ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 120 2020 № 1
Volume

**МЕХАНИКА**

УДК 539.3

**Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян**

# Математические модели армированных графеном многослойных пластин (нанокомпозитов)

(Представлено 12 /II 2020)

**Ключевые слова**: *многослойная пластинка, нанокомпозит, армирование, графен, математическая модель.*

**Введение.** Разработка математической теории различных слоистых нанокомпозитов является актуальной теоретической проблемой и имеет большое практическое значение.

Теория армированных сред в рамках классической теории упругости с применением структурного подхода развита в работах В. В. Болотина [1-4], в которых рассматриваются многослойные пластинки с чередующимися жесткими и мягкими слоями; для указанной среды построены как структурная теория, так и в случае большого числа слоев – континуальная теория, в итоге оказавшаяся моментной теорией. В [5] устанавливается, что континуальная теория слоистых пластин [1-4] представляет собой определенный вариант моментной теории упругости со стесненным вращением.

В настоящей работе излагается теория многослойной пластинки, в которой мягкие слои представляют собой те же мягкие слои, рассмотренные в [1-4], а каждый из жестких слоев считается двумерным наноматериалом, таким как графен [6]. Для такой многослойной нанокомпозитной среды построены как дискретно-континуальная (структурная), так и континуальная теории. Отметим, что континуальные модели графена построены при деформации в своей плоскости в [7].

1.**Исходные предположения и зависимости.** Назовём слоистыми среды, которые получаются путем композиции некоторого упругого материала (мягкий материал) и системы эквидистантных плоских одинаковых наноматериалов, таких как двумерный материал – графен. Континуальная модель графена – специальная модель моментной теории упругости [7], суть которой заключается в том, что его деформация (как в своей плоскости, так и от своей плоскости) главным образом подчиняется принципу "сдвиг плюс свободное вращение" (о смысле этого понятия см. [8]).

Координатную плоскость $xy$ расположим в срединной плоскости некоторого мягкого слоя и будем считать, что $z \in [-H_1, H_2]((H_1+H_2)-$ толщина рассматриваемого пакета). Обозначим через координату вдоль нормали к срединной плоскости [$k$-го] мягкого слоя $-\frac{1}{2}h_{[k]} \le \zeta^{[k]} \le \frac{1}{2}h_{[k]}$, $h_{[k]}$ – толщина [$k$-го] мягкого слоя).

Мягкие слои будем считать одинаковыми по физико-механическим свойствам и толщине $\left(h_{[k]} = \widetilde{h}, [k] = 1,2,...,n-1\right)$. Для мягких слоев примем [1-4] модель классической теории упругости с предположением, что напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ пренебрежимо малы и что напряженное состояние определяют напряжения $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ и $\sigma_z$, которые определяются из условия, что в каждом [$k$-ом] мягком слое перемещения $u_i^{[k]}(i=1,2,3)$, меняются по линейному закону по координате $\zeta_{[k]}$. Таким образом, плотность потенциальной энергии деформации [$k$-го] мягкого слоя

$$U_{[k]} = \frac{1}{2}\left(\tau_{xz}^{[k]}\gamma_{xz}^{[k]} + \tau_{xz}^{[k]}\gamma_{xz}^{[k]} + \sigma_z^{[k]}\varepsilon_z^{[k]}\right), \tag{1.1}$$

где $\gamma_{xz}^{[k]}, \gamma_{xz}^{[k]}$ – сдвиговые деформации в соответствующих плоскостях, а $\varepsilon_z^{(k)}$ – линейная деформация в поперечном направлении.

Для определения $\gamma_{xz}^{[k]}, \gamma_{xz}^{[k]}, \varepsilon_z^{[\kappa]}$ имеем

$$u_i^{[k]} = a_i^{[k]} + \zeta_{[k]} b_i^{[k]} \quad (i=1,2,3), \tag{1.2}$$

где $a_i^{[k]}, b_i^{[k]}$ – постоянные, которые определяются из условий контакта перемещений [$k$-го] мягкого слоя с соседними жёсткими слоями, т.е. графенами, с номерами $k$ и $k+1$. В итоге

$$\begin{gathered} u_3^{[k]}\Big|_{\zeta_{[k]}=\frac{h_{[k]}}{2}} = u_3^{(k+1)}(x,y) = w^{(k+1)}(x,y), \\ u_3^{[k]}\Big|_{\zeta_{[k]}=-\frac{h_{[k]}}{2}} = u_3^{(k)}(x,y) = w^{(k)}(x,y), \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} u_1^{[k]}\Big|_{\zeta_{[k]}=\frac{h_{[k]}}{2}} = u_1^{(k+1)} + \frac{h_{[k]}}{2}\left(\frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial x} + \Omega_2^{(k+1)}\right), \\ u_1^{[k]}\Big|_{\zeta_{[k]}=-\frac{h_{[k]}}{2}} = u_1^{(k)} - \frac{h_{[k]}}{2}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \Omega_2^{(k)}\right), \\ u_2^{[k]}\Big|_{\zeta_{[k]}=\frac{h_{[k]}}{2}} = u_2^{(k+1)} + \frac{h_{[k]}}{2}\left(\frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial y} - \Omega_1^{(k+1)}\right), \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$u_2^{[k]}\Big|_{\zeta_{[k]}=-\frac{h_{[k]}}{2}} = u_2^{(k)} - \frac{h_{[k]}}{2}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} - \Omega_1^{(k)}\right).$$

Здесь $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}$ – тангенциальные перемещения точек $k$-го графена; $u_3^{(k)} = w^{(k)}(x, y)$ – прогиб $k$-го графена; $\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \Omega_2^{(k)}, \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} - \Omega_1^{(k)}$ представляют собой сдвиговые деформации $k$-го графена.

Для сдвиговых деформаций $\gamma_{xz}^{[k]}, \gamma_{yz}^{[k]}$ и линейной деформации $\varepsilon_z^{(k)}$ для [$k$-го] мягкого слоя получим:

$$\gamma_{xz}^{[k]} = \frac{u_1^{[k]}\Big|_{\zeta_{[k]}=\frac{h_{[k]}}{2}} - u_2^{[k]}\Big|_{\zeta_{[k]}=-\frac{h_{[k]}}{2}}}{h_{[k]}} = \frac{u_1^{(k+1)} - u_1^{(k)}}{h_{[k]}} +$$
$$+\frac{\Omega_2^{(k+1)} + \Omega_2^{(k)}}{2} + \frac{\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial x} + \dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x}}{2},$$
$$\gamma_{yz}^{[k]} = \frac{u_2^{[k]}\Big|_{\zeta_{[k]}=\frac{h_{[k]}}{2}} - u_2^{[k]}\Big|_{\zeta_{[k]}=-\frac{h_{[k]}}{2}}}{h_{[k]}} = \frac{u_2^{(k+1)} - u_2^{(k)}}{h_{[k]}} - \tag{1.5}$$
$$-\frac{\Omega_1^{(k+1)} + \Omega_1^{(k)}}{2} + \frac{\dfrac{\partial w(k+1)}{\partial y} + \dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial y}}{2},$$
$$\varepsilon_z^{[k]} = \frac{w^{(k+1)} - w^{(k)}}{h_{[k]}}.$$

Определим касательные напряжения $\tau_{xz}^{[k]}, \tau_{yz}^{[k]}$ и нормальное напряжение $\sigma_z^{[k]}$, плотность потенциальной энергии деформации в [$k$-ом] мягом слое по формулам:

$$\tau_{xz}^{[k]} = G^{[k]}\gamma_{xz}^{[k]}, \quad \tau_{yz}^{[k]} = G^{[k]}\gamma_{yz}^{[k]}, \quad \sigma_z^{[k]} = E^{[k]}\varepsilon_z^{[k]}, \tag{1.6}$$

$$U_{[k]} = \frac{1}{2}\left[G^{[k]}\left(\gamma_{xz}^{[k]}\right)^2 + G^{[k]}\left(\gamma_{yz}^{[k]}\right)^2 + E^{[k]}\left(\varepsilon_z^{[k]}\right)^2\right]. \tag{1.7}$$

Здесь $G^{[k]}$ – модуль сдвига, $E^{[k]}$ – модуль Юнга для [$k$-го] мягкого слоя.

Что касается графена, модель его общей деформации, как сказано выше, представляет собой специальную модель прикладной моментной теории упругости. Плотность потенциальной энергии деформации $k$-го графена $(k = 1,2,...,n)$ состоит из суммы потенциальной энергии плоского напряжённого состояния в своей плоскости и потенциальной энергии изгибной деформации от своей плоскости:

$$\overset{пнс(k)}{U_0} = \frac{1}{2}\left(T_{xx}^{(k)}\Gamma_{xx}^{(k)} + T_{yy}^{(k)}\Gamma_{yy}^{(k)} + S_{xy}^{(k)}\Gamma_{xy}^{(k)} + S_{yx}^{(k)}\Gamma_{yx}^{(k)} + L_{xz}^{(k)}k_{xz}^{(k)} + L_{yz}^{(k)}k_{yz}^{(k)}\right), \quad (1.8)$$

$$\overset{из\,(k)}{U_0} = \frac{1}{2}\left(N_{xz}^{(k)}\Gamma_{xz}^{(k)} + N_{yz}^{(k)}\Gamma_{yz}^{(k)} + L_{xx}^{(k)}k_{xx}^{(k)} + L_{yy}^{(k)}k_{yy}^{(k)} + L_{xy}^{(k)}k_{xy}^{(k)} + L_{yx}^{(k)}k_{yx}^{(k)}\right), \quad (1.9)$$

где

$$T_{xx}^{(k)} = \frac{Ea'}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{xx}^{(k)} + \nu\Gamma_{yy}^{(k)}\right), \quad T_{yy}^{(k)} = \frac{Ea'}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{xx}^{(k)} + \nu\Gamma_{yy}^{(k)}\right),$$

$$S_{xy}^{(k)} = a'\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{xy}^{(k)} + (\mu-\alpha)\Gamma_{yx}^{(k)}\right], \quad (1.10)$$

$$S_{yx}^{(k)} = a'\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{yx}^{(k)} + (\mu-\alpha)\Gamma_{xy}^{(k)}\right], \quad L_{xz}^{(k)} = Ba'K_{xz}^{(k)}, \quad L_{yz}^{(k)} = Ba'K_{yz}^{(k)},$$

$$\Gamma_{xx}^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x}, \Gamma_{yy}^{(k)} = \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y}, \Gamma_{xy}^{(k)} = \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x} - \Omega_3^{(k)}, \Gamma_{yx}^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial y} + \Omega_3^{(k)}, \quad (1.11)$$

$$k_{xz}^{(k)} = \frac{\partial \Omega_3^{(k)}}{\partial x}, \quad k_{yz}^{(k)} = \frac{\partial \Omega_3^{(k)}}{\partial y};$$

$$N_{xz}^{(k)} = a'\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\Gamma_{xz}^{(k)}, \quad N_{yz}^{(k)} = a'\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\Gamma_{yz}^{(k)},$$

$$L_{xx}^{(k)} = a'\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{xx}^{(k)} + \frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}k_{yy}^{(k)}\right],$$

$$L_{yy}^{(k)} = a'\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{yy}^{(k)} + \frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}k_{xx}^{(k)}\right], \quad (1.12)$$

$$L_{xy}^{(k)} = a'\left[(\gamma+\varepsilon)k_{xy}^{(k)} + (\gamma-\varepsilon)k_{yx}^{(k)}\right], \quad L_{yx}^{(k)} = a'\left[(\gamma+\varepsilon)k_{yx}^{(k)} + (\gamma-\varepsilon)k_{xy}^{(k)}\right],$$

$$k_{xz}^{(k)} = \frac{\partial \Omega_1^{(k)}}{\partial x}, \quad k_{22}^{(k)} = \frac{\partial \Omega_2^{(k)}}{\partial y}, \quad k_{xy}^{(k)} = \frac{\partial \Omega_2^{(k)}}{\partial x}, \quad k_{yx}^{(k)} = \frac{\partial \Omega_1^{(k)}}{\partial y},$$

$$\Gamma_{xz}^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \Omega_2^{(k)}, \quad \Gamma_{yz}^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} - \Omega_1^{(k)}, \quad (1.13)$$

Здесь $T_{xx}^{(k)}, T_{yy}^{(k)}, S_{xy}^{(k)}, S_{yx}^{(k)}$ – тангенциальные усилия, $N_{xz}^{(k)}, N_{yz}^{(k)}$ – перерезывающие усилия, $L_{xx}^{(k)}, L_{yy}^{(k)}, L_{xy}^{(k)}, L_{yx}^{(k)}, L_{xz}^{(k)}, L_{yz}^{(k)}$,– моменты, действующие *k*-ом графене, $\Gamma_{xx}^{(k)}, \Gamma_{yy}^{(k)}, \Gamma_{xy}^{(k)}, \Gamma_{yx}^{(k)}$ – тангенциальные деформации в плоскости графена, $\Gamma_{xz}^{(k)}, \Gamma_{yz}^{(k)}$ – сдвиговые деформации, $k_{xz}^{(k)}, k_{yz}^{(k)}, k_{xx}^{(k)}, k_{yy}^{(k)}, k_{xy}^{(k)}, k_{yx}^{(k)}$ – кривизны-кручения в *k*-ом графене. Отметим, что $E, \nu, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – упругие постоянные моментной теории упругости со свободным вращением для континуальной модели графена, которые в [7] определяются через параметры атомной структуры графена.

С учетом формул (1.7) – 1.10), (1.12), составим выражение для полной потенциальной энергии рассматриваемой слоистой среды:

$$
\begin{aligned}
Э = \frac{1}{2}\Bigg\langle \sum_{k=1}^{n} a' \iint\limits_{(s)} \Bigg\{ & \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x}+\Omega_2^{(k)}\right)^2 + \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial y}-\Omega_1^{(k)}\right)+ \\
& + \frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\left(\frac{\partial \Omega_1^{(k)}}{\partial x}\right)^2 + \frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\left(\frac{\partial \Omega_2^{(k)}}{\partial y}\right)^2 + \frac{4\beta\gamma}{\beta+2\gamma}\frac{\partial \Omega_1^{(k)}}{\partial x}\frac{\partial \Omega_2^{(k)}}{\partial y}+ \\
& + (\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial \Omega_2^{(k)}}{\partial x}\right)^2 + (\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial \Omega_1^{(k)}}{\partial y}\right)^2 + 2(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial \Omega_2^{(k)}}{\partial x}\frac{\partial \Omega_1^{(k)}}{\partial y}+ \\
& + \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x}\right)^2 + \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y}\right)^2 + \frac{2E\nu}{1-\nu^2}\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x}\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y}+ \\
& + (\mu+\alpha)\left(\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x}-\Omega_3^{(k)}\right)^2 + (\mu+\alpha)\left(\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial y}+\Omega_3^{(k)}\right)^2 + \qquad (1.14) \\
& + 2(\mu-\alpha)\left(\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x}-\Omega_3^{(k)}\right)\left(\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial y}+\Omega_3^{(k)}\right) + B\left(\frac{\partial \Omega_3^{(k)}}{\partial x}\right)^2 + B\left(\frac{\partial \Omega_3^{(k)}}{\partial y}\right)^2 \Bigg\} dxdy + \\
& + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\tilde{h}\Bigg\{\tilde{G}\left[\frac{u_1^{(k+1)}-u_1^{(k)}}{\tilde{h}}+\frac{\Omega_2^{(k+1)}+\Omega_2^{(k)}}{2}+\frac{\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial x}+\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x}}{2}\right]^2 + \\
& + \tilde{G}\left[\frac{u_2^{(k+1)}-u_2^{(k)}}{\tilde{h}}+\frac{\Omega_1^{(k+1)}+\Omega_1^{(k)}}{2}+\frac{\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial y}+\dfrac{\partial w^{(k1)}}{\partial y}}{2}\right]^2 + \\
& + \tilde{E}\left(\frac{w^{(k+1)}-w^{(k)}}{\tilde{h}}\right)^2\Bigg\} dxdy - \sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{(s)} q^{(k)} w^{(k)} dxdy,
\end{aligned}
$$

в котором было учтено, что

$$G^{[k]}=\tilde{G},\quad E^{[k]}=\tilde{E},\quad h^{[k]}=\tilde{h},\ [k]=1,2,...,n-1;$$
$$a'=2r,$$

где $r$ – радиус атома графена.

Отметим, что в дискретно-континуальной модели графена, являющегося двумерным материалом, он моделируется как сплошное тело цилиндрического типа, с основанием $(s)$ (это плоская область занятая графеном) и высотой $a'=2r$, где $r$ – радиус атома графена.

**2. Вывод дифференциальных уравнений равновесия структурной модели многослойных пластин**. Согласно принципу Лагранжа в положении равновесия первая вариация от полной потенциальной энергии системы должна быть равна нулю:

$$\delta \mathcal{Э} = 0. \tag{2.1}$$

Это условие позволяет получить уравнения равновесия и совокупность всех вариантов граничных условий, совместным с принятыми предположениями.

В формуле (1.14) принимая ввиду геометрические соотношения (1.11), (1.13), тогда из вариационного уравнения (2.1) будут следовать следующие дифференциальные уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}
\frac{Ea'}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_1^{(k)}}{\partial x^2} + a'(\mu+\alpha)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial y} + \Omega_3^{(k)}\right) + \frac{E\nu a'}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_2^{(k)}}{\partial x \partial y} + \\
+ a'(\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x} - \Omega_3^{(k)}\right) + \\
+ \widetilde{h}G\left[\frac{u_1^{(k+1)} - u_1^{(k)}}{\widetilde{h}} + \frac{\Omega_2^{(k+1)} + \Omega_2^{(k)}}{2} + \frac{\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial x} + \dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x}}{2}\right] - \\
- \widetilde{h}G\left[\frac{u_1^{(k)} - u_1^{(k-1)}}{\widetilde{h}} + \frac{\Omega_2^{(k)} + \Omega_2^{(k-1)}}{2} + \frac{\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \dfrac{\partial w^{(k-1)}}{\partial x}}{2}\right] = 0,
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}
\frac{Ea'}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_2^{(k)}}{\partial y^2} + \frac{E\nu a'}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_1^{(k)}}{\partial x \partial y} + a'(\mu+\alpha)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x} - \Omega_3^{(k)}\right) + \\
+ a'(\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial y} + \Omega_3^{(k)}\right) + \\
+ \widetilde{h}G\left[\frac{u_2^{(k+1)} - u_2^{(k)}}{\widetilde{h}} - \frac{\Omega_1^{(k+1)} + \Omega_1^{(k)}}{2} + \frac{\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial y} + \dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial y}}{2}\right] - \\
- \widetilde{h}G\left[\frac{u_2^{(k)} - u_2^{(k-1)}}{\widetilde{h}} - \frac{\Omega_1^{(k1)} + \Omega_1^{(k-1)}}{2} + \frac{\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial y} + \dfrac{\partial w^{(k-1)}}{\partial y}}{2}\right] = 0,
\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\widetilde{h}\widetilde{E}\frac{w^{(k+1)} - 2w^{(k)} + w^{(k-1)}}{\widetilde{h}} + \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{4\mu\alpha a'}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \Omega_2^{(k)}\right) + \right.$$

$$+\frac{\widetilde{G}\widetilde{h}}{2}\left\{\left[\frac{u_1^{(k+1)}-u_1^{(k)}}{\widetilde{h}}+\frac{\Omega_2^{(k+1)}+\Omega_2^{(k)}}{2}+\frac{\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial x}+\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x}}{2}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{u_1^{(k)}-u_1^{(k-1)}}{\widetilde{h}}+\frac{\Omega_2^{(k)}+\Omega_2^{(k-1)}}{2}+\frac{\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x}+\dfrac{\partial w^{(k-1)}}{\partial x}}{2}\right]\right\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\langle\frac{4\mu\alpha a'}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial y}-\Omega_1^{(k)}\right)+\right.$$

$$+\frac{\widetilde{G}\widetilde{h}}{2}\left\{\left[\frac{u_2^{(k+1)}-u_2^{(k)}}{\widetilde{h}}-\frac{\Omega_1^{(k+1)}+\Omega_1^{(k)}}{2}+\frac{\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial y}+\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial y}}{2}\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\left[\frac{u_2^{(k)}-u_2^{(k-1)}}{\widetilde{h}}-\frac{\Omega_1^{(k)}+\Omega_1^{(k-1)}}{2}+\frac{\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial y}+\dfrac{\partial w^{(k-1)}}{\partial y}}{2}\right]\right\}\right\rangle=0,$$

$$\frac{4\gamma(\beta+\gamma)a'}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2\Omega_1^{(k)}}{\partial x^2}+a'(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1^{(k)}}{\partial y^2}+$$

$$+\left[\frac{2\beta\gamma a'}{\beta+2\gamma}+a'(\gamma-\varepsilon)\right]\frac{\partial^2\Omega_2^{(k)}}{\partial x\partial y}+\frac{4\mu\alpha a'}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial y}-\Omega_1^{(k)}\right)+$$

$$+\frac{\widetilde{G}\widetilde{h}}{2}\left\{\left[\frac{u_2^{(k+1)}-u_2^{(k)}}{\widetilde{h}}-\frac{\Omega_1^{(k+1)}+\Omega_1^{(k)}}{2}+\frac{\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial y}+\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial y}}{2}\right]+\right.$$

$$+\frac{\widetilde{G}\widetilde{h}}{2}\left[\frac{u_2^{(k)}-u_2^{(k-1)}}{\widetilde{h}}-\frac{\Omega_1^{(k)}+\Omega_1^{(k-1)}}{2}+\frac{\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial y}+\dfrac{\partial w^{(k-1)}}{\partial y}}{2}\right]=0,$$

$$a'(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2^{(k)}}{\partial x^2}+\frac{4\gamma(\beta+\gamma)a'}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2\Omega_2^{(k)}}{\partial y^2}+$$

$$+\left[a'(\gamma-\varepsilon)+\frac{2\beta\gamma a'}{\beta+2\gamma}\right]\frac{\partial^2\Omega_1^{(k)}}{\partial x\partial y}-\frac{4\mu\alpha a'}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x}+\Omega_2^{(k)}\right)- \qquad (2.4)$$

$$-\frac{\widetilde{G}\widetilde{h}}{2}\left\{\left[\frac{u_1^{(k+1)}-u_1^{(k)}}{\widetilde{h}}+\frac{\Omega_2^{(k+1)}+\Omega_2^{(k)}}{2}+\frac{\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial x}+\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x}}{2}\right]-\right.$$

$$-\frac{\widetilde{G}\widetilde{h}}{2}\left[\frac{u_1^{(k)}-u_1^{(k-1)}}{\widetilde{h}}+\frac{\Omega_2^{(k)}+\Omega_2^{(k-1)}}{2}+\frac{\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x}+\dfrac{\partial w^{(k-1)}}{\partial x}}{2}\right]=0,$$

$$a'B\left(\frac{\partial^2\Omega_3^{(k)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega_3^{(k)}}{\partial y^2}\right)-2\alpha a'\left(\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial y}-\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x}\right)-4\alpha a'\Omega_3^{(k)}=0,\quad k=1,2,...,n.$$

Из вариационного уравнения (2.1) следуют естественные граничные условия (при $x=const$):

$$\frac{Ea'}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x}+\nu\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y}\right)=0,$$

$$a'(\mu+\alpha)\left(\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x}-\Omega_3^{(k)}\right)+a'(\mu-\alpha)\left(\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial y}+\Omega_3^{(k)}\right)=0,\qquad(2.5)$$

$$\frac{4\mu\alpha a'}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x}+\Omega_2^{(k)}\right)+\frac{\widetilde{G}\widetilde{h}}{2}\left\{\left[\frac{u_1^{(k+1)}-u_1^{(k)}}{\widetilde{h}}+\frac{\Omega_2^{(k+1)}+\Omega_2^{(k)}}{2}+\frac{\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial x}+\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x}}{2}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{u_1^{(k)}-u_1^{(k-1)}}{\widetilde{h}}+\frac{\Omega_2^{(k)}+\Omega_2^{(k-1)}}{2}+\frac{\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x}+\dfrac{\partial w^{(k-1)}}{\partial x}}{2}\right]\right\}=0,$$

$$\frac{4\gamma(\beta+\gamma)a'}{\beta+2\gamma}\frac{\partial\Omega_1^{(k)}}{\partial x}+\frac{2\beta\gamma a'}{\beta+2\gamma}\frac{\partial\Omega_2^{(k)}}{\partial y}=0,\quad a'(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\Omega_2^{(k)}}{\partial x}+a'(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\Omega_1^{(k)}}{\partial y}=0,$$

$$a'B\frac{\partial\Omega_3^{(k)}}{\partial x}=0.$$

Отметим, что уравнения (2.2)-(2.4), строго говоря, записаны для $k=2,3,...,n-1$. Чтобы получить уравнения для случая $k=1$ и $k=n$, нужно в уравнениях (2.2)-(2.4) положить $\widetilde{G}_0=0$ и $\widetilde{G}_n=0$ соответственно.

**3. Изгиб многослойной пластинки, состоящей из большого числа слоев.** Уравнения равновесия, естественные граничные условия и вариационный принцип структурной теории рассматриваемой многослойной пластинки были получены в пункте 2 настоящей работы ((2.2)-(2.5)). Теперь наша цель – построить континуальную теорию рассматриваемой многослойной пластинки, считая, что число графеновых слоев достаточно велико, Для достижения этой цели необходимо выполнять дальнейшее упрощение формулы для потенциальной энергии деформации системы (1.14). Для этого следует первые разности по индексу $k$ приближенно выражать через первые производные по переменной $z$, вторые разности – через соответствующие вторые производные, конечные суммы необходимо аппроксимировать при помощи определенных интегралов Римана. В результате приходим к выражению потенциальной энергии деформации для континуальной модели многослойной пластинки:

$$
\begin{aligned}
Э_n^* = \frac{1}{2}\frac{a'}{c}\iint\limits_{(s)}\int\limits_{-H_1}^{+H_2}\Bigg\{ & \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x}+\Omega_2^*\right)+ \\
& +\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w^*}{\partial y}-\Omega_1^*\right)+\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\left(\frac{\partial\Omega_1^*}{\partial x}\right)^2+ \\
& +\frac{4\gamma(\beta-\gamma)}{\beta+2\gamma}\left(\frac{\partial\Omega_2^*}{\partial y}\right)^2+\frac{4\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\frac{\partial\Omega_1^*}{\partial x}\frac{\partial\Omega_2^*}{\partial y}+(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial\Omega_2^*}{\partial x}\right)^2+(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial\Omega_1^*}{\partial y}\right)^2+ \\
& +2(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\Omega_2^*}{\partial x}\frac{\partial\Omega_1^*}{\partial y}+\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x}\right)^2+\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial y}\right)^2+\frac{2E\nu}{1-\nu^2}\frac{\partial u_1^*}{\partial x}\frac{\partial u_2^*}{\partial y}+ \\
& +(\mu+\alpha)\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x}-\Omega_3^*\right)^2+(\mu+\alpha)\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial y}+\Omega_3^*\right)^2+2(\mu-\alpha)\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x}-\Omega_3^*\right)\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial y}+\Omega_3^*\right)+ \\
& +B\left(\frac{\partial\Omega_3^*}{\partial x}\right)^2+B\left(\frac{\partial\Omega_3^*}{\partial y}\right)^2\Bigg\}dxdydz+\frac{1}{2}\frac{\widetilde{h}}{c}\iint\limits_{(S)}\int\limits_{-H_1}^{H_2}\Bigg\{\widetilde{G}\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial z}+\Omega_2^*+\frac{\partial w^*}{\partial x}\right)^2+ \\
& +\widetilde{G}\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial z}-\Omega_1^*+\frac{\partial w^*}{\partial y}\right)^2+\widetilde{E}\left(\frac{\partial w^*}{\partial z}\right)^2\Bigg\}dxdydz-\frac{1}{c}\iint\limits_{(S)}\int\limits_{-H_1}^{H_2}qw^*dxdy,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где

$$
\begin{aligned}
& c=\widetilde{h}+2r;\; u_1^*=u_1^*(x,y,z);\; u_2^*=u_2^*(x,y,z); \\
& w^*=w^*(x,y,z),\;\; \Omega_1^*=\Omega_1^*(x,y,z),\; i=1,2,3.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Согласно принципу Лагранжа действительное состояние равновесия сообщает экстремальное значение функционалу $Э^*$. Обычным путем приходим к уравнениям равновесия континуальной теории многослойных пластин, усиленных графеновыми слоями:

$$
\begin{aligned}
& \frac{Ea'}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^2}+\frac{E\nu a'}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x\partial y}+(\mu+\alpha)a'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial y}+\Omega_3^*\right)+ \\
& +(\mu-\alpha)a'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x}-\Omega_3^*\right)+\widetilde{G}\widetilde{h}\left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial z^2}+\frac{\partial\Omega_2^*}{\partial z}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial z}\right)=0, \\
& \frac{Ea'}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial y^2}+\frac{E\nu a'}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x\partial y}+\widetilde{G}\widetilde{h}\left(\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial z^2}-\frac{\partial\Omega_1^*}{\partial z}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y\partial z}\right)+
\end{aligned}
$$

$$(\mu+\alpha)a'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x}-\Omega_3^*\right)+(\mu-\alpha)a'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial y}+\Omega_3^*\right)=0,$$

$$\frac{4\mu\alpha a'}{\mu+\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x}+\Omega_2^*\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w^*}{\partial y}-\Omega_2^*\right)\right]+\widetilde{G}\widetilde{h}\left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x\partial z}+\frac{\partial\Omega_2^*}{\partial x}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}\right)+$$

$$+\widetilde{E}\widetilde{h}\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2}+\widetilde{G}\widetilde{h}\left(\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\Omega_1^*}{\partial y}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right)=q,$$

$$\frac{4\mu\alpha a'}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w^*}{\partial y}-\Omega_1^*\right)+\widetilde{G}\widetilde{h}\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial z}-\Omega_1^*+\frac{\partial w^*}{\partial y}\right)+\frac{4\gamma(\beta+\gamma)a'}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2\Omega_1^*}{\partial x^2}+\frac{2\gamma\beta a'}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2\Omega_2^*}{\partial x\partial y}+$$

$$a'\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1^*}{\partial y^2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2^*}{\partial x\partial y}\right]=0,$$

$$a'\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2^*}{\partial x^2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1^*}{\partial y^2}\right]+\frac{4\gamma(\beta+\gamma)a'}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2\Omega_2^*}{\partial y^2}+\frac{2\gamma\beta a'}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2\Omega_1^*}{\partial x\partial y}-\tag{3.3}$$

$$-\frac{4\mu\alpha a'}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x}+\Omega_2^*\right)-\widetilde{G}\widetilde{h}\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial z}+\Omega_2^*+\frac{\partial w^*}{\partial x}\right)=0,$$

$$Ba'\frac{\partial^2\Omega_3^*}{\partial x^2}+Ba'\frac{\partial^2\Omega_3^*}{\partial y^2}-2\alpha a\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial y}-\frac{\partial u_2^*}{\partial x}+2\Omega_3^*\right)=0.$$

Аналогичным путём получим естественные граничные условия. На свободном контуре $x=const$ $(-H_1\le z\le H_2)$ должны выполняться условия

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x}+\nu\frac{\partial u_2^*}{\partial y}=0,(\mu+\alpha)\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x}-\Omega_3^*\right)+(\mu-\alpha)\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial y}+\Omega_3^*\right)=0,$$

$$\frac{4\mu\alpha a'}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x}+\Omega_2^*\right)+\widetilde{G}\widetilde{h}\int_{-H_1}^{H_2}\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial z}+\Omega_2^*+\frac{\partial w^*}{\partial x}\right)dz=0,$$

$$2(\beta+\gamma)\frac{\partial\Omega_1^*}{\partial x}+\beta\frac{\partial\Omega_2^*}{\partial y}=0,\ (\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\Omega_2^*}{\partial x}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\Omega_1^*}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\Omega_3^*}{\partial x}=0.\tag{3.4}$$

На верхней и нижней поверхностях плиты ($z=-H_1$ и $z=H_2$) должны выполняться условия

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial z}+\Omega_2^*+\frac{\partial w^*}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u_2^*}{\partial z}-\Omega_1^*+\frac{\partial w^*}{\partial y}=0,\ \frac{\partial w^*}{\partial z}=0.\tag{3.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОНКС РА в рамках научного проекта 18RF-106.

Ширакский государственный университет им М. Налбандяна
e-mail: s_sargsyan@yahoo.com

**Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян**

**Математические модели армированных графеном многослойных пластин (нанокомпозитов)**

Рассматриваются многослойные пластинки-нанокомпозиты, армированные графенами. Построены дискретно-континуальная и континуально-моментная модели рассматриваемых нанокомпозитов.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Գրաֆենով ամրավորված բազմաշերտ սալերի (նանոկոմպոզիտների) մաթեմատիկական մոդելները

Դիտարկվում են գրաֆեններով ամրավորված բազմաշերտ սալեր-նանոկոմպոզիտներ: Կառուցված են դիտարկվող նանոկոմպոզիտների դիսկրետ-կոնտինուալ և կոնտինուալ-մոմենտային մոդելները:

**Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan**

**Mathematical Models of Reinforced with Graphene Multilayer Plates (Nanocomposites)**

In the present paper multilayer plates-nanocomposites reinforced with graphenes are considered. The discrete-continuum and continuum-moment models of the considered nanocomposites are constructed.

## Литература

1. *Болотин В. В.* – Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 3. С. 65-72.
2. *Болотин В. В.* – Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. 1964. № 1. С. 61-66.
3. *Болотин В. В.* В кн.: Расчёты на прочность. М. Машиностроение. 1965. Вып. 11. С. 31-63.
4. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М. Машиностроение. 1980. 375 с.
5. *Саркисян С. О.* – Доклады НАН Армении. 2018. Т. 118. № 4. С. 287-296.
6. *Баимова Ю. А., Мулюков Р. Р.* Графен, нанотрубки и другие углеродные наноструктуры. М. Изд-во РАН. 2018. 212 с.
7. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2019. Т. 22. № 5. С. 28-33.
8. *Панин В. Е.* – Физическая мезомеханика. 1998. Т. 1. № 1. С. 5-22.