

О. М. Сапонджян

Обобщенные контурные условия свободно-опертых и заделанных плит

В настоящей статье доказывается, что выражение прогиба заделанной плиты криволинейного очертания получается из выражения прогиба такой же, но свободно-опертой плиты, если в последнем принять коэффициент Пуассона μ стремящийся к бесконечности.

Кроме того, показано, что выражение прогиба упруго-заделанной круговой плиты получится из выражения прогиба свободно-опертой такой же плиты, если в нем коэффициент Пуассона умножить на некоторый постоянный параметр, характеризующий упругую заделку.

Таким образом, посредством чрезвычайно простых действий можно получить решение для заделанных и круговых упруго-заделанных плит в тех случаях, когда решение для таких же, но свободно-опертых плит заранее известно.

Для доказательства сказанного ниже рассмотрены такие контурные закрепления, условиями коих являются обобщенные контурные условия свободно-опертых и заделанных плит.

Эти обобщенные условия легко получить из контурных условий свободно-опертой плиты, если в последних коэффициент Пуассона умножить на некоторый произвольный постоянный параметр.

Полученные результаты не применимы к плитам с прямолинейным контуром.

Пусть контурное закрепление плиты таково, что для всех точек контура удовлетворяются следующие условия:

а) вертикальное перемещение (прогиб) срединной плоскости плиты равно нулю;

б) опорный момент прямо пропорционален углу наклона упругой поверхности и обратно пропорционален радиусу кривизны в данной точке контура.

Математическое выражение этих условий таково:

$$w=0, \quad (1)$$

$$M=C \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n}, \quad (2)$$

где w — прогиб,

M — изгибающий момент, вектор которого направлен по касательной к данной точке контура,

C — коэффициент пропорциональности,

n и ρ — внешняя нормаль и радиус кривизны в данной точке контура.

Изгибающий момент для любой точки срединной плоскости плиты определяется следующей формулой¹:

$$M = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right], \quad (3)$$

где

n , s и ρ — внешняя нормаль, дуга и радиус кривизны любой кривой, которая проведена через данную точку срединной плоскости и находится в этой плоскости,

μ — коэффициент Пуассона,

D — жесткость плиты.

Когда вышеупомянутая кривая совпадает с контуром плиты, согласно (1) имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0.$$

Следовательно, для всех точек контура уравнение (3) напишется так:

$$M = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} \right]. \quad (3)$$

Подставив (4) в (2), получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{C}{D} \right) \frac{\partial w}{\partial n} = 0.$$

или, обозначив

$$C = D (\lambda - 1) \mu, \quad (5)$$

будем иметь:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \lambda \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, контурными условиями изучаемой нами задачи будут:

$$w = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \lambda \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (6)$$

Здесь λ постоянный параметр и может получать любые значения от 0 до бесконечности.

Рассмотрим следующие частные случаи:

а) $\lambda = 1$.

При этом условии из (1) и (6) получим

$$w = 0, \quad (1)$$

¹ Ляв, А. — Математическая теория упругости. Москва, 1935 г., стр. 510.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (7)$$

Согласно (4) выражение (7) для всех точек контура эквивалентно условию

$$M = 0.$$

Итак, уравнения (1) и (7) выражают контурные условия свободно-опертой плиты.

$$б) \quad \lambda \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho} \neq 0.$$

В этом случае (1) и (6) принимают следующий вид:

$$w = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (8)$$

Уравнения (1) и (8), как известно, являются контурными условиями заделанной плиты.

Рассмотренные наши частые случаи „а“ и „б“ показали, что для плит с криволинейным очертанием $\left(\frac{1}{\rho} \neq 0\right)$ условия (1) и (6) можно считать обобщенными контурными условиями заделанных и свободно-опертых плит.

Определение упругой поверхности заделанной плиты с криволинейным контуром, когда известна упругая поверхность такой же свободно-опертой плиты

Сравнивая контурные условия (1) и (6) с контурными условиями (1) и (7) свободно-опертой плиты, видим, что если в одном случае известна упругая поверхность, т. е. w , то из него очень просто получить w для другого случая.

Например: предположим, что известно w , удовлетворяющее контурным условиям (1) и (6). Принимая в этом выражения w , $\lambda = 1$, получим w , удовлетворяющее условиям (1) и (7).

И обратно, если известна упругая поверхность свободно-опертой плиты, удовлетворяющая условиям (1) и (7), то, заменяя в последней μ на $\lambda\mu$, получим w , удовлетворяющее условиям (1) и (6).

Примечание: в выражении упругой поверхности участвует также жесткость плиты— D , которая определяется следующей формулой:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

где E —модуль Юнга,

h —толщина плиты.

Ясно, что вышеупомянутая замена μ на $\lambda\mu$ не распространяется на μ , участвующем в выражении D .

Теперь, полагая упругую поверхность свободно-опертой плиты

с криволинейным контуром известной, найдем упругую поверхность заделанной плиты. Для этого в выражении w следует сначала заменить μ на $\lambda \mu$, а затем перейти к пределу, когда λ стремится к бесконечности.

Таким образом получим выражение w для заделанной плиты.

Мы приходим к тому же результату непосредственно, если найдем предел выражения прогиба для свободно-опертой плиты, если условно примем, что μ стремится к бесконечности.

Во избежание заблуждений отметим, что это действие не распространяется на μ в выражении жесткости плиты — D .

Приведем несколько примеров:

а) Прогиб свободно-опертой круговой плиты под действием равномерной нагрузки определяется следующей формулой¹:

$$w = \frac{P}{64D} (R^2 - r^2) \left(\frac{5 + \mu}{1 + \mu} R^2 - r^2 \right), \quad (9)$$

где P — интенсивность нагрузки,

R — радиус круга,

r — расстояние любой точки круга от центра.

Принимая в (9) $\mu \rightarrow \infty$,

получим

$$w = \frac{P}{64D} (R^2 - r^2)^2, \quad (10)$$

т. е. общеизвестное уравнение упругой поверхности круговой заделанной плиты, находящейся под внешней равномерной нагрузкой².

б) В центре круговой свободно-опертой плиты приложена внешняя сосредоточенная сила P .

В этом случае прогиб выражается следующей формулой³:

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-r^2 \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right]. \quad (11)$$

Переходя к пределу $\mu \rightarrow \infty$, получим выражение прогиба для заделанной плиты

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-r^2 \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \right]. \quad (12)$$

Это уравнение также известно⁴.

в) Рассмотрим случай, когда свободно-опертая круговая плита радиуса R находится под действием внешней нагрузки, равномерно распределенной по всей длине окружности радиуса $R_0 < R$.

Для прогиба имеем⁵ при $r \leq R_0$

¹ Ляв, А.—Цит. книга, стр. 511.

² Там же.

³ Там же.

⁴ Там же, стр. 512.

⁵ Там же.

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-(r^2 + R_0^2) \ln \frac{R}{R_0} + (r^2 - R_0^2) + \right. \\ \left. + \frac{(3+\mu)R^2 - (1-\mu)R_0^2}{2(1+\mu)R^2} (R^2 - r^2) \right]. \quad (13)$$

При $R \geq r \geq R_0$

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-(r^2 + R_0^2) \ln \frac{R}{r} + \frac{(3+\mu)R^2 - (1-\mu)R_0^2}{2(1+\mu)R^2} (R^2 - r^2) \right]. \quad (14)$$

Уравнение (13) при $\mu \rightarrow \infty$ принимает вид

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-(r^2 + R_0^2) + (r^2 - R_0^2) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_0^2}{R^2} \right) (R^2 - r^2) \right], \quad (15)$$

а уравнение (14) при $\mu \rightarrow \infty$ принимает вид

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-(r^2 + R_0^2) \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_0^2}{R^2} \right) (R^2 - r^2) \right]. \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) вполне совпадают с соответствующими выражениями прогибов заделанной круговой плиты¹.

г) Возьмем более сложный случай.

Как известно, задачу секторных плит решил акад. Галеркин, причем он сначала рассматривает случай, когда плита заделана по дуговому контуру и свободно опирается по радиальному контуру, и потом уже случай этой же плиты, но свободно-опертой по всему контуру.

Прогибы, соответствующие этим случаям, при равномерной внешней нагрузке по всей площади плиты, выражаются следующим образом:

а) случай, когда плита свободно опирается по всему контуру²:

$$w = \frac{P(1-\mu^2)a^4}{16Eh^3} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^4 \left(3 - 4 \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\alpha} + \frac{\cos 4\theta}{\cos 4\alpha} \right) - \right. \\ - \frac{1556\alpha^3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{[(2k-1)\pi + 10\alpha + 2\mu\alpha] \cos \frac{(2k-1)\pi\theta}{2\alpha} \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{(2k-1)\pi}{2\alpha}}}{[(2k-1)\pi - 8\alpha][(2k-1)\pi + 4\alpha][(2k-1)\pi + 8\alpha][(2k-1)\pi + \alpha + \mu\alpha](2k-1)} + \\ + \frac{1536\alpha^3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{[(2k-1)\pi + 6\alpha + 2\mu] \cos \frac{(2k-1)\pi\theta}{2\alpha} \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{(2k-1)\pi + 4\alpha}{2\alpha}}}{[(2k-1)\pi - 4\alpha][(2k-1)\pi + 4\alpha][(2k-1)\pi + \alpha + \mu][(2k-1)\pi + 8\alpha]} \left. \right\} \quad (17)$$

¹ Ляв, А.—Цит. книга, стр. 512.

² Акад. Галеркин, Б. Г.—"Упругие тонкие плиты", стр. 306.

б) случай, когда плита заделана по дуговому контуру и свободно опирается по радиальному контуру¹:

$$w = \frac{P(1-\mu^2)a^4}{16Eh^3} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^4 \left(3 - 4 \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\alpha} + \frac{\cos 4\theta}{\cos 4\alpha} \right) - \right. \\ - \frac{1536\alpha^3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1} \cos \frac{(2k-1)\theta}{2\alpha} \left(\frac{r}{a} \right) \frac{(2k-1)\pi}{2\alpha}}{[(2k-1)\pi - 8\alpha][(2k-1)\pi + 4\alpha](2k-1)[(2k-1)\pi + 8\alpha]} + \\ \left. + \frac{1536\alpha^3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1} \cos \frac{(2k-1)\pi\theta}{2\alpha} \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{(2k-1)\pi + 4\alpha}{2\alpha}}{[(2k-1)\pi - 4\alpha](2k-1)[(2k-1)\pi + 4\alpha][(2k-1)\pi + 8\alpha]} \right\}, \quad (18)$$

где

P — интенсивность нагрузки,

a — радиус сектора,

h — толщина плиты,

2α — центральный угол сектора,

r, θ — полярные координаты сектора.

Нетрудно убедиться, что уравнение (18) получится из (17), если в последнем μ будет стремиться к бесконечности.

Формулы (17) и (18) имеют общий множитель, содержащий $(1-\mu^2)$. Множитель этот входит в выражение D (жесткости) и потому, как было указано выше, замена μ пределом на него не распространяется.

Приведенные здесь примеры показали, что если известна упругая поверхность свободно-опертой плиты криволинейного очертания, очень просто определяется упругая поверхность для заделанной такой же плиты.

Определение упругой поверхности упруго-заделанной круговой плиты

Контурные условия (1) и (6) в случае круговой плиты выразятся так:

$$w = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \lambda \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (19)$$

Здесь R — радиус круга.

Из уравнений (4) и (19) получим значение момента на контуре:

$$M = - \frac{D(1-\lambda)\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial n}. \quad (20)$$

¹ Акад. Галеркин, Б. Г. „Упругие тонкие плиты“, стр. 272.

Обозначим

$$K = \frac{R}{D(\lambda - 1)} \quad (21)$$

и (20) представим так:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = k M, \quad (22)$$

где $\frac{\partial w}{\partial n}$ является углом наклона упругой поверхности на контуре к направлению радиуса, M момент на контуре, а k — коэффициент, определяющий степень жесткости заделки.

Как известно, зависимость (22) имеет место в случае плиты с упругой заделкой.

Из уравнения (21) можно выразить λ через k :

$$\lambda = 1 + \frac{R}{kD}. \quad (23)$$

Таким образом, параметр λ будет вполне определен, если нам известно k .

Из (22) ясно, что случай $k=0$ соответствует заделанной плите, а $k=\infty$ — плите, свободно-опертой.

Для этих двух предельных условий из (23) получим $\lambda=\infty$ и $\lambda=1$, значения, которые, как было показано выше, соответствуют двум случаям контурного закрепления.

Теперь допустим, что k известно и требуется определить выражение упругой поверхности (прогиба) упруго-заделанной круговой плиты. Для этого необходимо в выражении прогиба свободно-опертой плиты заменить μ через $\mu\lambda$ или, согласно (23), μ заменить через

$$\mu \left(1 + \frac{R}{kD} \right).$$

Например, выражение упругой поверхности упруго-заделанной плиты в случае равномерной нагрузки получится из (9), если произвести вышеуказанную замену, после чего будем иметь

$$w = \frac{P}{64D} (R^2 - r^2) \left[\frac{5 + \mu \left(1 + \frac{R}{kD} \right)}{1 + \mu \left(1 + \frac{R}{kD} \right)} R^2 - r^2 \right]. \quad (24)$$

Таковыми же простыми подстановками получим выражения прогиба упруго-заделанной круговой плиты при любой нагрузке.

Օ. Մ. Սափոնջյան

ԱԶԱՏ ՇԵՆՎԱԾ ԵՎ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ՊԼԻՏԱՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ
ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս հոդվածում ցույց է տրվում, որ եթե կորագծային պարագիծ ունեցող ազատ հենված պլիտայի եզրային պայմանները մեջ Պուասսոնի գործակիցը (μ) բազմապատկվի մի հաստատուն պարամետրով (λ), ապա ստացվող հավասարումները կներկայացնեն ազատ հենված և ամրակցված պլիտայի ընդհանրացված եզրային պայմանները: Վերջիններում ընդունելով $\lambda=1$, կստանանք ազատ հենված պլիտայի եզրային պայմանները, իսկ $\lambda=\infty$ դեպքում՝ ամրակցված պլիտայի եզրային պայմանները:

λ պարամետրի միջանկյալ դեպքերի համար ($1 < \lambda < \infty$) ընդհանրացված պայմանները կներկայացնեն տարբեր առարկանի առաձգական ամրակցում ունեցող պլիտայի եզրային պայմանները:

Ուսումնասիրելով ընդհանրացված եզրային պայմանները, ցույց է տրվում, որ ա) կորագծային պարագիծ ունեցող ամրակցված պլիտայի ձկվածքի արտահայտությունը կստացվի ազատ հենված նույն պլիտայի ձկվածքի արտահայտությունից, եթե վերջինում ընդունվի Պուասսոնի գործակիցը՝ $\mu=\infty$, բ) առաձգական ամրակցում ունեցող շրջանային պլիտայի ձկվածքի արտահայտությունը կստացվի ազատ հենված նույն պլիտայի ձկվածքի արտահայտությունից, եթե վերջինում Պուասսոնի գործակիցը՝ μ բազմապատկվի առաձգական ամրակցումը բնորոշող հայտնի գործակիցով:

Օ. Մ. Sapondjian

The generalized contour conditions of the freely leaned upon and walled up flagstones

Summary

In the present article it is set forth that if we multiply the Poissons coefficient (μ) in the expression of contour conditions of a flagstone freely leaned upon, having curvilinear contours by certain constant parameter (λ), then the received equations will represent the generalized contour conditions of the freely leaned upon and walled up flagstones. Considering in the latters $\lambda=1$ we receive the contour conditions of the freely leaned upon flagstone and in the case, when $\lambda=\infty$ the contour conditions of the walled up flagstone.

For the intermediate cases of the parameter λ when ($1 < \lambda < \infty$) the generalized conditions will represent the contour conditions of the flagstone having different degrees of elasticity in walling up.

Studying the generalized contour conditions it is showed that; a) the expression of carving in of the walled up curvilinear flagstone

will be received from the expression of the same flagstone freely leaned upon if in the latter we consider the Pouasson's coefficient $\mu=\infty$,
b) the expression of carving in of the cacular flagstone having an elastic walling up will be received from the expression of the carving in of the same flagstone freely leaned upon, if the Pouasson's coefficient μ in the latter be multiplied by the known coefficient that characterizes the elastic walling up.