ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 120 2020 № 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.64

А. А. Чубарян, А. А. Амбарцумян, Г. А. Гаспарян, С. А. Ованнисян

О некоторых свойствах минимальных тавтологий классической и неклассических логик

(Представлено академиком Ю. Г. Шукуряном 10/II 2020)

Ключевые слова: *минимальная тавтология; секвенциальные системы без правила сечения пропозициональных логик; количество шагов выводов; монотонность системы, строгая монотонность системы.*

1. Введение. Традиционно считалось, что минимальные тавтологии, т.е. тавтологии, которые не являются результатом подстановки в более короткие тавтологии, не могут выводиться сложнее результатов подстановок в них, т.е. должна быть некоторая «естественная монотонность» выводов. Однако оказалось, что многие «строгие» пропозициональные системы выводов двузначных и многозначных логик не монотонны ни по шагам, ни по длине выводов [1, 2], т.е. существуют минимальные тавтологии, которые выводятся сложнее, чем некоторые результаты подстановок в них. Тем не менее, оказалось, что у некоторых таких результатов подстановки существуют иные минимальные тавтологии, которые выводятся не сложнее. Таким образом возник вопрос о ***монотонности*** и ***строгой монотонности*** пропозициональных систем Подобные разновидности монотонностей исследованы для некоторых «слабых» систем выводов классической и некласических логик в [3-5]. В связи с разнообразием множества минимальных тавтологий одной и той же тавтологии в настоящей работе: 1) для тавтологий заданной логики длины ***n*** доказано, что максимально возможное количество различных минимальных тавтологий имеет экспоненциальную оценку от ***n,*** и 2) доказана монотонность пропозициональных секвенциальных систем без правила сечения для классической, интуиционистской, монотонной логик и логики Иоганссона. Отметим, что строгая немонотонность этих систем, как и соответствующих систем с правилом сечения доказана в [6].

2. Предварительные понятия. Для представления основных результатов напомним некоторые понятия и обозначения. Мы пользуемся общепринятыми определениями пропозициональной формулы, тавтологии в данной логике, секвенции, сукцедента, антецедента, главной формулы секвенции, секвенциальных систем без сечения классических и неклассических логик, сложностей выводов [7-9].

Конкретный выбор языка для представления пропозициональной формулы, а значит, и системы доказательств, не имеет значения для наших рассмотрений, однако из технических соображений мы предполагаем, что он содержит пропозициональные переменные, логические связки ¬, &, ∨, ⊃ и пару скобок (,). В некоторых системах будут использованы также знаки T «истина» и ⊥ «ложь».

Длина формулы φ, определяемая как количество всех вхождений в нее логических связок, обозначается через $|\varphi|$. Очевидно, что линейной функцией от $|\varphi|$ оценивается и полная длина формулы, понимаемая как количество всех символов.

2.1. Описание рассматриваемых систем. Напомним ряд определений. Секвенцией называется выражение $\Gamma \to \Delta$, где Γ (антецедент) и Δ (сукцедент) являются конечной (может быть пустой) последовательностью пропозициональных формул. Следуя [7], определим следующие системы.

Схемой аксиом для классической системы (***PC***) является секвенция $C, \Gamma \to C$, где C произвольная формула, а Γ произвольная конечная (быть может пустая) последовательность формул.

Для произвольных формул A , B и последовательностей формул Γ и Δ логическими правилами вывода являются:

$$\supset\to \frac{A \supset B,\ \Gamma \to \Delta,\ \mathrm{A} \quad A \supset B,\ \mathrm{B},\ \Gamma \to \Delta}{A \supset B,\ \Gamma \to \Delta} \qquad \to$$

$$\supset \frac{\mathrm{A},\ \Gamma \to \ \mathrm{B}, A \supset B,\ \Delta}{\Gamma \to A \supset B, \Delta}$$

$$\vee\to \frac{A \vee B,\ \mathrm{A},\ \Gamma \to \Delta \text{ и } A \vee B,\ \mathrm{B},\ \Gamma \to \Delta}{A \vee B,\ \Gamma \to \Delta}$$

$$\to\vee \frac{\Gamma \to \mathrm{A},\ A \vee B,\ \Delta \text{ или } \Gamma \to \mathrm{B},\ A \vee B,\ \Delta}{\Gamma \to A \vee B}$$

$$\& \to \frac{A\&B,\ \mathrm{A},\ \Gamma \to \Delta \text{ или } A\&B, \mathrm{B},\ \Gamma \to \Delta}{A\&B,\ \Gamma \to \Delta}$$

$$\to \& \frac{\Gamma \to \mathrm{A}, A\&B, \Delta \text{ и } \Gamma \to \mathrm{B}, A\&B,\ \Delta}{\Gamma \to A\&B, \Delta}$$

$$\neg\to \frac{\neg A,\ \Gamma\to \ \mathrm{A},\ \Delta}{\neg A,\ \Gamma\to\Delta} \qquad\qquad \to\neg \frac{A,\ \Gamma\to\neg A,\ \Delta}{\Gamma\to\neg A,\ \Delta},$$

где формулы $A \supset B$, $A \vee B$, $A\&B$ и $\neg A$ являются главными формулами секвенции.

Структурным правилом является

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma' \to \Delta'}, \text{ где } \Gamma \subseteq \Gamma' \text{ и } \Delta \subseteq \Delta'.$$

Схема аксиом пропозициональной интуиционистской системы (***PI***) и системы Иоганссона (***PM***) та же. В верхней секвенции (секвенциях) в правилах введения логических функций в сукцеденте для систем ***PI*** и ***PM*** отсутствует главная формула, Δ во всех правилах ***PI*** пуста или состоит из одной формулы, а для ***PM*** пуста [8].

Пропозициональную систему (***PMon***) для монотонной логики, где используются только монотонные формулы (формулы, строящиеся с использованием только монотонных логических функций), определим, следуя [9].

Схемами аксиом системы ***PMon*** являются $p \to p$, $\perp \to \Gamma$, $\Gamma \to T$, где p – пропозициональная переменная, а Γ – конечная (быть может пустая) последовательность формул.

Для любых монотонных формул A, B и любых последовательностей монотонных формул Γ, Γ', Δ и Δ' правилами вывода являются:

$$(L_1)\frac{\Gamma, A, A, \Delta \to \Gamma'}{\Gamma, A, \Delta \to \Gamma'} \qquad (L_2)\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to \Gamma'}{\Gamma, B, A, \Delta \to \Gamma'} \qquad (L_3)\frac{\Gamma \to \Gamma'}{\Gamma, A \to \Gamma'}$$

$$(L_4)\frac{A, B, \Gamma \to \Delta}{A\&B, \Gamma \to \Delta} \qquad (L_5)\frac{A, \Gamma \to \Delta \text{ и } B, \Gamma' \to \Delta'}{A \vee B, \Gamma, \Gamma' \to \Delta, \Delta'}$$

$$(R_1)\frac{\Gamma' \to \Gamma, A, A, \Delta}{\Gamma' \to \Gamma, A, \Delta} \qquad (R_2)\frac{\Gamma' \to \Gamma, A, B, \Delta}{\Gamma' \to \Gamma, B, A, \Delta} \qquad (R_3)\frac{\Gamma' \to \Gamma}{\Gamma' \to \Gamma, A}$$

$$(R_4)\frac{\Gamma \to \Delta, A, B}{\Gamma \to \Delta, A \vee B} \qquad (R_5)\frac{\Gamma \to \Delta, A \text{ и } \Gamma' \to \Delta', B}{\Gamma, \Gamma' \to \Delta, \Delta', A\&B}.$$

Обратим внимание, что порядок вхождения формул ни в сукцеденте, ни в антецеденте не существен ни в одной из вышеописанных систем.

Мы пользуемся общепринятым понятием вывода в указанных системах.

Секвенция $\Gamma \to \Delta$ называется С-доказуемой (I-доказуемой, М-доказуемой, Mon-доказуемой), если она выводима в системе ***PC (PI, PM, PMon)***. Формула А называется С-тавтологией (I-тавтологией, М-тавтологией), если ***секвенциальная форма*** $\to$ А выводима в соответствующей системе ***PC (PI, PM).*** Для монотонных формул А и В формула А⊃В называется Mon-тавтологией, если ее ***секвенциальная форма*** $A \rightarrow B$ выводима в системе ***PMon.***

2.2. Некоторые характеристики тавтологий и логических систем выводов. Здесь мы исследуем некоторые свойства тавтологий различных логик и вышеприведенных систем выводов на основе одной из сложностных характеристик выводов – *t*-сложности, определяемой как количество различных секвенций в выводе. Пусть ϕ является некоторой секвенциальной системой выводов фиксированной логики, а φ – некоторая тавтология данной логики. Через $\boldsymbol{t}^{\phi}(\varphi)$ обозначим минимально возможное значение *t*-сложности всевозможных выводов соответствующей секвенциальной формы тавтологии φ в системе ϕ.

Определение 2.2.1. Тавтология данной логики называется ***минимальной,*** если она не может быть получена подстановкой вместо ее переменных из более короткой тавтологии этой же логики.

Для произвольной минимальной тавтологии φ фиксированной логики обозначим через $S(\varphi)$ множество всех тавтологий этой же логики, являющихся результатом подстановки в φ.

Определение 2.2.2. Система выводов ϕ называется ***t-монотонной***, если для каждой не минимальной тавтологии ψ этой системы существует такая минимальная тавтология φ этой же системы, что ψ принадлежит $S(\varphi)$ и $\boldsymbol{t}^{\phi}(\psi) = \boldsymbol{t}^{\phi}(\varphi)$.

Определение 2.2.3. Система выводов ϕ называется ***t-строго монотонной,*** если для каждой минимальной тавтологии φ и для каждой формулы ψ из $S(\varphi)$ $\boldsymbol{t}^{\phi}(\varphi) \le \boldsymbol{t}^{\phi}(\psi)$.

3. Основные результаты. Здесь будут даны оценки максимального количества различных минимальных тавтологий для тавтологий длины $\boldsymbol{n}$ каждой из приведенных логик, а также будет доказана монотонность всех вышеперечисленных систем выводов**.** Для формулировки результатов введем несколько обозначений.

Обозначим через $T\phi(\boldsymbol{n})$ множество тавтологий длины $\boldsymbol{n}$ системы ϕ и $\forall$ $\mathbf{g} \in T\phi(\boldsymbol{n})$, через $\mathbf{k}\phi(\mathbf{g})$ обозначим количество различных минимльных тавтологий формулы $\mathbf{g}$ в логике, определяемой системой ϕ**.** Пусть $\mathbf{M}\phi(\boldsymbol{n}) = \mathbf{max}\ \{ \mathbf{k}\phi(\mathbf{g}) \mid \forall\, \mathbf{g} \in T\phi(\boldsymbol{n}) \}$.

Теорема 1. *Если* ϕ *одна из систем* ***PC, PI, PM*** *и* ***PMon,*** *то* $\log_3 \mathbf{M}\phi(\boldsymbol{n}) = \theta(\boldsymbol{n})$.

Доказательство основано на получении верхних и нижних оценок $\mathbf{M}\phi(\boldsymbol{n})$**.** Для получения нижних оценок в системах ***PC, PI*** и ***PM*** для любого $\boldsymbol{n} \ge 3$ рассмотрим формулы $\mathbf{G}_{\boldsymbol{n}} = ((p_{11} \supset p_{11}) \vee ((p_{12} \supset p_{12}) \vee (\ldots \vee (p_{1k} \supset p_{1k})\ldots)) \&(\ldots\& ((p_{t1} \supset p_{t1}) \vee ((p_{t2} \supset p_{t2}) \vee (\ldots \vee (p_{tk} \supset p_{tk})\ldots))$, где n=2kt-1. Нетрудно убедиться, что $\forall$ i $\in$ {1...t} подформула $\mathbf{g}_{\mathbf{i}} = ((p_{i1} \supset p_{i1}) \vee ((p_{i2} \supset p_{i2}) \vee (\ldots \vee (p_{ik} \supset p_{ik})\ldots))$ имеет $\mathbf{k}$ штук различных минимальных, откуда следует, что количество различных минимальных формулы $\mathbf{G}_{\boldsymbol{n}}$ равно $\mathbf{k}^{(\mathbf{n+1})\ /\ \mathbf{2k}}$. Учитывая, что эта функция получает максимальное значение при $\mathbf{k}$=3, получим $\mathbf{M}\phi(\boldsymbol{n}) \geq \mathbf{3}^{(n+1)/6}$ для систем ***PC, PI*** и ***PM,*** в каждой из которых выводимы и сама формула $\mathbf{G}_{\boldsymbol{n}}$, и все ее минимальные.

Обозначим через $A_{\boldsymbol{n}}$ результат подстановки константы T в формулу $\mathbf{G}_{\boldsymbol{n}}$ вместо всех ее переменных, тогда количество различных минимальных тавтологий формулы $p \supset A_{\boldsymbol{n}}$, а значит и секвенции $p \to A_{\boldsymbol{n}}$, выводимой в ***PMon,*** будет равно $\mathbf{k}^{n/2k}$. Таким образом, и для системы ***PMon*** получаем $\mathbf{M}\phi(\boldsymbol{n}) \geq \mathbf{3}^{n/6}$, а следовательно, для всех перечисленных систем ϕ $\log_3 \mathbf{M}\phi(\boldsymbol{n}) = \Omega(\boldsymbol{n})$.

Для получения нетривиальной верхней оценки обратимся к общепринятому представлению пропозициональной формулы в виде дерева, вершинам которого специальным образом приписываются подформулы заданной формулы. Заметим, что построение минимальных тавтологий данной тавтологии заключается в поиске максимального количества подформул, замена которых на переменные, не входящие в данную формулу, сохраняет тавтологичность в данной логике. Отметим, что если в формуле уже выбрана некая подформула, которая должна быть заменена переменной, то ни одна из входящих в нее подформул более не может быть выбрана, что на дереве отражается следующим образом: если выбрана некая вершина, сответствующая формула которой выбрана для замены переменной, то уже ни одна вершина поддерева с корнем в выбранной вершине не может быть выбрана. Если через *f(n)* обозначить максимально возможное количество подформул (вершин дерева), которые могут быть заменены переменными в формуле длины *n* (в дереве с *n* вершинами), и отвлечься от требования тавтологичности, то нетрудно убедиться, что для *f(n)* получим следующее рекуррентное соотношение:

$$f(1) = 1$$
$$f(n) = max(f(n-1) + 1;\ \max_{1 \leq i \leq n-2} ((1 + f(i))(1 + f(n-i-1))),$$

решив которое, получим $f(n) = O\ ((3/2)^n)$. Так как $\mathbf{M}\phi(\boldsymbol{n}) \leq f(n)$ в любой из выбранных логик, то $\log_3 \mathbf{M}\phi(\boldsymbol{n}) = O\ (\boldsymbol{n})$, откуда и следует утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Секвенциальные системы **PC, PI, PM** и **PMon** монотонны.*

Доказательство теоремы основано на следующем утверждении.

Лемма. *Пусть* ϕ *одна из систем **PC, PI, PM** и **PMon,*** φ *некоторая тавтология этой системы и* ψ *любая из ее минимальных тавтологий в этой системе, тогда вывод секвенциальной формы формулы* ψ *в системе* ϕ *является подвыводом одного из всевозможных выводов секвенциальной формы тавтологии* φ *в системе* ϕ.

Доказательство основано на свойстве подформульности, которым обладают все правила выводов перечисленных систем. Метод доказательства позволяет также строить всевозможные минимальные тавтологии заданной тавтологии.

Заключение. Все обладающие свойством подформульности системы, исследованные в работах [1-6], и в настоящей работе оказались монотонными, ряд систем без свойства подформульности оказался немонотонным. Заметим также, что все они не строго монотонны. Остается открытым вопрос о монотонности систем Фреге и секвенциальных систем с правилом сечения и о существовании строго монотоных систем, быть может и не полных.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта №18T-1B034.

Ереванский государственный университет
e-mails: achubaryan@ysu.am, hambardzumyanarsen99@gmail.com,
haykgasparyan012@gmail.com, saqohovhannisyan0199@gmail.com

А. А. Чубарян, А. А. Амбарцумян, Г. А. Гаспарян, С. А. Ованнисян

О некоторых свойствах минимальных тавтологий классической и неклассических логик

Для тавтологий заданной логики длины ***n*** доказано, что максимально возможное количество различных минимальных тавтологий имеет экспоненциальную оценку от ***n;*** доказана также монотонность пропозициональных секвенциальных систем без правила сечения для классической, интуиционистской, монотонной логик и логики Иоганссона, т.е. установлено, что для каждой заданной в данной логике тавтологии существует такая минимальная тавтология, количество шагов вывода секвенциальной формы которой совпадает с наименьшим количеством шагов вывода секвенциальной формы заданной формулы.

Ա. Ա. Չուբարյան, Ա. Ա. Համբարձումյան, Հ. Ա. Գասպարյան,
Ս. Ա. Հովհաննիսյան

Դասական և ոչ դասական տրամաբանությունների մինիմալ նույնաբանությունների որոշ հատկությունների մասին

Ապացուցված է, որ տվյալ տրամաբանության ***n*** երկարությամբ նույնաբանությունների մինիմալ նույնաբանությունների մաքսիմալ հնարավոր քանակը կարող է լինել ցուցչային ֆունկցիա ***n***-ից և առանց հատույթի կանոնի դասական, ինտուիցիոնիստական, մինիմալ և մոնոտոն տրամաբանությունների սեքվենցիալ համակարգերը մոնոտոն են՝ տվյալ տրամաբանության յուրաքանչյուր նույնաբանության համար գոյություն ունի այնպիսի մինիմալ նույնաբանություն, որի սեքվենցիալ ձևի արտածման բարդությունը համընկնում է տրված բանաձևի սեքվենցիալ ձևի արտածման նվազագույն քայլերի հետ:

A. A. Chubaryan, A. A. Hambardzumyan, H. A. Gasparyan, S. A. Hovhannisyan

On Some Properties of Minimal Tautologies in Classical and Nonclassical Logic

It is proved in this paper that 1) number of minimal tautologies for any given logic tautology of size ***n*** can be exponential function in ***n*,** and 2) cut free sequent systems for classical, intuitionistic, Joganssons and monotone logics are monotonous, that is for every tautology of given logic there is some minimal tautology such that number of its sequential form proof steps is equal to minimal steps in proof of sequential form for given tautology.

Литература

1. *Chubaryan A. , Petrosyan G.* – Evolutio, Естественные науки. 2016. Вып. 3. С. 12-14.
2. *Chubaryan A., Khamisyan A., Petrosyan G.* On some systems for two versions of many-valued logics and its properties. Lambert Academic Publishing (LAP). 2017. 80 p.
3. *Саядян С. М., Чубарян А. А.* – ДНАН РА. 2018. Т. 118. № 1. С. 20-25.
4. *Зограбян Г. М., Саядян С. М., Чубарян А. А.* – ДНАН РА. 2019. Т. 119. № 1. С. 33-39.
5. *Чубарян А. А., Саядян С. М., Зограбян Г. М.* – Sciences of Europe, Physics and Mathematics. 2019. V. 2. № 35. С. 74-79.
6. *Chubaryan A., Karabakhtsyan A., Petrosyan G.* – Вестник РАУ. 2018. № 1. С. 5-17.
7. *Kleene S.C.* Introduction to Metamathematics. D. Van Nostrand Company, INC.1952.
8. *Чубарян Ан., Болибекян О.* – ДНАН РА. 2002. Т.102. № 3. С. 214-218.
9. *Atserias A., Galesi N.*, *Gavalda R.* – Mathematical Logic Quarterly. 2001. V. 47. № 4. P. 461-474.