}{t}, z\right) \Phi_n(t) |dt| = \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} w \chi(w, z) \Phi_n\left(\frac{1}{w}\right) |dw| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} \chi(w, z) \overline{\psi_n(w)} |dw| = A_n(z), \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Из (19) и (20) и из того очевидного факта, что интеграл

$$\int_{|t|=1} |\chi_1(t, z)|^2 |dt|$$

является непрерывной функцией от z в области D , по теореме Дини

заключаем, что $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z)|^2$ равномерно сходится внутри области D .

Отсюда и из очевидного тождества

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \left| \chi(\omega, z) - \sum_{k=0}^n A_k(z) \psi_k(\omega) \right|^2 d\omega = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \left| \chi(t, z) - \sum_{k=0}^n a_k(z) \Phi_k(t) \right|^2 dt = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(z)|^2 \end{aligned}$$

следует утверждение леммы.

Наконец, отметим, что в силу (16) для коэффициентов $\{A_n(z)\}$ будем иметь также следующее выражение:

$$A_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \chi(\omega, z) \Phi_n(\omega) d\omega, \quad (n=0, 1, \dots). \quad (17')$$

3°. Если последовательность комплексных чисел $\{\omega_k\}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) лежит в области G_∞ и функция $\omega = \Phi(z)$ имеет прежний смысл, т. е. конформно отображает область G_∞ на $|\omega| > 1$ при нормировке (1), то последовательность чисел

$$x_k = \frac{1}{\Phi(\omega_k)} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (20')$$

лежит внутри единичного круга $|\zeta| < 1$.

Теперь в определении (13) ортогональной системы $\{\Phi_n(\zeta)\}$, ($n=0, 1, 2, \dots$), выберем числа $\{x_k\}$ согласно (20); тогда при соответствующем подборе фигурирующих там постоянных $\{c_n\}$, $|c_n|=1$, ($n=0, 1, \dots$), будем иметь

$$\Phi_n(\zeta) = \varphi_n(\zeta), \quad (21)$$

где функции $\{\varphi_n(\zeta)\}$ были определены выше по формуле (3). Поэтому, если $z \in D$, то при

$$x_k = \frac{1}{\Phi(\omega_k)}, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

из формул (17'), (21) и (8) будем иметь

$$\begin{aligned} A_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \chi(\omega, z) \varphi_n(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_n[\Phi(\xi)]}{\xi - z} d\xi, \quad (n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Но по формуле (6), дающей интегральное представление для функций $M_n(z)$ ($n=0, 1, \dots$), порожденных континуумом $K=D+L$, имеем также

$$M_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_n[\Phi(\xi)]}{\xi - z} d\xi, \quad (n=0, 1, 2, \dots);$$

поэтому

$$A_n(z) = M_n(z), \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (22)$$

Таким образом, из (22), а также из сказанного выше, следует, что лемму 2 можно сформулировать и таким образом:

Лемма 2'. Пусть граница L области D принадлежит к классу U . Пусть $\{M_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — последовательность рациональных функций, порожденная континуумом $K = D + L$ и последовательностью комплексных чисел $\{\omega_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Если

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|\Phi(\omega_n)| - 1) = +\infty, \quad (23)$$

тогда справедливо разложение

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(z) \psi_n(w), \quad (24)$$

в среднем сходящееся на окружности $|w| = 1$, при этом равномерно относительно $z \in \bar{D}_1 \subset D$, где

$$\psi_n(w) = \frac{(|\Phi(\omega_n)|^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{1 - \Phi(\omega_n)w} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{w - \Phi(\omega_k)}{1 - \Phi(\omega_k)w}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (25)$$

Наконец, сформулируем и докажем основной результат данной статьи.

Теорема. Пусть граница L области D принадлежит к классу U . Пусть $\{M_n(z)\}$ ($n = 0, 1, \dots$) — последовательность рациональных функций, порожденная континуумом $K = D + L$ и последовательностью комплексных чисел $\{\omega_n\}$, ($n = 0, 1, \dots$), удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|\Phi(\omega_n)| - 1) = +\infty.$$

Если функция $f(z)$ голоморфна внутри области D и непрерывна в $\bar{D}$, то имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n M_n(z), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} f[\Psi(w)] \psi_n(w) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\xi) \psi_n[\Phi(\xi)] \Phi'(\xi) d\xi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (27)$$

равномерно сходящееся внутри области D .

Доказательство. Если $z \in D$, то имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} f[\Psi(\omega)] \chi(\omega, z) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L f[\Psi(\omega)] \left\{ \chi(\omega, z) - \sum_{k=0}^n M_k(z) \phi_k(\omega) \right\} d\omega + \\ &+ \sum_{k=0}^n c_k M_k(z) = J_1^{(n)} + J_2^{(n)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Но имеем очевидную оценку

$$\begin{aligned} |J_1^{(n)}| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \max_{\xi \in L} |f(\xi)| \left\{ \int_{|\omega|=1} \left| \chi(\omega, z) - \sum_{k=0}^n M_k(z) \phi_k(\omega) \right|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

откуда по лемме 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_1^{(n)} = 0, \quad (29)$$

при этом равномерно относительно z внутри области D .

Из тождества (28) и из (29) следует утверждение теоремы.

Вопрос о том, единственно ли разложение (26) в общем случае, когда полюсы $\{\omega_k\}$ сгущаются к границе L области, пока остается открытым.

Ереванский Государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило 13 XI 1956

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ՝ G_∞ ԲԵՎԵՌՆԵՐԻ ՏՎԱԾ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆ
ՈՒՆԵՑՈՂ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՇԱՐՔԻ ՎԵՐԱԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Թող K -ն լինի մեկից ավելի կետ պարունակող իրականացվող
կոնախնուում, իսկ G_∞ -ն՝ վերջինիս կից այն տիրույթը, որը պարունակում է
է $z = \infty$ կետը: G_∞ տիրույթը կլինի միակապ և նրա եզրը՝ $L \in K$:
Թող

$$\omega = \Phi(z); \quad \Phi(\infty) = \infty, \quad \Phi'(\infty) > 0$$

Ֆունկցիան G_∞ տիրույթը կոնֆորմ կերպով արտապատկերի $|\omega| > 1$ շերտի
արտաքին մասի վրա և թող $z = \Psi(\omega)$ լինի այդ ֆունկցիայի հա-
կադարձ ֆունկցիան:

Կոտեմք, որ L կորը պատկանում է U դասին (կարճ՝ $L \in U$), եթե

$$\lim_{r \rightarrow 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |W(re^{i\theta})|^2 d\theta < +\infty,$$

Թող $\{\omega_k\}$, ($k=0, 1, \dots$) լինի կոմպլեքս թվերի հաջորդականություն, որոնց պատկերները բնկած են G_∞ տիրույթում և որոնք համադրակալված են տեղեկա, որ տեղի ունի (2) պայմանը: Նշենք, որ բացառված չէ նաև

$$\omega_0 = \omega_1 = \dots = \omega_N = \infty, \quad 0 \leq N \leq \infty \quad (u)$$

գեպքը:

Դիտարկում ենք $|\varphi_n[\Phi(z)]|$ ֆունկցիաների (3) հաջորդականությունը: Այդ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը հոլոմորֆ է G_∞ տիրույթում, բացառությամբ վերջավոր թվով կետերի, որոնցում նրանք բևեռներ ունեն: $M_n(z)$ -ով նշանակենք $\varphi_n[\Phi(z)]$ ֆունկցիայի գլխավոր մասը:

(u) գեպքում, երբ $N = \infty$ (1)-ից և (3)-ից կունենանք (4) հավասարությունը, որից բխում է, որ այդ գեպքում $M_n(z)$ -ը կլինի ֆարերի ռ-ից բազմանգամը՝ զրկած K կոնտինուումի համար: Այդ պատճառով էլ բնական է բնդհանուր գեպքում $|M_n(z)|$ ($n=0, 1, \dots$) անվանել աացիոնալ ֆունկցիաների սխառմ՝ առաջացած K կոնտինուումի և $\{\omega_k\}$ հաջորդականությամբ միջոցով:

Ներկա աշխատանքի հիմնական արդյունքն է հետևյալ թեորեմը.

Թող D տիրույթի L եզրագիծը պատկանի U դասին, իսկ $|M_n(z)|$ -ը լինի աացիոնալ ֆունկցիաների սխառմ՝ առաջացած $K=D+L$ կոնտինուումի և կոմպլեքս թվերի $\{\omega_n\}$ հաջորդականության միջոցով, որը բավարարում է $\sum_{n=0}^{\infty} (|\Phi(\omega_n)| - 1) = +\infty$ պայմանին:

Եթե $f(z)$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է D -ում և անընդհատ է $\bar{D}$ -ում, ապա տեղի ունի (26)–(27) վերլուծությունը, որը հավասարաչափ զուգամետ է D տիրույթի ներսում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Walsh J. L. Interpolation and Approximation. X. 1935.