

«ԿԱՏԱՐԵԼՈՒԹՅԱՆ ՍԱՆԴՂԱԿ»*

Պրոֆ. ԴԱՎԻԴ ՔԵՆԴԱԼ (Քեմբրիջ, Անգլիա)

Այս հոդվածը նվիրված է թերակատար, կատարյալ և զերակատար թվերին՝ հին փիլիսոփայության, աստվածաբանության, ինչպես նաև ժամանակակից մաթեմատիկայի մեջ: Ինձ դիմել են V, VI դարերի մենագրություններում հանդիպող որոշ մաթեմատիկական տերմինների թարգմանությունները ճշտելու խնդրանքով: Սովորական բնույթի այս խնդիրը, սակայն, հարկադրեց ինձ ընթերցելու բնագրերից մի քանիսը: Գտնելով դրանք չափազանց գրավիչ, որոշեցի ալդ ինքնատիպ նյութի համառոտ շարադրանքը, որպես ծննդյան նվեր, ընծայել իմ հին բարեկամ, հմուտ լատինագետ Պատ Մորանին: Սրանով կհղեմ նույն իմ լավագույն մաղթանքները:

Խնդիրը վերաբերում էր մի աշխատության, որի վերնագիրն է «Սահմանք իմաստասիրության»: Հավանաբար այն գրվել է V կամ VI դարում (կարծես թե նախ հունարեն, հետո՝ հայերեն. երկու տարբերակն էլ պահպանվել են): Նրա հեղինակն է Դավիթ Անհաղթը (David Invictus=David the Armenian=David Anakht=David philosophus):

Դավթի աշխատության ստեղծման ստույգ ժամանակը և հեղինակության հարցը վերջնականապես ճշգրտված չեն, սակայն հնարավոր տարբերակներից մեկը 1980-ը հորելյանական տարի դարձրեց: Այդ կապակցությամբ, նույն տարվա մայիսին Երևանում կայացավ կոնֆերանս՝ նվիրված Դավթի 1500-ամյակին: Այս իրադարձությունը սկիզբ դրեց «Սահմանք»-ի անգլերեն թարգմանության աշխատանքներին: Մինչ այդ, Դավթի նվաճած ստեղծագործությանը հնարավոր էր ծանոթանալ միայն աշխարհաբար հայերենով, ուսեբենով և ռումիներենով (չհաշված հունարեն և գրաբար բնագրերը):

Դավիթը, ինչպես և իր ժամանակի փիլիսոփաների մեծ մասը հետաքրքրվում էր կատարյալ թվերով: Որևէ թիվ կոչվում է կատարյալ, եթե իր բոլոր իրենից տարբեր բաժանարարների գումարն է: Այսպես՝ 6-ը կատարյալ է ($6=1+2+3$), իսկ 8-ը՝ ոչ ($8 \neq 1+2+4$): Այս սահմանումը չի գործում 1 թվի դեպքում՝ թողնելով այն դասակարգումից դուրս¹:

Այժմյան մաթեմատիկոսները այդ անորոշությունից ազատվել են հետևյալ կերպ. սահմանել են $\sigma(n)$ առույթը, որպես n թվի բոլոր բաժանարարների (ներառյալ ինքը՝ n -ը) իրարից տարբերվող արժեքների գումար: Ուրեմն՝ $\sigma(1)=1$: Այսպիսով 1-ը բացառվում է կատարյալների շարքից, որովհետև վերջիններս այժմ բնորոշվում են $\sigma(n)=2n$ հատկությամբ:

Այսօր, ինչպես և Դավթի ժամանակներում, այն թվերը, որոնց դեպքում $\sigma(n)$ -ը $2n$ -ից պակաս է, կոչվում են թերակատար, իսկ այնպիսիները, որոնց

* Անգլիական ակադեմիայի մաթեմատիկոս Դ. Քենդալի ներկա հոդվածը, որ պարունակում է հետաքրքիր մտքեր ինչպես հին դարերի մի շարք հեղինակների, այնպես էլ Դավիթ Անհաղթի մաթեմատիկական մտածողության վերաբերյալ, տպագրում ենք որոշ կրճատումներով: Հոդվածը անգլերենից թարգմանել և հրատարակության է պատրաստել Ա. Ռ. Համբարձումյանը (ԽՍՀՄ):

¹ Դավիթ Անհաղթը՝ 1-ը, ինչպես նաև 2-ը, ընդհանրապես չի համարում թվեր՝ հետևյալ բացատրությամբ. յուրաքանչյուր թիվ ունի այն հատկությունը, որ բազմապատկելով ինքն իր վրա ստանում ենք ավելին, քան եթե այդ թիվը գումարենք ինքն իրեն: Իսկ 1-ը և 2-ը այսպիսին չեն. $1+1 > 1.1$, $2+2 = 2.2$: Դրանք Անհաղթը անվանում է թվասկզբեր, այլ ոչ՝ թվեր: Ընդ որում 1-ը կենտ թվերի սկիզբն է, իսկ 2-ը՝ զույգերի:

Համար $\sigma(n)$ -ը $2n$ -ից ավելի է՝ գերակատար թվեր: Ուրեմն, յուրաքանչյուր դրական ամբողջ թիվ կամ թերակատար է, կամ կատարյալ, կամ գերակատար: Ոչ թերակատար են այն թվերը, որոնց դեպքում տեղի ունի $\sigma(n) \geq 2n$ պայմանը: Կարևոր է հիշել, որ «կատարյալ» չի նշանակում «առավել բաղադրյալ»: Առավել բաղադրյալ թվերը կարծես թե սովորաբար գերակատար են լինում: Հատկապես, նրանցից շատերը գտնվում են վեր գերակատար թվերի կարգում: Վերջինս բնորոշվում է այն հատկությամբ, որ $\sigma(n)/2n$ հարաբերությունը առավել է $\sigma(m)/2m$ հարաբերությունից՝ n -ից փոքր ցանկացած m -ի դեպքում: Հին աշխատությունները կարդալիս կարևոր է նկատի ունենալ, որ անգլերեն թարգմանությունների «վեր գերակատար»-ը հաճախ օգտագործվում է «գերակատարի» իմաստով, որովհետև առաջինը ավելի մոտ է հունական և հայկական հին բնագրերի համապատասխան անունների ստուգաբանական կառուցվածքին:

Նոր սահմանումը, ըստ որի 1 -ը թերակատար է, լիովին համապատասխանելով արդի տեսակետներին (ցանկալի է, որ թվաբանական առույթները, տվյալ դեպքում σ -ն, բաշխունակ (multiplicative) լինեն արտադրյալի նրկատմամբ), ամբողջովին չի համապատասխանում հին մտածելաձևին: Ըստ վերջինիս, 1 -ը առավել կատարյալ թվերից է:

Այսպես, Նիկոմաքոս Գերասացին (մոտ 100 թ.) համարում էր, որ «մեկը առուևակապես կատարյալ է, բայց առկայապես՝ ոչ»: Նրա մեկնաբանումը² չափազանց հետաքրքիր է, քանի որ 1 -ը կարող է արտահայտվել եվկլիդեսի նշած ձևով, որը միշտ հանգեցնում է զույգ կատարյալ թվին:

$$n = 2^{n-1}(2^n - 1), \text{ որտեղ } (2^n - 1) \text{ պարզ թիվ է:}$$

Այս բանաձևից հնարավոր է ստանալ $n = m = 1$, այնպես որ Նիկոմաքոսը (ի տարբերություն մեզ) 1 -ը պարզ թիվ է համարել. ուրեմն, փոփոխությունը մի տեսակետում առաջ է բերել փոփոխություն մշտում:

Այսօր մենք գերադասում ենք 1 -ը պարզ թիվ չհամարել՝ բնական թվերի պարզ վերլուծման միակության թեորեմի ավարտուն ձևակերպումը պահպանելու նկատառումով:

Այլ մոտեցում է ունեցել Նիկոմաքոսը, որովհետև մտահոգված էր 1 -ի և մոնադի միջև փիլիսոփայական փոխհարաբերություններով: Ավելի ուշ, VIII դարում, նման ըմբռնումներ գտնում ենք Ալբին Յորքցու գրվածքներում: Այսօր, շնորհիվ էյլերի աշխատությունների, մենք գիտենք, որ եվկլիդեսի կանոնով ստացվում են բոլոր զույգ կատարյալ թվերը (ավելացնենք, որ կենսական կատարյալ թիվ ցայսօր հայտնաբերված չէ): Եվ իրոք, Նիկոմաքոսը (նաև Ալբինը, տե՛ս հավելվածը) թերակատար, կատարյալ, գերակատար դասակարգումը վերագրում է միայն զույգ թվերին: Եվկլիդեսի բանաձևից, տեղադրամբ, ստանում ենք կատարյալ թվերից առաջին շորսը.

$$6, 28, 496, 8128$$

Ուրիշները այն ժամանակներում հայտնի չէին: Սակայն դա զարմանալի չէ, որովհետև հինգերորդ կատարյալ թիվը մոտ է $33^{1/2}$ միլիոնին: Եվ այնուհետև նրանք աճում են չափազանց արագ:

Իբրիոնը³ կազմել է մինչև 1976 թ. հայտնաբերած բոլոր կատարյալ թվերի մի ամբողջական ցուցակ, ուր տեղ են գտել 24 թիվ, որոնցից ամենամեծը 12000 նիշանի է՝ թվագրության տասնհինգ համակարգում: Հետագայում գտնվեցին նոր կատարյալ թվեր, բայց առ այսօր հայտնի չէ՝ վերջավոր է արդյո՞ք նրանց ցուցակը, թե՞ անվերջ: Այս խնդրի բարդությունը սլայմանա-

² Nicomachus of Gerasa's "Introduction to Arithmetic". Trans. M. L. D'Ooge, ed. F. E. Robbins and L. C. Karspinski. London, 1926.

³ D. M. Burton. Elementary Number Theory. Boston, 1976.

վորված է նրանով, որ, ինչպես արդեն ասվել է, բոլոր հայտնի կատարյալ թվերը արտածվել են եվկլիդեսյան հրաշալի բանաձևից: Հետևաբար, այդ բանաձևի օգտագործման մեջ կատարյալ թվեր գտնելու դժվարությունները ճիշտ նույնն են, որ առաջանում են մերոսենյան 2^{րդ} — 1 ձևով ներկայացված թվերը պարզերի և բաղադրյալների տեսակավորելիս:

Նիկոմաքոսը մատնանշում է 8128-ը որպես ամենամեծ կատարյալ թիվը «մինչև տաս հազարը»: Դա շատ հետաքրքիր դիտողություն է, բայց դժվար է որոշակիորեն մեկնաբանել նրա իմաստը. կարծել, որ Նիկոմաքոսը (կամ նրա նախորդներից որևէ մեկը) հետազոտել է 1-ից մինչև 10000 բոլոր թվերը, թե՞ այն, որ 8128-ը ամենամեծն է մինչև 10000 եվկլիդեսյան կանոնով ստացվող թվերից: Եթե ճիշտ է առաջին մեկնաբանությունը, ապա հավանաբար Նիկոմաքոսին ծանոթ էին մինչև 10000-ն ընկած բոլոր թերակատար, կատարյալ և գերակատար թվերը:

Կատարյալ թվերի զույգ լինելու վերաբերյալ հնագույն փորձառական (մինչև այժմ չհերքված) ուսմունքը, թվում է, բախվում է դարձյալ հին այն պնդման հետ, ըստ որի 1-ը կատարյալ թիվ է: Բայց այդ «բախումը» առձակատում չէ, որովհետև դասակարգումներից մի քանիսը, առանձնահատուկ տեղ վերադրելով 1-ին, այն համարում էին և՛ զույգ, և՛ կենտ: Նշենք, օրինակ, Նիկոմաքոսի կողմից տրված այն սահմանումը, ուր մասնավորաբար ասված է. «Պետք է սկսել իրար հետևից զույգ անգամ զույգ թվերը աճող հերթականությամբ՝ սկսած 1-ից այնքան, որքան կամենաք. 1, 2, 4, 8...»⁴: Այստեղ զույգ անգամ զույգ թվերը նշանք են, ողոնց այժմ անվանում ենք 2-ի աստիճաններ: Տեսնում ենք, որ 1-ը ընդգրկված է այդ ցուցակի մեջ, թեև ես գտնում եմ, որ գուցե ավելի ճիշտ կլիներ համարել, որ 1-ը այստեղ հանդես է գալիս միայն որպես հետագա կառուցվածքի սկիզբը: Ըստ Նիկոմաքոսի, փաստորեն, 1 և 2 թվերը զույգերի և կենտերի տեսակավորելիս կա՛մ պետք է անտեսվեն, կա՛մ երկու դասին էլ վերագրվեն և, հետևաբար, 1-ի «առունակապես» բոլոր կատարյալ թվերը զույգ են:

Մեկնաբանենք Դավթի կողմից այս ըմբռնումների գործադրումը՝ մի քաղվածք բերելով նրա «Սահմանք»-ից, որը վերաբերում է փրիսոփայության վեց սահմանումներին:

«...վեցը՝ առաջին կատարյալ թիվն է, որովհետև նրանից առաջ գտնվող թվերից ոչ մեկը կատարյալ չէ, այդ իսկ պատճառով փրիսոփայության սահմանումները վեցն են, որովհետև բոլոր արվեստների մայրը և պատճառը, որպես ամենակատարյալը, պետք է զարգարվի և ամենակատարյալ թվով»⁵:

Նկատենք, որ այստեղ 1-ը չի դիտվում որպես կատարյալ թիվ: Սակայն իմ կարծիքն այն է, որ դա պետք է հասկանալ այն իմաստով, որ 1-ը (ինչպես նաև 2-ը) պետք չէ թիվ համարել:

Այսպես, Դավթի խոսքն է. «...երկուսը թիվ չէ, որովհետև ինքը թվի հատկություն չունի, որովհետև ամեն մի թիվ (իրենով) բաղմասլատկելիս ավելի մեծ թիվ է տալիս, քան գումարելիս»⁶:

Ակներև է, որ այսպիսի փաստարկը 1-ը նույնպես կբացառի թվերի շարքից: Հետաքրքիր է թվերի մասին Դավթի մի այլ ակնարկ, որին և կանդրադառնանք. այն վերաբերում է 4 և 10 թվերին:

«Նրանք մշտաբուխ էին անվանում չորս թիվը, նկատի ունենալով չորս տարրերը, և զրա համար պլուրիպորթանների մոտ չորսը մեծ հարգանք էր վայելում, և դա կամ չորս տարրերի պատճառով, կամ հոգու չորս առաքինու-

⁴ Nicomachus of Gerasa, p. 210.

⁵ Դավթի Անհաղթ. Երկեր, թարգմանությունը. առաջաբանը և ծանոթագրությունները Ս. Ս. Արեշատյանի. Երևան, 1980, էջ 66 (անգլերեն թարգմանությունը կատարեց Բրիջիտ Քենդալը և Վ. Համբարձումյանի հետ):

⁶ Նույն տեղում, էջ 99:

թյունների, կամ էլ այն բանի համար, որ երբ չորսին գումարում են իրեն նախորդող թվերը՝ ստացվում է տասը. որովհետև (չորսին) գումարած երեք հավասար է յոթի, գումարած նաև երկու հավասար է իննի, և գումարած մեկ՝ հավասար է տասի: Իսկ տասը թիվը կատարյալ է, որովհետև բոլոր միավորների առանձին անվանումներով հանդես են գալիս մինչև տասը, իսկ նրանից հետո համապատասխանաբար կրկնվում է»⁷:

Նկատենք, որ այս դեպքում Դավիթը ավելի հարմար է գտնում 1-ը (նաև 2-ը) թիվ անվանել: Սակայն $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ արտահայտությունը կարելի է նաև այլ կերպ քննարկել: Եվ իրոք, որոշ այլ հեղինակներ 10-ի առանձնահատուկ լինելը շատ ավելի համոզիչ են պատճառաբանում: Այստեղ Դավիթը գովաբանում է 10-ը միայն տասնահենների հիմքը լինելու պատճառով:

Եզրափակենք Ալբին Յորբցու (որը հայտնի է նաև Ֆլակկուս Ալբինիուս անունով) վերաբերյալ մի քանի նշումներով: Նա ծնվել է հավանաբար Յորբ քաղաքում, ապրել 732—804 թթ., եղել է Կառլոս Մեծի մերձավորներից մեկը և նրա խորհրդատուն: Իր ծավալուն երկերը գրված են լատիներեն⁸: Այժմյան մաթեմատիկոսները հաճախ մեջ են բերում Ալբինի՝ կատարյալ թվերի վերաբերյալ դիտողություններից մեկը: (Դա շատ կհամարենք Դավիթ Անհաղթը, որովհետև խոսքը Նոյի տապանի մասին է): Ըստ Ալբինի առաջին արարումը ավելի կատարյալ է, քան երկրորդը (երկրորդն է համարվում կյանքի նոր սկիզբը ջրհեղեղից և տապանից հետո): Առաջին դեպքում շնչերի քանակը 6 է, որը կատարյալ թիվ է, իսկ երկրորդում՝ 8, այն թերակատար է: Հետաքրքրաբար՝ ընթերցողը կարող է ավելի մանրամասն ուսումնասիրել Ալբինի այդ նյութին վերաբերող թեզիսները Դաֆնինին ուղղված նամակում (տե՛ս հավելվածը): Այս նամակը անգլո-սաքսոնական մաթեմատիկաի հատուկ հետաքրքիր փաստարկ է: Ալբինի թվաբանությունը իր հերթին ևս որոշ չափով հետաքրքիր է: Աշխարհի երկրորդ արարման մասնակիցներն էին Նոյը, նրա զավակները և նրանց (4) կանայք: Բնավ հեշտ չէ թվել առաջին արարման անգամներին: Ընդունենք, որ դրանք են՝ Ադամը, Եվան, Կայենի և Սեթի կանայք, Նոյի և Ենոքի կանայք (վերջին երկուսը Կայենի և Սեթի զավակներն են): Աբելը չէր ամուսնացել:

Նադումաբանական վիճակի հետադոտումը հանգեցնում է այն եզրակացության, որ աշխարհի առաջին արարումը թույլ էր տալիս խուսափել հորեղբոր և քրոջ որդիների կամ ավելի մոտ ազգականների միջև ամուսնություններից: Սակայն երկրորդ արարումը անհրաժեշտ էր դարձնում ամուսնություններ հորեղբոր և քրոջ որդիների միջև: Գուցե այս փաստն է մտաբերում Ալբինը աշխարհի երկրորդ արարումը անվանելով թերակատար (թվերի տեսություն իմաստով):

Նշանակալից է նաև այն, որ Ալբինն իր նամակում բացահայտում է թագուհիների (60) և հարճերի (80) քանակը Սողոմոնի «Երգ երգոցում»: Չուգենալով նվազեցնել ընթերցողի հաճույքը, այստեղ չեմ ներկայացնի այդ հատվածը: Սակայն կնշեմ, որ այն անշուշտ գործադրում է կատարյալ թվերի տեսությունը, ինչպես նաև պարզեցնում է 10-ի առանձնահատուկ դիրքը:

Արդեն նշվեց, որ Դավիթը առանձնացնում էր 10 թիվը տասնահենների հիմքը լինելու համար, Ալբինը նույնպես գործադրում էր 10 թիվը նույն դերում: Սակայն հին հեղինակները 10-ը որպես արտակարգ դիտելու ավելի խոր հիմքեր ունեն: Թեոն Զմյուտնացին 10-ը անվանում է կատարյալ և այդ տեսակետը ալսպես է բացատրված նրա խմբագրի (Դյուպյուիի) կողմից:

⁷ Նույն տեղում:

⁸ B. Flacci Albinii seu Alcuini Opera Omnia (J.-P. Migne. Patrologiae latinae cursus completus. Vol. 100, 101). Paris, 1851; *Նամակները տես* Monumenta Germaniae Historica: Epistolarum IV: Epistolae Karolini Aevi II. Ed. E. Duemmler. Berlin, 1895.

Le nombre $10=1+2+3+4$; or 1 était le principe des nombres; 2 représentait la première ligne (la ligne droite qui est définie par deux des points); 3 représentait la première surface (le triangle défini par ses trois sommets); et 4 représentait le premier solide (le tétraèdre défini par ses quatre sommets). Donc la décade $1+2+3+4$ symboliserait tout ce qui existe⁹.

Այս դիտողությունները զարմանալիորեն ժամանակակից են հնչում: Հետաքրքիրն այն է, որ դրանք հիմնված են ավելի տիեզերաբանության, քան փիլիսոփայության վրա, վերաբերում են տիեզերքի բնության և ոչ թե ամբողջ թվերի արստրակտ հատկություններին:

Հավելված

ԱԼՔՎԻՆԻ ՆԱՄԱԿԸ (Մոմ 798 p.)

DILECTISSIMO FILIO MEO DAPHNI ALBINUS PATER SALUTEM

Quia pridem de numerorum ratione mecum egisti interrogans, quomodo in excellentissimo cantico Salomonis sexagenarius numerus reginis conveniret, et octogenarius concubinis, et cur adolescentulae sine numero essent, igitur si noverim te plenariam huius rationem in sanctorum patrum tractatibus legisse, tamen ne tuam contristem sollicitudinem, dicam quod meae videtur imperitiae posse convenire, et quod tantum inter familiares aures latitari velim, quia me publico magnorum doctorum iudicio praesentare non audeo.

Legimus enim in numerorum subtilissima ratione alios numeros esse pares, alios impares; et item parium numerorum alios esse perfectos, alios esse imperfectos; item et imperfectorum alios esse superfluos, alios exiguos. Pares autem numeri sunt, qui in duo aequalia dividi possunt: ut octo in bis quattuor, et quattuor in bis duo. Impares sunt, qui in duo aequalia dividi non possunt, ut septem vel novem, quos si divides, duas aequales in eis partes invenire non potes. Item ipsorum parium numerorum alii sunt perfecti, alii imperfecti. Perfectus numerus est, qui partibus suis impletur, nec diminutione frangitur, nec multiplicatione partium superabundat, ut senarius numerus. Habet enim senarius dimidiam sui partem tres. et tertiam duo, et sextam unam, qui simul iuncti eundem implent senarium, nam unum, duo, tres faciunt qui partibus suis implentur. Nec diminutione frangitur, nec abundantia supercrescit. idcirco perfectissimus creator, qui universa valde bona creavit, in eo numero originalis mundi creaturas condidit, ut ostenderet, omnia in suo genere esse perfecta quae condidit.

Item octonarius numerus, si eum in partes a se ipso nominatas divides, minor se ipso ipse invenitur, habet enim dimidiam sui partem quattuor, et quartam duas, et octavam unam: quae simul ducta octonarium non implent, sed septinarium: unum, duo, et quattuor septem effi-

⁹ Théon de Smyrne. Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon. Trad. et ed. par J. Dupuis. Paris, 1892.

ciunt, non octo: et idcirco secunda huius generis origo ab octonario numero crescere coepit. Videlicet octo animas in arca esse legimus, a quibus totius humani generis multitudo pullulavit, ut ostenderetur secunda origo esse imperfectior, quam prima, quae in senario numero creata est. Ita et inde redemptor noster et reparator primae perfectionis. sicut Adam sexta die ex virgine terra creatus est, ita ille sexta aetate ex virgine Maria factus est homo, ut senarii numeri perfectionem suo dicaret adventu, quam in primi hominis monstravit conditione.

Item progressionem numerorum articulis, quasi quibusdam unitatibus, ad infinita crescere per quasdam finitas formas videmus. Nam prima progressio numerorum est ab uno usque ad decem. Secunda a decem usque ad centum. Tertia a centenatio numero usque ad millenarium. Et eandem regulam perfectionis vel imperfectionis, quam prima unitas in suis numeris sub denario servat, eandem et secundam in suis denariis sub centenatio servare necesse est. Nam sicut senarius numerus in suis partibus per unitatem positus perfectus est in se ipso, ita et sexagenarius partibus suis positus per denarium perfectus esse dinoscitur, ita ut semper in sexagenario numero denarius numerus locum obtineat unitatis in senario, et sit illius divisio per partes suas eiusmodi: medietas sexagenarii est tricenarius, sicut ternarius senarii; et est tertia pars vicenarius, sicut binarius in senario; et denarius in eo locum tenet unitatis; quae summa si colligitur eundem implet sexagenarium. Decem itaque et viginti et triginta, sexaginta sunt, sicut et tres et duo et unum, sex.

Poteris et per te ipsum iuxta eandem regulam octogenarii explorare diminutionem. Nam octogenarii quadragenarius medietas et viginti quarta pars, et denarius octava: quae simul ducta septuaginta faciunt non octoginta; decem et viginti et quadraginta, septuaginta sunt.

Sexaginta vero reginae et octoginta concubinae rectores sunt sanctae ecclesiae. Sed alii ex illis propter solam caritatem Christi docent; alii terrena sequentes commoda laborant in ecclesia non caelestis patriae ardore, sed terreni lucri gratia desudant in docendo. Illi in sua imperfectione octogenario numero comparantur, illi perfecta beatitudine sexagenario designantur et reginarum numero digni efficientur, quia spiritalem sobolem propter amorem solummodo sponsi et multiplicandis filiis in caelestem patriam felicem prolem baptizando seu praedicando generare non desistunt. Illi vero concubinarum nomine denotantur, quia seculi ambitione vel temporalis honoris gratia praedicando seu baptizando nobiles quidem generant saepe filios, sed illi ignobiles in semetipsis permanent.

Quorum tu contubernium, fili carissime, fuge, obsecro, et si te quodcumque Dei misericordia doctorem dignetur efficere, tu pro eius amore laborare non cessa, qui pro tua salute sanguinem suum fundere non dubitavit, ut tibi sit merces non periturae divitiae, sed perpetua gloria in caelesti thalamo domitui nostri Iesu Christi cui laus et gloria in omnes aeternitates. Amen.