ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ: ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԿԵՆՍԱԲԱՆԱԿԱՆ ՀԱՆԴԵՍ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР. БИОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АРМЕНИИ

т. XXIV, № 5, 1971

УДК 62—50:007.51

В. Г. АБОВЯН, Э. В. ОГАНЕСЯН, Л. С. ГАМБАРЯН, В. С. АРУТЮНЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЕРАРХИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Одной из наиболее интересных особенностей развития современных наук является использование в них системного подхода, сущность которого заключается в рассмотрении любой организации как некоторой целесообразной совокупности элементов, единых и общих, постольку, поскольку для них существует одна и та же цель. Управлять такой системой—значит организовать достижение этой цели [1].

В настоящее время системный подход находит самое широкое применение в организации производства, экономике, социологии, физиологии и т. д. Он позволяет с некоторых единых позиций рассматривать изучаемые различными областями науки сложные процессы, протекающие в природе . Системный подход оказывается плодотворным как при анализе уже существующих структур, так и при попытке создания новых систем и организаций. В последнем случае мы, как правило, сталкиваемся с проблемой оптимизации, т. е. с проблемой оптимального выбора той или иной формы организации, а следовательно, того или иного способа достижения поставленной цели. Весьма общей чертой для всех форм организации является ее иерархическая структура, т. е. структура, при которой некоторая большая система управляет составляющими ее подсистемами, которые в свою очередь управляют системами более низшего порядка.

Как отмечает Норберт Винер [3], «...идея организации, элементы которой сами суть малые организации, не является чем-то новым и необычным, Свободные федерации древней Греции, Священная Римская империя, Швейцарская конфедерация, Соединенные Нидерланды, Соединенные Штаты Америки, Союз Советских Социалистических Республик—все это примеры иерархии организации в политической области».

А воззрение Лейбница, что «живой организм есть нечто целое, составленное из других живых организмов, таких, как кровяные тельца, имеющих собственную жизнь», также является примером наличия иерархической структуры в природе.

Одной из наиболее сложных проблем иерархической организации является установление взаимосвязи целей на различных уровнях. По всей видимости, можно полагать, что цели на низших уровнях формируются высшими целями, т. е. непосредственно вытекают из них. Только в этом случае «интересы» низшей системы будут совпадать с «интересами» высшей и, следовательно, только в этом случае мыслимо иерархическое управление.

«Ни одна организация, сколь обширной она не была бы по количеству составляющих ее элементов»,—говорит Анохин [1],—не может быть названа системой, если функционирование, т. е. взаимодействие частей этой организации, не заканчивается каким-либо полезным результатом... Система—это не простое взаимодействие, это интегрированные степени активности всех компонентов в одном единственном направлении—на получение необходимого в данный момент приспособительного результата». Описывая поведенческий акт животного, П. К. Анохин отмечает, что весь организм животного устремлен к фокусу результата, а следовательно, ни одна мышца тела не остается безучастной к получению полезного результата.

Такая организация обеспечивает максимальную эффективность процесса достижения глобальной цели.

Теперь сформулируем задачу, решение которой позволит разрабатывать оптимальные организации при создании промышленных или иных «искусственных» целенаправленных систем.

Пусть нам задан конгломерат в виде совокупности параметров X_1, X_2, . . . X_n с генеральной целью Y.

Наличие цели превращает этот конгломерат в систему, описываемую некоторым уравнением:

$$Y = F(X_1,\ X_2, \cdots X_n). \tag{1}$$

Параметр Y характеризует лишь качественную сторону цели, а в более уточненном виде необходимо приписать цели количественную меру.

Для определенности предположим, что функция (1) экстремальна, а целью системы является достижение экстремального значения функции $Y_э$.

Очевидно, что это значение достигается при определенных значениях аргументов $X_{1э}$, $X_{2э}, \cdots X_{nэ}$.

Таким образом, цель управления системой заключается в обеспечении этих значений аргументов.

Пусть для осуществления этого управления мы располагаем некоторым n-мерным автоматом. Тогда структура управления может быть представлена в следующем виде (рис. 1).

Автомат, постоянно контролируя состояние цели, воздействует на аргументы X_1. $X_2, \cdots X_n$ до тех пор, пока они не примут значения $X_{1э}$, $X_{2э} \cdots X_{nэ}$, т. е. пока они обеспечат достижение цели $Y_э$.

Предположим, что в нашем распоряжении имеются всего лишь автоматы с мерностью $\frac{n}{2}$. Тогда очевидно, что для управления системой потребуется два таких автомата, каждый из которых будет управлять числом параметров $\frac{n}{2}$. Структурная схема управления системой представлена на рис. 2.

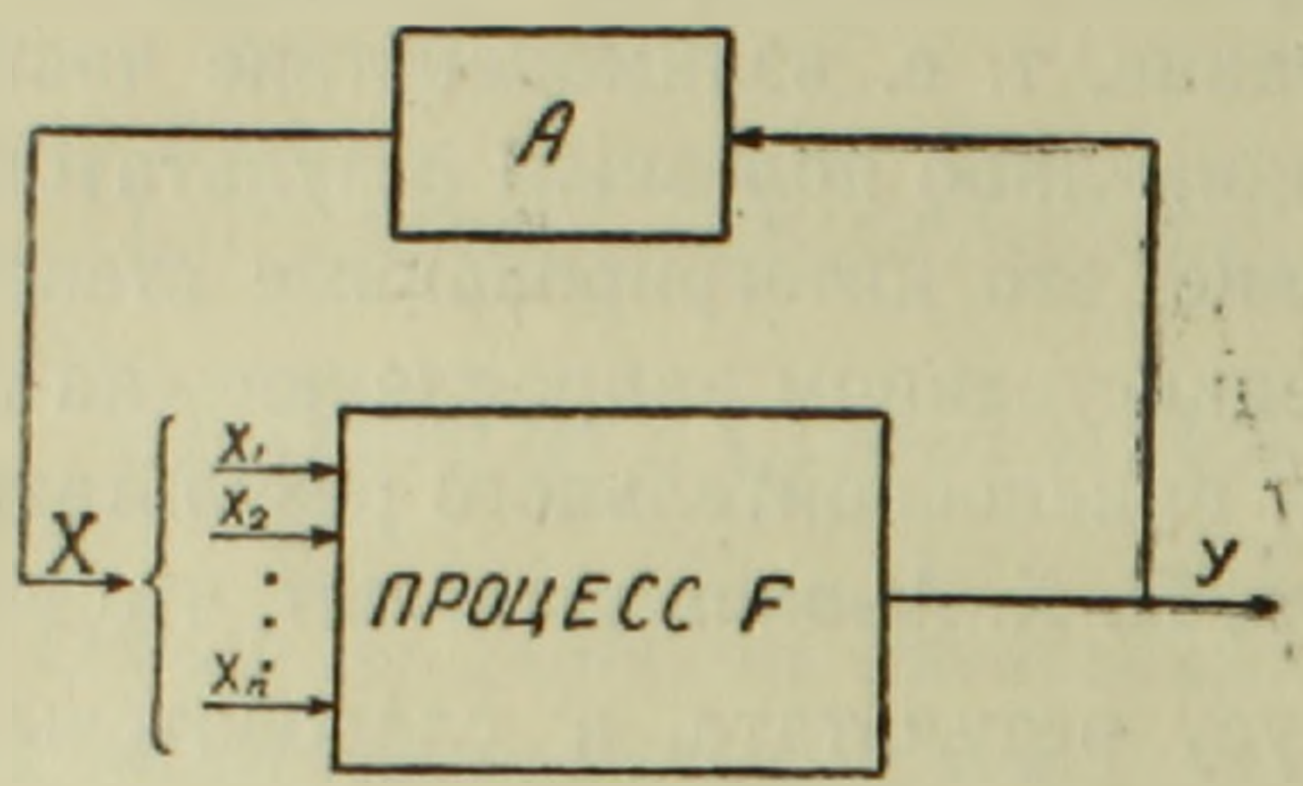

Рис. 1. Структура управления при наличии одного автомата.
A—n-мерный автомат; Y—состояние цели; X—управляющий сигнал.

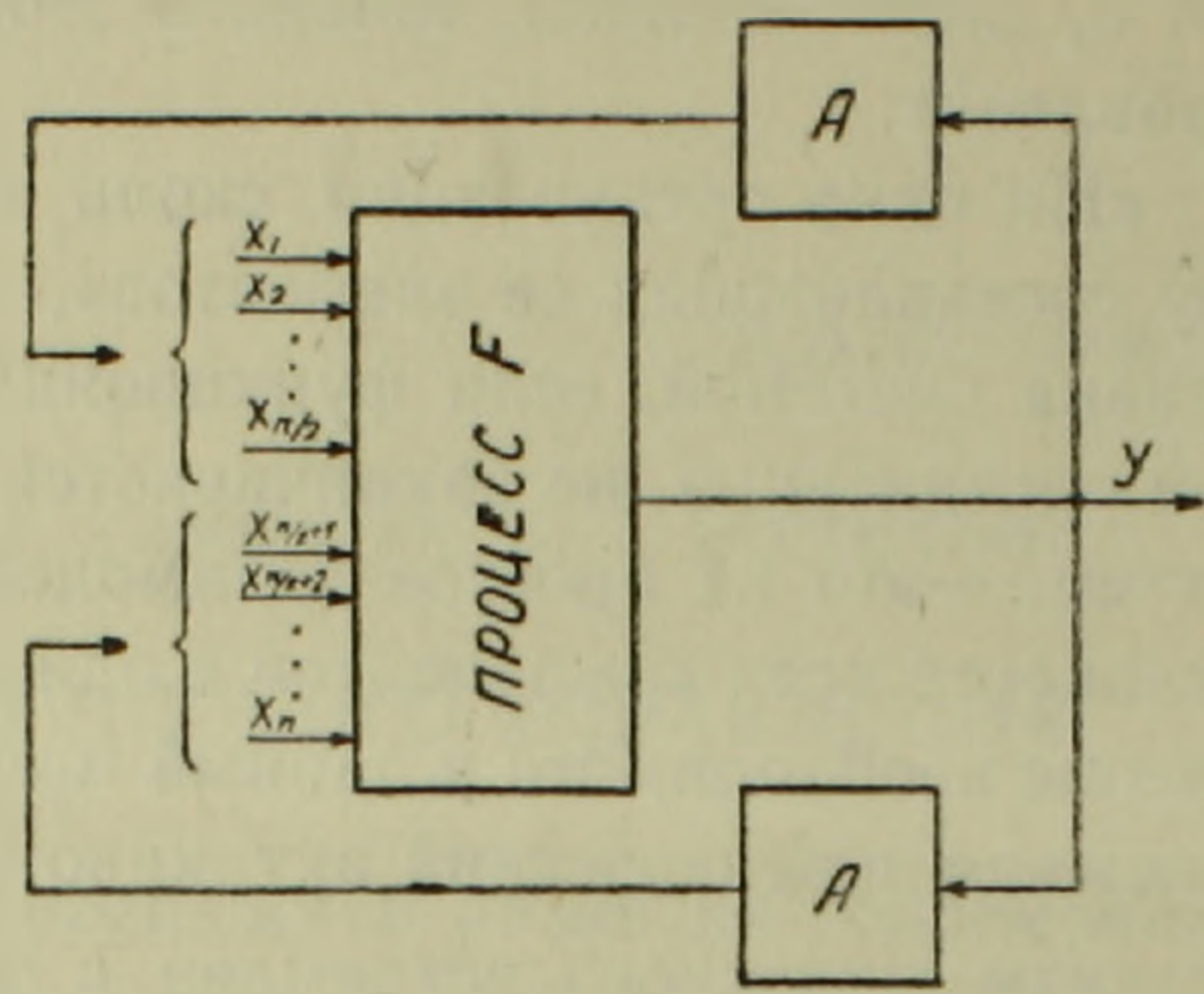

Рис. 2. Структура управления при наличии двух автоматов.
A—n/2—мерный автомат; Y—состояние цели; X—управляющий сигнал.

Каждый из представленных автоматов будет стремиться к некоторой собственной цели. Но поскольку каждый из них по природе своей экстремален, они попытаются установить экстремальное значение Y через группу собственных параметров. Грубо говоря, в создавшейся ситуации «интересы» обоих автоматов не совпадают, поскольку каждый из них осуществляет поиск в разных пространствах параметров. Попытаемся избавиться от этой неприятной ситуации введением дополнительных искусственно сформулированных целей Z_1 и Z_2.

Пусть это будет сделано так, чтобы цели удовлетворяли следующим экстремальным функциям:

$$Z_1 = \Phi_1 (X_1, X_2, \cdots X_{n/2}) \tag{2}$$

$$Z_2 = \Phi_2 (X_{n/2+1}, X_{n/2+2}, \cdots X_n) \tag{3}$$

$$Y = \Phi_3 (Z_1, Z_2), \tag{4}$$

В этом случае структурная схема управления может быть представлена в следующем виде (рис. 3).

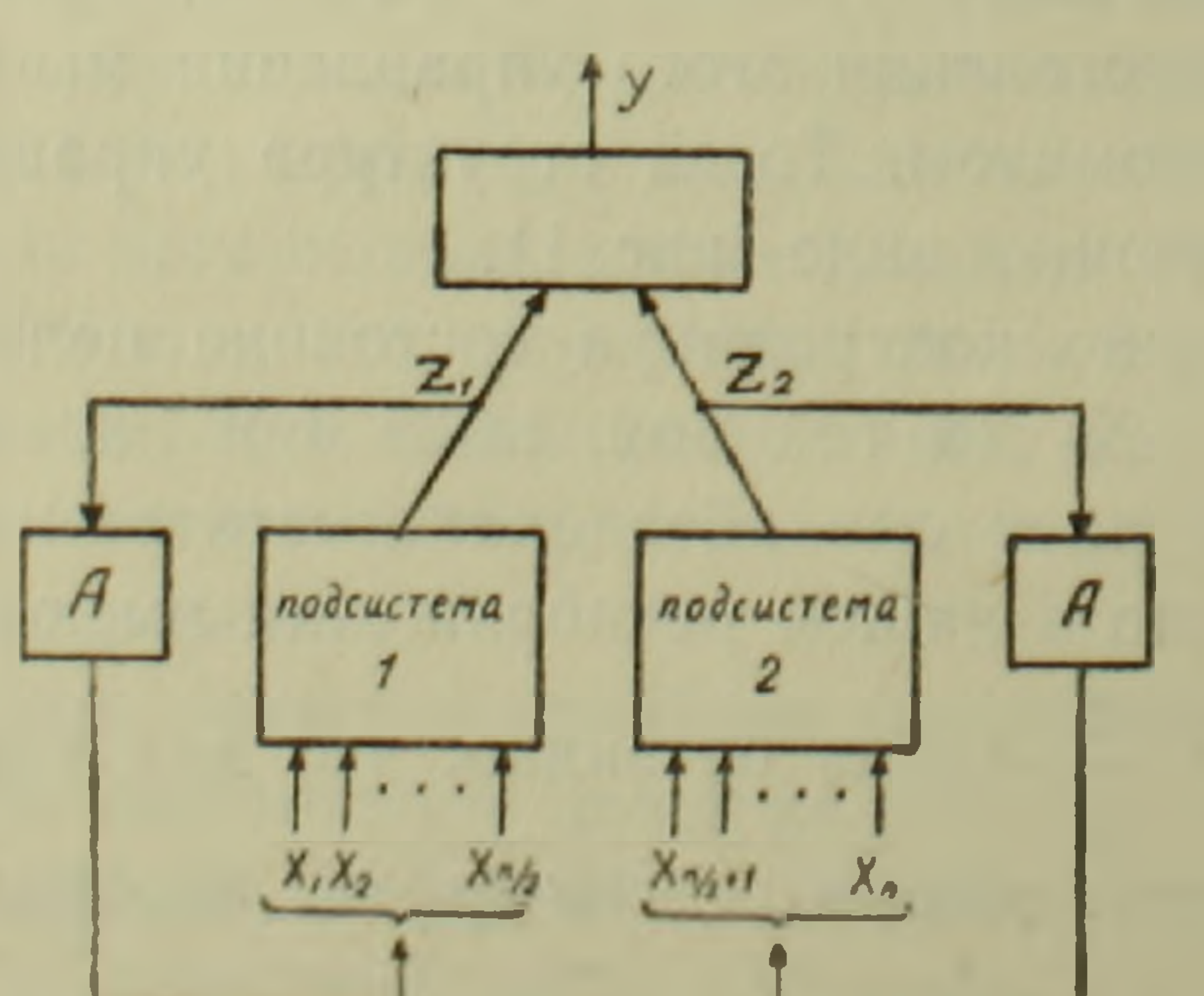

Рис. 3. Иерархическая структура управления.

Это уже типичная иерархическая структура. Если функция (4) построена так, что максимальным значениям Z_1 и Z_2 соответствует экстремальное значение $Y_э$, то регуляторы A_1 и A_2 обеспечат получение экстремального значения $Y_э$ через управление Z_1 и Z_2.

При этом «они не будут мешать друг другу» и, кроме того, «интересы» системы (экстремум Y) совпадают с «интересами» подсистемы (экстремумы Z_1 и Z_2), что контролируется уравнением (4). Совершенно очевидно, что если бы мы располагали автоматами с еще меньшей мерностью, то нам пришлось бы организовать более многоступенчатую иерархию. Однако для такой организации необходимо решить математическую задачу в следующей постановке.

В пространстве параметров $X_1, X_2, \ldots X_n$ задана некоторая экстремальная функция

$$Y = F(X_1, X_2, \cdots X_n),$$

достигающая своего экстремума при значениях $X_{1э}, X_{2э}, \cdots X_{nэ}$. Требуется в пространстве параметров $X_1, X_2, \cdots X_n$, где $k < n$, построить экстремальную функцию $Z = \varphi(X_1, X_2, \cdots X_k)$ так, чтобы ее экстремальное значение достигалось при значениях $X_{1э}, X_{2э}, \cdots X_{kэ}$.

Решение этой задачи позволит осуществить оптимальную иерархическую организацию систем. В этом остро нуждаются и экономисты, и производственники, и социологи, и все те, кто занимается проблемами управления сложных систем.

Рассмотрим в связи с этим одну проблему эффективности случайного поиска на различных уровнях иерархии (мерности пространства организации). Известно, что во многих алгоритмах случайного поиска выбор очередного направления осуществляется следующим образом. Вокруг центральной точки ставится k экспериментов, в результате чего получается k направлений, из которых выбирается лучшее в смысле градиента, и в этом направлении производится движение. Выбранное таким образом направление имеет вполне определенную вероятность, которая может быть найдена после решения приводимой ниже задачи. Пусть имеются случайные события $X_1, X_2, \cdots X_n$ с вероятностями появления $P(X_1), P(X_2), \cdots P(X_n)$, причем $\sum_{i=1}^{n} P(X_i) = 1$. С помощью k независимых опытов производится выборка некоторой совокупности элементов случайного события, а затем из этой совокупности выбирается один элемент, которому соответствует наибольшее значение некоторого показателя. Условимся, что величины X_i возрастают по порядку индексов. Требуется найти вероятность того, что после k опытов X_i будет наибольшим.

Нетрудно показать, что эта вероятность определяется из выражения

$$P_k(X_i) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} P^j(X_j) \left[\sum_{r=1}^{i-1} P(X_r)\right]^{k-j}, \tag{5}$$

где k число выборов, $P_k(X_i)$ — вероятность появления события X_i при k выборках.

В частном случае, когда события равноправны и $P(X_i) = \frac{1}{n}$ (n — число событий), получим

$$P_k(X_i) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\binom{k}{j}(i-1)^{k-j}}{n^k}. \qquad (6)$$

Для случая непрерывной выборки выражение (5) можно представить в следующем виде:

$$f_k(X) = kf_1(X)\left[\int_0^x f_1(X)\,dX\right]^{k-1}. \qquad (7)$$

В частном случае, когда X распределено по закону равномерной плотности и $f_1(X) = \frac{1}{n}$, имеем

$$f_k(X) = \frac{k}{n^k} X^{k-1}. \qquad (8)$$

Из уравнения (7) вытекает ряд следствий. Если количество опытов k разбить на две группы — q и k—q, то для этого случая справедливо уравнение

$$f_k(X) = f_{k-q}(X)\,F_q(X) + f_q(X)\,F_{k-q}(X), \qquad (9)$$

где $F_q(X)$ — функция распределения вероятностей:

$$F_q(X) = \int_0^x f_q(X)\,dX,$$

кроме того,

$$F_k(X) = F_{k-q}(X)\,F_q(X) = F_1^k(X) \qquad (10)$$

и

$$f_k(X) = kf_1(X)\,F^{k-1}(X). \qquad (10)$$

Если число опытов k разбить на три группы так, что $s+q+r=k$, то

$$F_k(X) = F_s(X)\,F_q(X)\,F_1^r(X). \qquad (12)$$

Следует отметить также, что при фильтрации случайных сигналов очередность выборки и фильтрации не влияет на конечный результат.

Используя выражение (7), можно получить обобщенное решение задачи, поставленной и решенной для случая одной выборки Растригиным [4]. Эта задача формулируется следующим образом.

В пространстве заданной мерности генерируются случайные направления с равномерной плотностью распределения вероятностей. Обозначив через φ угол между случайными и некоторыми наперед фиксированными направлениями, найдем плотность распределения угла, согласно Растригину [4]:

$$P(\varphi) = B_n \sin^{n-2} \varphi.$$ (1

Если выбор направления произвести при помощи k выборок, то плоность распределения, наилучшего в смысле близости к фиксированном направлению, выразится уравнением

$$P_k(\varphi) = kB_n^k \sin^{n-2} \varphi \left(\int_0^{\varphi} \sin \varphi \, d\varphi \right)^{k-1}.$$ (1

На рис. 4, 5 и 6 приведены кривые $P_k(\varphi)$ для случаев $n = 2$, $n = 5$ $n = 25$ при разных k. При $k = 1$ кривые соответствуют формуле (13)

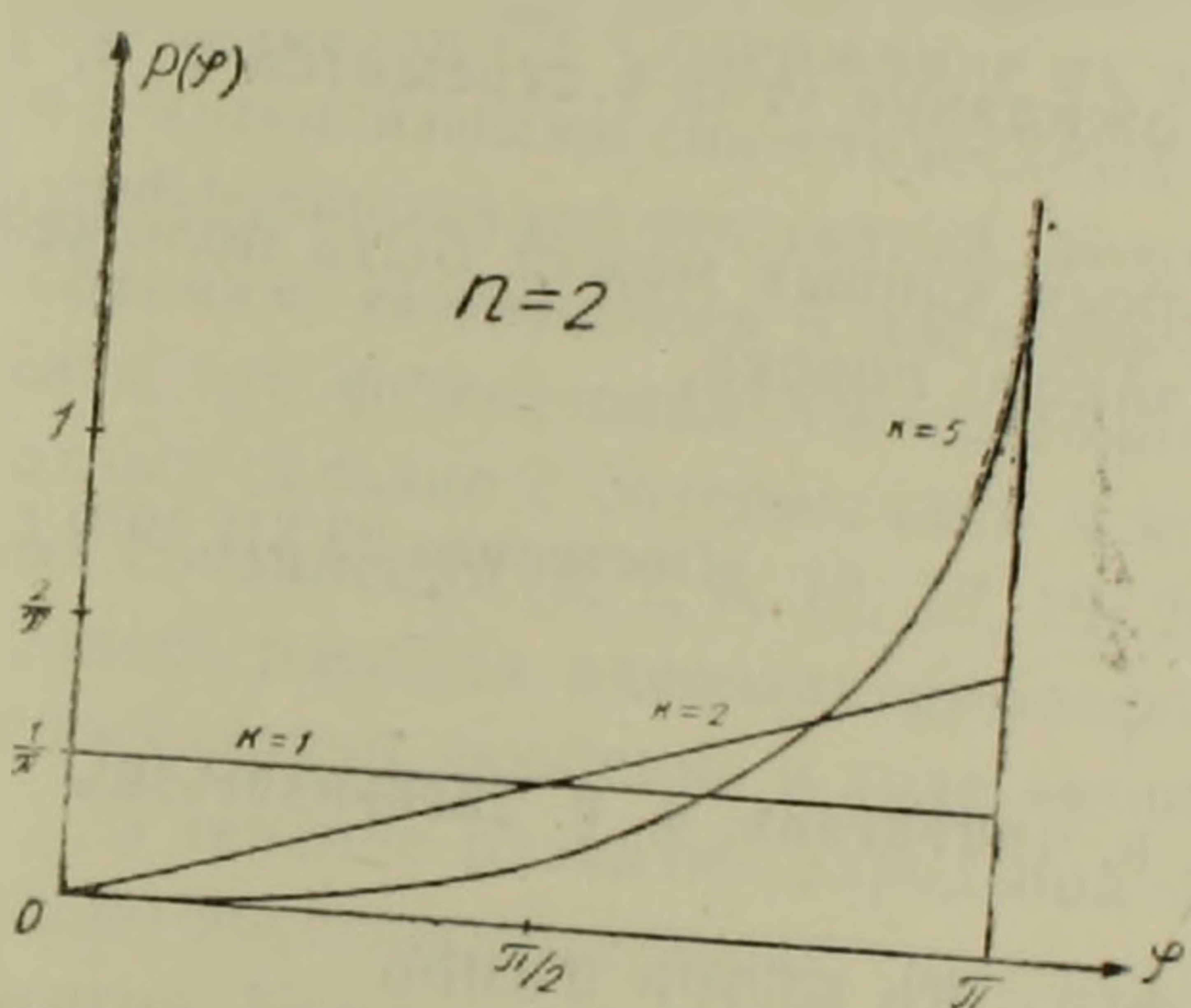

Рис. 4. Кривые распределения $P_k(\varphi)$ при $n = 2$.

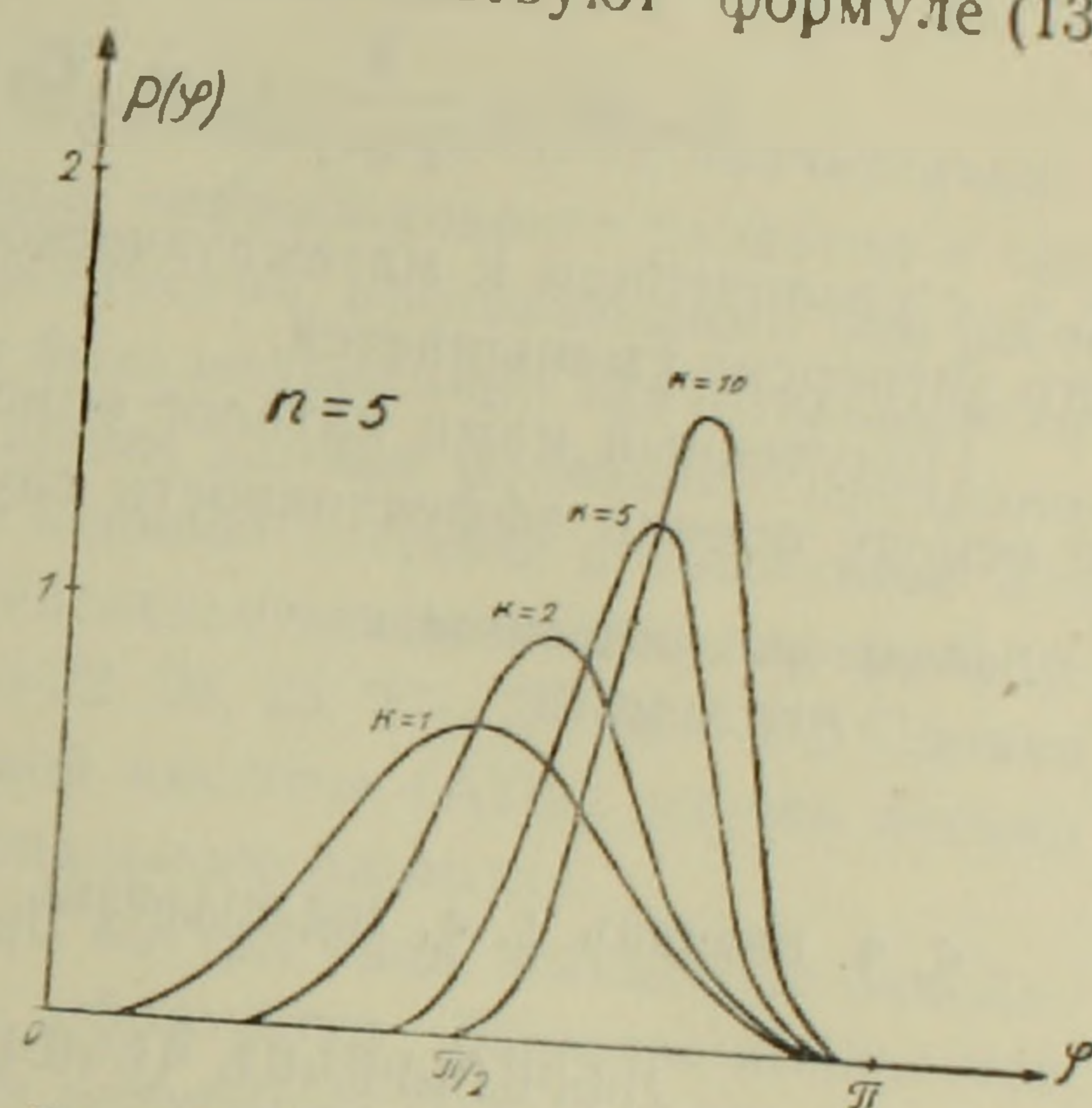

Рис. 5. Кривые распределения $P_k(\varphi)$ при $n = 5$.

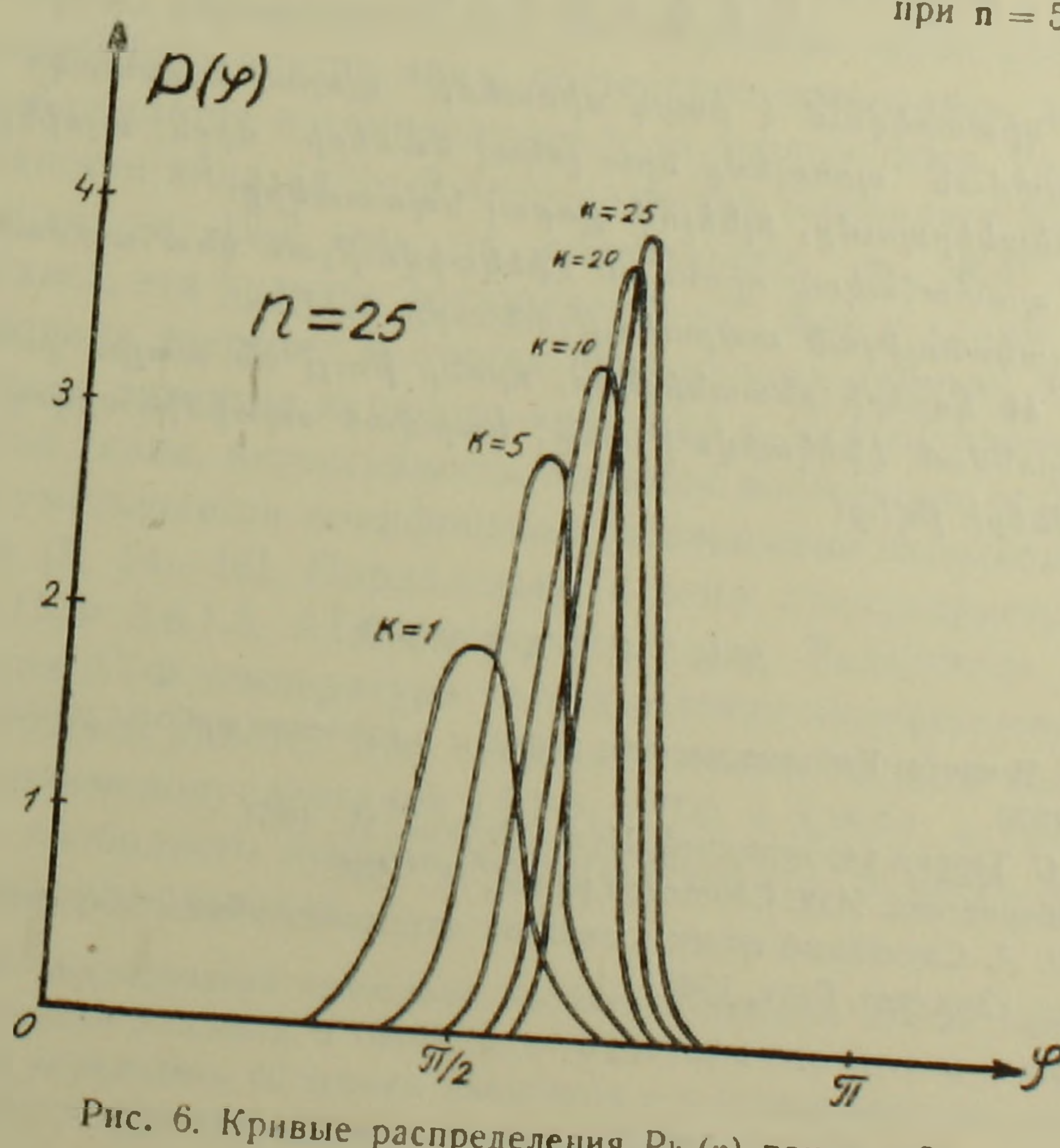

Рис. 6. Кривые распределения $P_k(\varphi)$ при $n = 25$.

а математическое ожидание φ — углу $\frac{\pi}{2}$. При увеличении k математическое ожидание φ смещается в направлении градиента.

Например, при $n=2$ плотность распределения угла φ после k выборок равна

$$P_k(\varphi) = k\frac{\varphi^{k-1}}{\pi^k}$$

а математическое ожидание и дисперсия

$$m_k(\varphi) = \frac{k}{k+1}\pi \quad \text{и} \quad D_k(\varphi) = \frac{k}{(k+1)^2(k+2)}\pi^2,$$

т. е. с увеличением k математическое ожидание угла φ стремится к π, а его дисперсия уменьшается.

Полученный нами каталог описанных кривых может быть положен в основу оценки эффективности случайного поиска.

Лаборатория нейробионики
АН АрмССР

Поступило 23.XII 1970 г.

Վ. Գ. ԱԲՈՎՅԱՆ, Է. Վ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Լ. Ս. ԴԱՄԲԱՐՅԱՆ, Վ. Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ՀԻԵՐԱՐԽԻԱԿԱՆ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է բարդ սիստեմի գլոբալ նպատակի հիերարխիական մասնատման պրոբլեմը նրա լոկալ մասերի միջև, այսինքն՝ լոկալ նպատակների ձևակերպումը, ելնելով գլոբալ նպատակից։

Լուծված է պատահական որոնման էֆեկտիվության գնահատման խնդիրը տարբեր չափողականության տարածությունների համար։

Ստացված են կորերի ընտանիքներ, որոնք թույլ են տալիս քանակապես գնահատելու որոնման էֆեկտիվությունը, կախված օպտիմիզացվող մակերևույթի չափումների թվից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анохин П. К.* В книге: Кибернетические аспекты в изучении работы мозга. Изд. «Наука», М., 1970.
2. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей, Изд. «Наука», М., 1964.
3. *Винер Н.* Кибернетика, Изд. Советское радио, М., 1958.
4. *Растригин Л. А.* Случайный поиск в задачах оптимизации многопараметрических систем. Изд. «Знание», Рига, 1965.