ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ X, № 1, 1957 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

А. Л. Шагинян

К теоремам Шотки и Пикара

1. Пусть $f(z)$—аналитическая функция, заданная рядом Тейлора в окрестности начала координат. Обозначим через Σ поверхность Римана этой функции, получаемую всевозможными аналитическими продолжениями заданного элемента, а Ω пусть будет некоторая подобласть Σ, содержащая начало координат; в частности, допускается совпадение Ω с Σ.

В настоящей работе мы установим теорему Шотки для Ω, в частности и для Σ. Отсюда, естественно, следует утверждение, связанное с теоремой Пикара.

В качестве следствия получаем условия, которым должна удовлетворять функция $f(z)$ для того, чтобы она принимала в Ω либо в Σ всевозможные значения, кроме, быть может, одного значения.

Если бы Σ либо Ω были достаточно простые области и можно было при их отображении на круг либо плоскость иметь количественные оценки искажения, при переходе от одной переменной к другой, то установление указанных результатов не представляло бы трудности.

Однако Σ, как и Ω, вообще говоря, могут представлять многолистные и бесконечно связные поверхности, для которых нет соответствующих оценок искажения, и поэтому получить вышеупомянутые количественные результаты путем сведения к кругу либо плоскости нельзя.

Но эти оценки можно получить прямым путем, что и составляет существо настоящей статьи.

2. Границу римановой поверхности Σ обозначим через $S(\Sigma)$, а границу Ω через $S(\Omega)$.

Произвольную точку P поверхности Ω можно достигнуть из начала координат, оставаясь внутри Ω, какой-либо спрямляемой дугой L. Длину L обозначим через l.

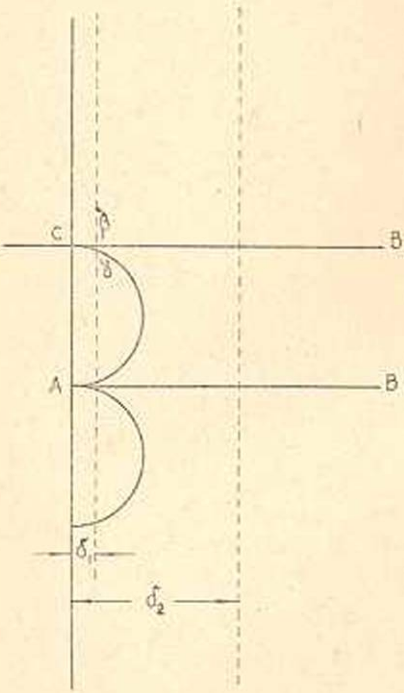
Пусть s — дуговое расстояние переменной на L точки Q от начала, $\rho(s)$ — расстояние точки Q до $S(\Omega)$.

3. Наконец, возьмем на правой половине ζ — плоскости криволинейный треугольник с нулевыми углами A, B, C, ограниченный полупрямыми AB $(Im\zeta = -1)$, CB $(Im\zeta = 0)$ и полуокружностью с диаметром AC (фиг. 1). Отображая конформно треугольник ABC на

полуплоскость $Imw > 0$ так, чтобы точки $\zeta = 0, -i, \infty$ перешли соответственно в 0, 1, ∞, получим модулярную функцию

$$w = \lambda(\zeta),$$

которая аналитически продолжается на всю полуплоскость $R\zeta > 0$ и отображает ее на универсальную поверхность наложения (у. п. н.) плоскости w с выключенными точками $w = 0, 1, \infty$.



Фиг. 1.

Обратную функцию, отображающую у. п. н. на $R\zeta > 0$, обозначим через

$$\zeta = \nu(w)$$

(ср. [1], стр. 14—29).

4. Для области Ω можно сформулировать теорему Шотки следующим образом.

Теорема 1. Если в Ω функция $f(z)$ не принимает конечных значений a и b, то в любой точке P поверхности Ω имеет место оценка

$$\lg\left|\frac{f(z)-a}{b-a}\right| < ke^{2\int\limits_{L}\frac{ds}{\rho(s)}} + \text{const}, \tag{1}$$

где const — *абсолютная постоянная, а*

$$K < 1 + \left|\nu\left[\frac{f(0)-a}{b-a}\right]\right| + \frac{1}{4R\nu\left[\frac{f(0)-a}{b-a}\right]}.$$

Неравенство (1) и есть неравенство Шотки для $f(z)$.

Доказательство. Рассмотрим, как это принято в таких задачах, функцию

$$\nu\left[\frac{f(z)-a}{b-a}\right] = \psi(z) \quad .$$

Функция $\frac{f(z)-a}{b-a}$ не принимает в Ω значений 0, 1, ∞; поэтому ее значения попадают внутрь упомянутой у. п. н. и, следовательно, в Ω

$$R\psi(z) > 0.$$

Обозначим

$$\psi(z) = u + iv. \tag{2}$$

Оценим функцию u в произвольной точке $P \in \Omega$. Для этого заметим, что для гармонической и положительной в круге $|z| < R$ функции $\vartheta(x, y)$ имеет место оценка

$$\vartheta(0, 0)\frac{R-r}{R+r} < \vartheta(x, y) < \vartheta(0, 0)\frac{R+r}{R-r}, \tag{3}$$

где $r = |z|$. В частности, применив это неравенство для точки, бесконечно близкой к $z = 0$, и обозначив через $d\vartheta$ дифференциал функции $\vartheta(x, y)$ при переходе от точки $(0, 0)$ к бесконечно близкой точке

$(\Delta x, \Delta y)$, расположенной на некоторой дуге, проходящей через $(0, 0)$, и, наконец, обозначив бесконечно малую дугу через ds,

$$ds \sim dr,$$

получим из предыдущего неравенства

$$\left| \frac{d\vartheta}{ds} \right| \leqslant 2 \frac{\vartheta}{R}. \tag{4}$$

Здесь ϑ и $\dfrac{d\vartheta}{ds}$ — значения этих величин в центре круга.

Так как в нашем случае в (2) функция u положительная на поверхности Ω, то неравенство (4) можно применить к функции u в любой точке дуги L и получим

$$\left| \frac{du(s)}{ds} \right| \leqslant 2 \frac{u(s)}{\rho(s)}, \tag{5}$$

где через $u(s)$ обозначено ради краткости значение $u(x, y)$ в точке $Q(s) \in L$.

Интегрируя (5) по длине дуги L от начала координат до точки P, получим

$$u(0)\, e^{-2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} < u(P) < u(0)\, e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}$$

или

$$R\nu\left[\frac{f(0)-a}{b-a}\right] e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} < u(P) < R\nu\left[\frac{f(0)-a}{b-a}\right] e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} \tag{6}$$

Это неравенство показывает, что значение функции

$$\nu\left[\frac{f(z)-a}{b-a}\right]$$

в точке P римановой поверхности Σ попадает в полосу

$$R\nu\left[\frac{f(0)-a}{b-a}\right] e^{-2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} < R\zeta < R\nu\left[\frac{f(0)-a}{b-a}\right] e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} \tag{7}$$

(область $\delta_1 < R\zeta < \delta_2$, на фиг. 1, где через δ_1 и δ_2 обозначены соответственно левая и правая части неравенства (7).

5. Оценим теперь в точке P функцию $\psi(z)$.

Поместив временно начало координат в точке $Q(s)$ кривой L, применим в круге $|z| < r < \rho(s)$ формулу Шварца

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=r} u \frac{t+z}{t-z} d\alpha + iv(0);$$

здесь $t = re^{i\alpha}$; значения $u(z)$ и $\psi(z)$ в точке $z=0$ обозначены соответственно через $u(s)$ и $\psi(s)$.

Из формулы Шварца следует

$$\left.\frac{d\psi}{dz}\right|_{z=0} = \frac{1}{\pi}\int \frac{u\,d\alpha}{t},$$

а отсюда

$$\left|\frac{d\psi}{ds}\right| \leqslant \frac{1}{\pi r}\int u\,d\alpha = \frac{2u(s)}{r},$$

и так как $u(s) \leqslant |\psi(s)|$ и $|d\psi| \geqslant |d|\psi||$, то получим для $|\psi(s)|$ следующее дифференциальное неравенство:

$$\left|\frac{d|\psi(s)|}{ds}\right| \leqslant 2\,\frac{|\psi(s)|}{r}$$

или

$$\left|\frac{d\lg|\psi(s)|}{ds}\right| \leqslant \frac{2}{r}.$$

Здесь левая часть не зависит от r; поэтому, беря $r \to \rho(s)$, получим окончательно

$$\left|\frac{d\lg|\psi(s)|}{ds}\right| \leqslant \frac{2}{\rho(s)}. \tag{8}$$

Интегрируя это неравенство вдоль дуги L, от $s=0$ до $s=l$, получим

$$\lg\left|\frac{\psi(s)}{\psi(0)}\right| \leqslant 2\int_L \frac{ds}{\rho(s)}$$

или

$$|\psi(s)| = |\psi(P)| \leqslant |\psi(0)|\, e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}. \tag{9}$$

Интегрируя вдоль той же дуги, но в обратном порядке, получим

$$|\psi(P)| \geqslant |\psi(0)|\, e^{-2\int\limits_0^l \frac{ds}{\rho(s)}}. \tag{10}$$

Таким образом, заключаем, что функция

$$\zeta = \psi(z)$$

отображает Ω на некоторую однолистную область D, составляющую часть кругового сегмента, ограниченного отрезком прямой

$$R\zeta = |R\psi(0)|\, e^{-2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} = \delta_1$$

и другой окружности

$$|\zeta| = |\psi(0)|\, e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} = \delta_2.$$

Рассмотрим на фиг. 2 криволинейный пятиугольник $\alpha\varkappa\nu\vartheta\mu$, где отрезок $\nu\vartheta$ лежит на прямой

$$R\zeta = \left(1+|\psi(0)|+\frac{1}{4|R\psi(0)|}\right) e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} \tag{11}$$

Не трудно видеть, что указанный пятиугольник покрывает область D и при инверсии относительно окружностей I и II отрезок $\nu\vartheta$ переходит в дугу, целиком лежащую слева от прямой

$$R\zeta = \delta_1 = |R\psi(0)|\, e^{-2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}$$

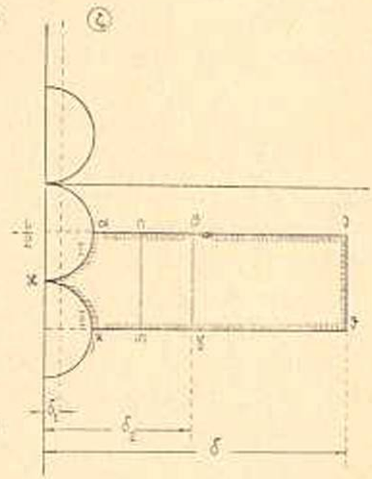
Очевидно, при этом

$$\max|\lambda(\zeta)|$$

в полосе

$$\delta_1 \leqslant R\zeta \leqslant \left(1+|\psi(0)|+\frac{1}{4|R\psi(0)|}\right) e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} \tag{12}$$

достигается на отрезке $\nu\vartheta$.



Фиг. 2.

Функция $w=\lambda(\zeta)$ отображает бесконечную криволинейную полосу $\alpha\varkappa\mu\infty$ на полуплоскость $Rw > \frac{1}{2}$ с выключенным отрезком $0 < u \leqslant 1$.

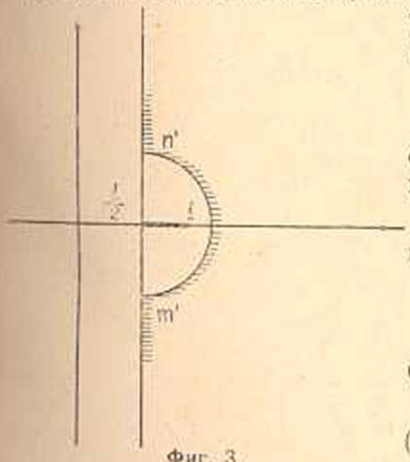
Эту область обозначим через D'. Не выписывая явным образом, обозначим через

$$t = \chi(w)$$

элементарную функцию, отображающую область D' на полуплоскость

$$Rt > 0$$

плоскости комплексного аргумента $t = u' + iv'$ таким образом, чтобы точка $w=1$ перешла в $t=1$, а луч $1 \leqslant u < \infty$ в луч $0 \leqslant u' < \infty$.



Фиг. 3.

Функция

$$t = \chi(\lambda(\zeta))$$

отображает полосу $\alpha\varkappa\mu\infty$ в полуплоскость $Rt > 0$.

Заметим, что при этом равномерно в D'

$$\lim_{w\to\infty}\frac{\chi(w)}{w} = 1.$$

Отрезку mn, лежащему на прямой

$$R\zeta = 1$$

(фиг. 2), соответствует на фиг. 3 дуга $m'n'$.

Справа от дуги $m'n'$ в полуплоскости $Rw > \frac{1}{2}$

$$|\chi(w)| > c \,|w|, \tag{13}$$

где c — постоянная >0. И, следовательно,

$$|\chi(\lambda(\zeta))| > c|\lambda(\zeta)|. \tag{14}$$

Функция

$$\xi = \lg \chi(\lambda(\zeta))$$

отображает криволинейную симметричную полосу $\alpha\varkappa\mu\infty$ на бесконечную в обе стороны полосу $|Im\,\xi| < \frac{\pi}{2}$, причем точка $\varkappa$ переходит в $\xi = -\infty$, точка $\zeta = \infty$ переходит в $\xi = \infty$ и прямая $Im\zeta = -1$ — в вещественную ось.

К этой функции применим известное второе неравенство Альфорса (ср. [2], стр. 12—16) в промежутке

$$1 < R\zeta < \delta.$$

Не выписывая здесь неравенства Альфорса, напишем результат, который получается при его применении в нашем случае.

Получаем

$$\left|\lg \chi(\lambda(\zeta))\right|_{\zeta \in \nu\vartheta} < \text{const} + \pi\delta, \tag{15}$$

где const абсолютная.

Тем более

$$\lg|\chi(\lambda(\zeta))|_{\zeta \in \nu\vartheta} < \text{const} + \pi\delta.$$

Учитывая (14), получим

$$\lg|\lambda(\zeta)|_{\zeta \in \nu\vartheta} < \text{const} + \pi\delta$$

или

$$\lg|\lambda(\zeta)|_{\zeta \in \nu\vartheta} < \text{const} + k\exp\left\{2\int_L \frac{de}{\rho(s)}\right\}, \tag{16}$$

где

$$k = 1 + |\psi(0)| + \frac{1}{4|R\psi(0)|}. \tag{17}$$

Неравенство (16) дает оценку $\max|\lambda(\zeta)|$ в многоугольнике $\varkappa\alpha\nu\vartheta\mu$, покрывающем D. Следовательно, в точке P области Ω

$$\lg\left|\frac{f(z)-a}{b-a}\right| < \text{const} + k\cdot e^{2\int_L \frac{ds}{\rho(s)}} \tag{18}$$

где const абсолютная, а

$$k = 1 + \left| \nu \left[\frac{f(0)-a}{b-a} \right] \right| + \frac{1}{4 \left| R\nu \left[\frac{f(0)-a}{b-a} \right] \right|} \tag{19}$$

Теорема 1 доказана.

6. Из теоремы 1 вытекает в качестве следствия следующая

Теорема 2. *Если в области* Ω

$$\overline{\lim_{z \in \Omega}} \frac{\lg |f(z)|}{e^{2 \int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}} = \infty, \tag{20}$$

где верхний предел берется по всем точкам $z \in \Omega$ *и по всем дугам* L, *соединяющим начало координат с* z, *то функция* $f(z)$ *принимает в* Ω *всевозможные значения, кроме, быть может, одного.*

В самом деле, если $f(z)$ при выполнении условия (20) не принимала бы в Ω двух значений a и b, то для нее имели бы место оценки (18)—(19). С другой стороны, беря сколь угодно большое число d, имели бы, согласно (20), в некоторой точке s,

$$|f(z)| > d \cdot e^{2 \int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}$$

Очевидно, при достаточно большом d это противоречит неравенствам (18)—(19).

Замечание. Обозначив расстояние дуги L до границы $S(\Omega)$ через Δ, а длину L через l, можно в теореме 2 условие (20) заменить более простым

$$\overline{\lim_{z \in \Omega}} \frac{\lg |f(z)|}{e^{2l/\Delta}} = \infty. \tag{21}$$

Покажем на частном примере, что условия (20) и (21), вообще говоря, необходимы.

Построим пример функции, для которой

$$\lim_{z \in \Omega} \frac{\lg |f(z)|}{e^{2 \int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}} < \infty,$$

при этом функция $f(z)$ допускает в области Ω более одного исключительного значения.

Примером такой функции может служить функция e^{e^z} в полосе $|Imz| \leq \frac{\pi}{2}$.

В этой полосе $\lim\limits_{z \in \Omega} \frac{\lg \left| e^{e^z} \right|}{e^{2 \int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}}$, очевидно, будет конечной величиной.

Одновременно видно, что в этой полосе функция e^{e^z} не может принимать значений $e^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$.

Однако в этой же полосе, согласно теореме 1, функция

$$e^{e^z} \lg (z - iz)$$

принимает любые значения, кроме значения нуль.

7. В случае, когда Ω однолистна и ограничена, теорему 2 можно выразить в других терминах, удобных при распространении на пространственный случай. В этом параграфе в дальнейшем речь идет о таких Ω.

Определение. Возьмем внутри Ω произвольную односвязную область Ω', содержащую одновременно начало координат и точку P. Расстояние области Ω' от границы $S(\Omega)$ обозначим через

$$\delta(\Omega').$$

Верхнюю грань расстояний $\delta(\Omega')$

$$\sup \delta(\Omega')$$

обозначим через $\delta(P, \Omega)$ и будем называть обобщенным расстоянием точки P до границы $S(\Omega)$.

Это же определение имеет, очевидно, смысл и для любой односвязной либо многосвязной пространственной области Ω.

Из теоремы 1 следует, далее, следующая теорема.

Теорема 3. *Если Ω однолистна и лежит в круге $|r| < R$, то из условия*

$$\lim_{z \in \Omega} \frac{\lg |f(z)|}{e^{\frac{c}{\delta^2(z;\Omega)}}} = \infty, \tag{22}$$

где c — любое постоянное $> \pi R^2$, следует, что $f(z)$ принимает в Ω всевозможные значения, кроме, быть может, одного.

Наметим доказательство. Из неравенства (1) следует, что в случае двух исключительных значений a и b в любой точке P области Ω

$$|f(z)| < |a| + |b - a| \operatorname{const} \exp \left\{ e^{k \int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} \right\}$$

Согласно определению расстояния $\delta(P; \Omega)$, существует некоторая односвязная область $\Omega' \in \Omega$, покрывающая одновременно начало координат и точку P с расстоянием $\delta(\Omega')$, удовлетворяющим условию

$$\delta(\Omega') > \delta(P; \Omega) - \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое сколь угодно малое число.

Проведя на плоскости квадриляж со стороной $q\delta(\Omega')$, где $0 < q < 1$, и беря ломаную, состоящую из некоторых сторон этих квадратов, добавляя к ним, в случае необходимости, по одному прямолинейному отрезку внутри квадратов, содержащих точки 0 и P, получим ломаную L, для которой интеграл

$$\int\limits_{L} \frac{ds}{\rho(s)}$$

будет величиной порядка $\frac{c}{(\delta(\Omega')-\varepsilon)^2}$, где c постоянная $> \pi R^2$.

Следовательно, для таким образом подобранной L

$$|f(z)| < |a| + |b-a| \cdot \text{const} \exp\left\{ke^{\frac{c}{(\delta(\Omega')-\varepsilon)^2}}\right\}.$$

Но так как это имеет место при любом сколь угодно малом ε, то, перейдя к пределу, когда $\varepsilon \to 0$, получим

$$|f(z)| < |a| + |b-a| \,\text{const} \exp\left\{ke^{\frac{c}{\delta^2(P;\Omega)}}\right\}. \tag{23}$$

Отсюда вытекает теорема 3.

8. Пусть теперь L — произвольная жорданова кривая на поверхности Ω, с началом в точке $q=0$ и уходящая другим концом к границе $S(\Omega)$. Каждую конечную порцию L считаем спрямляемой. Обозначим через $q(s)$ произвольную положительную непрерывную функцию, удовлетворяющую единственному ограничению

$$q(s) \leq \rho(s).$$

Обозначим через $\Omega(L; q(s))$ область, составленную из всевозможных кругов с центрами в точках $Q(s) \in L$ и с радиусами $q(s)$.

Легко решить следующую задачу.

При каких ограничениях, накладываемых на значения $f(z)$ на кривой L, функция $f(z)$ будет иметь в области $\Omega(L; \alpha q(s))$, соответствующей любому значению $0 < \alpha < 1$, не более одного исключительного значения.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Если на кривой L

$$\varlimsup_{z \in L} \frac{\lg\lg|f(z)|}{\int\limits_0^l \frac{ds}{\rho(s)}} = \infty, \tag{24}$$

то $f(z)$ в любой области $\Omega(L; \alpha q(s))$, $0 < \alpha < 1$ имеет не более одного исключительного значения.

В равенстве (24) l есть дуговое, на L, расстояние точки $z \in L$ до начала координат.

Доказательство. Если бы $f(z)$ допускала в области $\Omega(L; \alpha q(s))$ более одного исключительного значения, то $f(z)$, согласно (1), удовлетворяла бы в любой точке $z \in L$ неравенству

$$|f(z)| < |a| + |b-a| \operatorname{const} \exp\left\{ke^{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^l \frac{dx}{\rho(s)}}\right\},$$

что противоречит условию (24). Тем самым доказывается утверждение теоремы 4.

Известно (G. Julia), что для любой целой функции $g(z)$ существует хотя бы один луч, такой, что в любом сколь угодно малом угле, покрывающем этот луч, функция $g(z)$ допускает не более чем одно исключительное значение.

Теорема 4 дает условие, когда в сколь угодно узкой полосе, окружающей кривую L, функция $f(z)$ обладает тем же свойством.

В связи с оценкой (1) напомним одну заметку H. Bohr'a [3]. Неравенство (1) содержит, в частности, результат этой заметки.

9. Сформулируем одну аналогичную теорему для пространственного случая.

Пусть Ω — произвольная односвязная либо многосвязная ограниченная область в пространстве p измерений.

Допустим Ω содержит начало координат 0 и сама содержится в сфере радиуса R с центром в 0.

Через $\delta(P; \Omega)$ обозначим обобщенное расстояние точки P до границы $S(\Omega)$, определенное в смысле § 7.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Если в области Ω для гармонической в ней функции $u(x_1, x_2, \ldots x_p)$

$$\overline{\lim}\, \delta^p \lg |u(x_1, x_2, \ldots x_p)| > 2p \frac{\pi^{\frac{p}{2}} R^p}{\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)}, \tag{25}$$

то функция u принимает в Ω всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Наметим доказательство.

Допустим функция u имеет в Ω сколь угодно большие положительные значения, однако нижняя грань значений u есть некоторая конечная величина C.

Функция

$$u(x_1, x_2, \ldots x_p) - C = u^*$$

есть некоторая неотрицательная и гармоническая в Ω функция.

Соединив точку 0 с точкой $P \in \Omega$ дугой L внутри Ω, имеем для любой точки $(x_1, x_2, \ldots x_p)$ внутри сферы радиуса $\rho(s)$ с центром в произвольной точке $Q(s) \in L$ оценку

$$u^*(s)\left(\frac{\rho-r}{\rho+r}\right)^p \leq u^*(x_1, \ldots x_p) \leq u^*(s)\left(\frac{\rho+r}{\rho-r}\right)^p,$$

где $\rho(s)$ есть расстояние точки $Q(s)$ до границы $S(\Omega)$ и r — расстояние внутренней точки $(x_1, x_2, \ldots x_p)$ сферы до центра $Q(s)$. Через $u^*(s)$ обозначено значение $u^*(x_1, x_2, \ldots x_p)$ в точке $Q(s)$.

Из этого неравенства таким же путем, как это было сделано в случае неравенства (3), получим неравенство

$$\left|\frac{du^*(s)}{ds}\right| \leqslant 2p\,\frac{u^*(s)}{\rho(s)}. \tag{26}$$

Это неравенство является аналогом неравенства (4).

Из (26) получаем

$$\lg\frac{u^*(s)}{u^*(0)} \leqslant 2p\int\frac{ds}{\rho(s)}.$$

Дальнейшие рассуждения почти не отличаются от того, что мы уже проделали в предыдущем изложении, поэтому их не приводим.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 22 I 1957

Ս. Հ. Շահինյան

ՇՈՏԿԻԻ ԵՎ ՊԻԿԱՐԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա հոդվածը պարունակում է հետևյալ արդյունքները։

1. Դիցուք $f(z)$ հոլոմորֆ փունկցիան տրված է սկզբնակետի շուրջն իր Թեյլորի շարքով։ Շարունակելով այդ շարքը բոլոր հնարավոր եղանակներով, նշանակենք Σ-ով նրա Ռիմանի մակերևույթը, իսկ $S(\Sigma)$-ով այդ մակերևույթի եզրագիծը։ Ընդհանուր դեպքում Σ-ն կլինի բազմակապ և բազմաթերթ մի մակերևույթ։ Նշանակենք Ω-ով այդ մակերևույթի մի որևէ մասը, որը պարունակում է իր մեջ սկզբնակետը։

Շոտկիի հայտնի անհավասարությունը ձևակերպված է շրջանի համար։ Ներկա հոդվածում մենք ստանում ենք Շոտկիի տիպի անհավասարություն Ω տիրույթի և մասնավորապես նաև Σ-ի համար։

2. Նշված է, թե ինչ պայմանի պետք բավարարի Ω-ում $f(z)$-ը, որպեսզի նա այդ տիրույթում ունենա մեկից ոչ ավել բացառիկ արժեք (տես (20)—(22) անհավասարությունները)։

3. Նշված է մի պայման ((24) հավասարությունը), որին պետք բավարարի տվյալ L կորի վրա $f(z)$ ֆունկցիան, որպեսզի նա այդ կորին ծածկող կամայական բարակ շերտում ընդունի ամեն արժեք, բացի, գուցե, մեկ արժեքից։

4. Կամայական P-չափանի տարածության մեջ որևէ Ω տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիան (25) պայմանին բավարարելիս, նա նույն տիրույթում չի ունենա բացառիկ արժեքներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Julia G.* Leçons sur les fonctions uniformes a point singulier essentiel isolé (Paris, Gauthier—Villars, 1923).
2. *Ahlfors Lars.* Untersuchungen zur theorie der Konformen Abbildung und der ganzen Funktionen (Acta Soc. Sc. Fenn. Nova Ser. A, I, 9, 1930, pp. 1—40).
3. *Bohr H.* En funtionsteoretisk Bemärkning (Nyt Tidsskr. for Mat., 27 (1916).