

**ВЫНУЖДЕННЫЕ СДВИГОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШТАМПА НА
ГРАНИЦЕ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С
МЕЖФАЗНЫМИ ДЕФЕКТАМИ**

Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В.

Ключевые слова: динамическая смешанная задача, штамп, межфазные дефекты, стационарные колебания.
Hakobyan V.N., Amirjanyan A.A., Hakobyan L.V.

Forced shift vibrations of stamp on the border of composite half-space with interphase defects

Keywords: dynamic mixed boundary value problem, die, interphase defects, vibrations.

This paper considers the antiplane stress state of a composite half-space obtained by junction a homogeneous layer and half-space with interphase tunnel cracks and absolutely rigid inclusions, which is deformed by an absolutely rigid die with a plane base acting on the boundary plane of the half-space under the influence of periodically changing loads in time. The governing system of SIE with respect to the amplitudes of the contact stresses acting under the die, the jump of stresses acting on the long sides of the inclusions and the dislocation of the points of the crack edges was obtained. In some particular cases, the method of mechanical quadratures carried out a numerical analysis and revealed patterns of change in stress fields and deformations depending on the physical and mechanical and geometric characteristics of the problem.

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Ա.Ա., Հակոբյան Լ.Վ.

Դրոշմի ստիպողական սահմանի տատանումները միջֆազային դեֆեկտներ պարունակող բաղադրյալ կիսահարթության եզրին

Հիմնաբառեր: դինամիկ խառը խնդիր, միջֆազային դեֆեկտներ, ներդրակ, ստացիոնար տատանումներ

Ուսումնասիրված է միջֆազային ճաքերի և բացարձակ կոշտ ներդրակների համակարգ պարունակող տարրեր նյութերից պատրաստված կիսատարածության և շերտի միացումից ստացված բաղադրյալ կիսատարածության հակահարթ լարվածային վիճակը, երբ այն դեֆորմացվում է ժամանակի ընթացքում պարբերական օրենքով փոփոխվող բեռների ազդեցության տակ գտնվող հարթ հիմքով բացարձակ կոշտ դրոշմի օգնությամբ: Ստացվել է խնդրի որոշիչ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը դրոշմի տակ գործող կոնտակտային լարումների ամպլիտուդների, ներդրակների երկար կողմերի տակ գործող լարումների թռիչքների ամպլիտուդների և ճաքերի ավերի կետերի կետերի դիսլոկացիաների խտությունների ամպլիտուդների նկատմամբ: Որոշ մասնավոր դեպքերում մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդով կատարվել են թվային վերլուծություն և բացահայտվել են լարվածային և դեֆորմացիոն դաշտերի փոփոխման օրինաչափությունները կախված խնդրի ֆիզիկամեխանիկական և երկրաչափական բնութագրիչներից:

Рассмотрено антиплоское напряжённое состояние составного полупространства, полученного при помощи соединения однородного слоя и полупространства с межфазными туннельными трещинами и абсолютно жёсткими включениями, деформируемым абсолютно жёстким штампом с плоским основанием, действующим на граничной плоскости полупространства под воздействием периодически изменяющихся во времени нагрузок. Получена определяющая система СИУ относительно амплитуд контактных напряжений, действующих под штампом, скачка напряжений, действующих на длинные стороны включений и дислокации точек берегов трещин. В некоторых частных случаях методом механических квадратур

проведён численный анализ и выявлены закономерности изменения полей напряжений и деформаций в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи.

Введение

Изучению актуальных с практической точки зрения задач о вынужденных стационарных колебаниях многослойных систем с межфазными дефектами типа трещин и абсолютно жёстких включений, посвящено много работ. В развитии этого направления механики деформируемого твёрдого тела большой вклад внесла Ростовская школа механиков. Академиком РАН В.А.Бабешко и его учениками были поставлены и решены ряд двумерных и трёхмерных задач в этом направлении. Ими разработаны и предложены эффективные методы решения динамических задач для слоистых сред с межфазными дефектами [1-4]. Однако, мало известно работ, посвящённых динамическим задачам о напряжённо-деформированном состоянии слоистых структур, одновременно содержащих разные межфазные дефекты. С другой стороны, с точки зрения сейсмологии, сейсмоустойчивого строительства, сейсморазведки и дефектоскопии одной из важных задач является выявление закономерностей взаимовлияния этих концентраторов напряжений в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задач, а также частоты вынужденных колебаний, чему и посвящена настоящая работа. Отметим также работы [5-7], которые непосредственно связаны с настоящей работой.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть составное упругое полупространство, отнесённое к декартовой системе координат $Oxyz$ и составленное из слоя толщины h и полупространства, изготовленных из разнородных материалов с модулями сдвига μ_1 и μ_2 , соответственно, заполняющих соответственно области $0 \leq y \leq h$ и $y \leq 0$, на плоскости их стыка $y = 0$, ослаблено магистральными межфазными трещинами, занимающими область

$\left\{ y = 0; -\infty < z < \infty; x \in L_1 = \bigcup_{n=1}^N (c_n, d_n) \right\}$ и усилена межфазными, магистральными, абсолютно жёсткими, тонкими включениями, занимающими область $\left\{ y = 0; -\infty < z < \infty; x \in L_2 = \bigcup_{n=2}^M (a_n, b_n) \right\}$. Будем полагать, что

составное полупространство деформируется при помощи абсолютно жёсткого полового штампа с плоским основанием, приложенным к свободной поверхности слоя в области $\{ a_1 \leq x \leq b_1; -\infty < z < \infty \}$ и находящимся под воздействием периодически изменяющейся касательной сосредоточенной нагрузки $T_0 e^{i\omega t}$, а также касательных напряжений интенсивности $q(x) e^{i\omega t}$, приложенных соответственно к верхнему и нижнему берегам межфазных трещин. При этом, массами штампа и включений будем пренебрегать.

Ставится задача: определить закономерности изменения контактных напряжений, действующих под штампом и под длинными сторонами включений, раскрытия трещин и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещин

в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи, а также частоты вынужденных колебаний.

Снабдив характерные величины слоя и полупространства соответственно индексами 1 и 2, поставленную задачу в базовой плоскости Oxy можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned}
W_1(x, 0, t) &= W_2(x, 0, t) & (x \notin L_1 \cup L_2) \\
\tau_{yz}^{(1)}(x, 0, t) &= \tau_{yz}^{(2)}(x, 0, t) & (x \notin L_1 \cup L_2) \\
\tau_{yz}^{(1)}(x, h, t) &= 0 & (x < a_1; x > b_1) \\
\tau_{yz}^{(j)}(x, 0, t) &= q(x) e^{i\omega t} & (x \in L_j; j = 1, 2) \\
W_j(x, 0, t) &= \text{const} e^{i\omega t} & (x \in L_2; j = 1, 2) \\
W_1(x, h, t) &= \text{const} e^{i\omega t} & (a_1 < x < b_1)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $W_j(x, y, t)$ ($j = 1, 2$) – соответственно, смещения точек слоя и полупространств по направлению оси Oz , удовлетворяющие, каждое в области своего определения, уравнению

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = \frac{1}{(c_2^{(j)})^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

где $c_2^{(j)}$ ($j = 1, 2$) – скорости распространения сдвиговых волн, соответственно, в слое и полупространстве, а $\tau_{yz}^{(j)}(x, y, t)$ ($j = 1, 2$) – касательные напряжения, действующие в слое и полупространстве связанные со смещениями известными формулами:

$$\tau_{yz}^{(j)}(x, y, t) = \mu_j \frac{\partial W_j(x, y, t)}{\partial y} \quad (j = 1, 2). \tag{1.3}$$

Как и в работе [7], представим искомые функции в виде $f(x, y, t) = f(x, y) e^{i\omega t}$. Тогда, амплитуды функций смещений $W_j(x, y)$ будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = \left(\frac{\omega}{c_2^{(j)}} \right)^2 W_j(x, y) \quad (j = 1, 2). \tag{1.4}$$

Решения уравнений (1.4) представим в виде интегралов Фурье

$$\begin{aligned}
W_1(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(s) e^{-\chi_1(s)y} + B_1(\lambda) e^{\chi_1(s)y}] e^{-isx} ds; \\
W_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_2(\lambda) e^{\chi_2(s)y} e^{-isx} ds
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\chi_j(s) = \sqrt{s^2 - k_j^2}$ ($k_j = \omega / c_2^j$, $j = 1, 2$), а $A_j(s)$ ($j = 1, 2$) и $B_1(s)$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. При этом, выбраны те ветви функций $\chi_j(s)$ ($j = 1, 2$) [8], которые обеспечивают затухание колебаний на бесконечности. Амплитуды напряжений будут выражены формулами:

$$\begin{aligned}\tau_{yz}^{(1)}(x, y) &= -\frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_1(\lambda) [A_1(\lambda) e^{-\chi_1(\lambda)y} - B_1(\lambda) e^{\chi_1(\lambda)y}] e^{-i\lambda x} d\lambda; \\ \tau_{yz}^{(2)}(x, y) &= \frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_2(\lambda) A_2(\lambda) e^{\chi_2(\lambda)y} e^{-i\lambda x} d\lambda\end{aligned}\quad (1.6)$$

Введём неизвестные функции амплитуд контактных напряжений под штампом $\tau(x)$, разности амплитуд смещений на берегах трещин $W(x)$ и разности амплитуд напряжений, действующих на длинных сторонах включений $T(x)$ по формулам:

$$\begin{aligned}\tau_{yz}^{(1)}(x, h) &= \tau(x) \quad (a < x < b); \\ W_1(x, 0) - W_2(x, 0) &= W(x) \quad (x \in L_1); \\ \tau_{yz}^{(1)}(x, 0) - \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) &= T(x) \quad (x \in L_2).\end{aligned}\quad (1.7)$$

Решим вспомогательную граничную задачу, состоящую из первых трёх условий задачи (1.1) и условий (1.7). Используя соотношения (1.5) – (1.6), удовлетворим условиям вспомогательной граничной задачи и выразим коэффициенты $A_j(s)$ ($j = 1, 2$) и $B_1(s)$ через трансформанты Фурье $\bar{W}(s)$, $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{T}(s)$ функций $W(x)$, $\tau(x)$ и $T(x)$. Получим:

$$\begin{aligned}A_1(s) &= \frac{\mu\chi_2(s)e^{\chi_1(s)h}\bar{W}(s)}{\Delta(s)} + \frac{[\chi_1(s) - \mu\chi_2(s)]\bar{\tau}(s)}{\mu_1\Delta(s)} - \frac{e^{\chi_1(s)h}\bar{T}(s)}{\mu_1\Delta(s)}; \\ B_1(s) &= \frac{\mu\chi_2(s)e^{-\chi_1(s)h}\bar{W}(s)}{\Delta(s)} + \frac{[\chi_1(s) + \mu\chi_2(s)]\bar{\tau}(s)}{\mu_1\Delta(s)} - \frac{e^{-\chi_1(s)h}\bar{T}(s)}{\mu_1\Delta(s)}; \\ A_2(s) &= \frac{2\mu\chi_1(s)\text{sh}(\chi_1(s)h)\bar{W}(s)}{\Delta(s)} + \frac{2\bar{\tau}(s)}{\mu_1\Delta(s)} - \frac{2\text{ch}(\chi_1(s)h)\bar{T}(s)}{\mu_1\Delta(s)},\end{aligned}$$

где

$$\Delta(s) = 2[\chi_1(s)\text{sh}(\chi_1(s)h) + \mu\chi_2(s)\text{ch}(\chi_1(s)h)]; \quad \mu = \mu_2 / \mu_1.$$

При помощи полученных значений коэффициентов $A_j(s)$ ($j = 1, 2$) и $B_1(s)$ вычислим значения функций $W_1'(x, h)$ и $\tau_{yz}^{(j)}(x, 0)$ ($j = 1, 2$). Получим:

$$\begin{aligned}
W_1'(x, h) &= \frac{1}{\pi \mu_1} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau(s) ds}{s-x} + \int_{a_1}^{b_1} K_{11}(s-x) \tau(s) ds + \int_{L_1} K_{12}(s-x) W'(s) ds + \\
&+ \int_{L_2} K_{13}(s-x) T(s) ds \quad (-\infty < x < \infty); \\
\tau_{yz}^{(2)}(x, 0) &= -\frac{\mu T(x)}{1+\mu} + \frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)} \int_{L_1} \frac{W'(s) ds}{s-x} + \int_{a_1}^{b_1} K_{2,1}(s-x) \tau(s) ds + \\
&+ \int_{L_1} K_{2,2}(s-x) W'(s) ds + \int_{L_1} K_{2,3}(s-x) T(s) ds \quad (-\infty < x < \infty); \\
W_1'(x, 0) &= \frac{\mu W'(x)}{1+\mu} - \frac{1}{\pi \mu_1 (1+\mu)} \int_{L_2} \frac{T(s) ds}{s-x} + \int_{a_1}^{b_1} K_{3,1}(s-x) \tau(s) ds + \\
&+ \int_{L_1} K_{3,2}(s-x) W'(s) ds + \int_{L_2} K_{3,3}(s-x) T(s) ds \quad (-\infty < x < \infty); \\
W_2'(x, 0) &= W_1'(x, 0) - W'(x); \quad \tau_{yz}^{(1)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) + T(x).
\end{aligned}
\tag{1.8}$$

$$\text{Здесь } K_{ij}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{ij}(s)}{\Delta(s)} e^{ist} ds \quad (i, j = 1-3);$$

$$Q_{11}(s) = \frac{2s(\chi_1 \operatorname{ch}(\chi_1 h) + \mu \chi_2 \operatorname{sh}(\chi_1 h)) - \operatorname{sign} s \chi_1(s) \Delta(s)}{2i\mu_1 \chi_1(s)};$$

$$Q_{12}(s) = Q_{21}(s) = \mu \chi_2(s); \quad Q_{13}(t) = -Q_{31}(s) = -\frac{s}{i\mu_1};$$

$$Q_{23}(s) = \frac{\mu[2(1+\mu)\chi_2(s)\operatorname{ch}(\chi_1 h) - \Delta(s)]}{2(1+\mu)};$$

$$Q_{22}(s) = \frac{\mu_2[2(1+\mu)\chi_1(s)\chi_2(s)\operatorname{sh}(\chi_1 h) - |s|\Delta(s)]}{2i(1+\mu)s};$$

$$Q_{32}(s) = \frac{\mu[2(1+\mu)\chi_2(s)\operatorname{ch}(\chi_1 h) - \Delta(s)]}{2(1+\mu)};$$

$$Q_{33}(s) = -\frac{[2(1+\mu)s\operatorname{ch}(\chi_1 h) - \operatorname{sgn}(s)\Delta(s)]}{2i\mu_1(1+\mu)}$$

Заметим, что в случае, когда $\Delta(s)$ не имеет действительных корней, ядра $K_{ij}(t)$ — регулярные функции от t . В случае же, когда $\Delta(s)$ имеет действительные корни,

интегралы Фурье, при помощи которых представлены эти функции, нужно понимать в смысле главного значения Коши. При этом, так как $\Delta(s)$ – чётная функция от S , то она будет иметь пары действительных нулей, симметрично расположенных относительно начала координат $\pm s_k$ ($k = 1 - K$). Следовательно, $\Delta(s)$ около каждой из этих точек можно представить в виде $\Delta(s) = (s^2 - s_k^2)\Delta_k(s)$, где функция $\Delta_k(s_k) \neq 0$. Тогда, используя значения интегралов [9]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ist} ds}{(s^2 - s_0^2)} = -\pi \frac{\sin s_0 |t|}{s_0},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(s) e^{ist} ds}{(s^2 - s_0^2)} = \frac{2i}{s_0} [Si(s_0 t) \cos(s_0 t) - ci(s_0 |t|) \sin(s_0 |t|)]$$

функции $K_{ij}(t)$ можно представить в виде:

$$K_{ij}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Q_{ij}(s)}{\Delta(s)} - \sum_{k=1}^K \frac{\text{sign}(s) Q_{ij}(s_k)}{\Delta_k(s_k)(s^2 - s_k^2)} e^{s_k^2 - s^2} \right] e^{ist} ds +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^K \frac{Q_{ij}(s_k)}{\Delta_k(s_k)} e^{s_k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(s) (e^{-s^2} - e^{s_k^2})}{(s^2 - s_k^2)} e^{ist} ds +$$

$$+ \frac{2i}{\pi} \sum_{k=1}^K \frac{Q_{ij}(s_k)}{s_k \Delta_k(s_k)} [Si(s_k t) \cos(s_k x) - ci(s_k |t|) \sin(s_k |t|)],$$

в случае, когда функции $Q_{ij}(s)$ – нечётные, и в виде

$$K_{ij}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Q_{ij}(s)}{\Delta(s)} - \sum_{k=1}^K \frac{Q_{ij}(s_k)}{\Delta_k(s_k)(s^2 - s_k^2)} e^{s_k^2 - s^2} \right] e^{ist} ds +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^K \frac{Q_{ij}(s_k)}{\Delta_k(s_k)} e^{s_k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{-s^2} - e^{s_k^2})}{(s^2 - s_k^2)} e^{ist} ds - \sum_{k=1}^K \frac{Q_{ij}(s_k)}{s_k \Delta_k(s_k)} \sin s_k |t|,$$

когда функции $Q_{ij}(s)$ – чётные. Нетрудно заметить, что в приведённых представлениях ядер $K_{ij}(t)$ интегралы в любой точке интервала интегрирования сходятся в обычном смысле и их можно использовать при вычислениях.

Теперь, используя представления (1.8), удовлетворим последним трём условиям (1.1), первоначально перейдя в них к амплитудам и дифференцируя последние два из этих условий по x . В итоге, учитывая, что на трещинах скачки напряжений, а на включениях функции дислокации равны нулю, для определения неизвестных контактных напряжений $\tau(x)$, функции дислокации точек берегов трещины $W'(x)$ и

скачка контактных напряжений на длинных сторонах включений $T(x)$, придём к следующей определяющей системе сингулярных интегральных уравнений первого рода:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi\mu_1} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau(s)ds}{s-x} + \int_{a_1}^{b_1} K_{11}(s-x)\tau(s)ds + \int_{L_1} K_{12}(s-x)W'(s)ds + \\ \quad + \int_{L_2} K_{13}(s-x)T(s)ds = 0 \quad (a < x < b); \\ \frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)} \int_{L_1} \frac{W'(s)ds}{s-x} + \int_{a_1}^{b_1} K_{21}(s-x)\tau(s)ds + \int_{L_1} K_{22}(s-x)W'(s)ds + \\ \quad + \int_{L_2} K_{23}(s-x)T(s)ds = q(x) \quad (x \in L_1); \\ -\frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_{L_2} \frac{T(s)ds}{s-x} + \int_{a_1}^{b_1} K_{31}(s-x)\tau(s)ds + \int_{L_1} K_{32}(s-x)W'(s)ds + \\ \quad + \int_{L_2} K_{33}(s-x)T(s)ds = 0 \quad (x \in L_2). \end{array} \right. \quad (1.9)$$

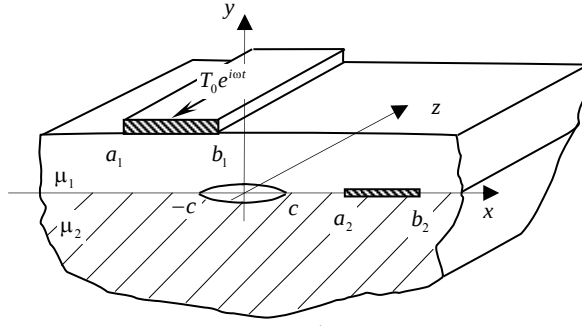
Полученную систему нужно рассматривать с учётом уравнений движения штампа и включений при условиях непрерывности смещений в концевых точках трещин, которые в рассматриваемом случае можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{a_j}^{b_j} \tau(x)dx &= T_0; \quad \int_{a_j}^{b_j} T(x)dx = 0; \quad (j = 2 - M); \\ \int_{c_j}^{d_j} W'(x)dx &= 0 \quad (j = 1 - N); \end{aligned} \quad (1.10)$$

Систему определяющих сингулярных интегральных уравнений (1.9) при условиях (1.10) в общем случае можно решать как методом ортогональных многочленов Чебышева, сведя к квазивполне регулярным бесконечным системам алгебраических уравнений из $M + N$ уравнений, так и численно-аналитическим методом механических квадратур [9]. Не останавливаясь на этом, рассмотрим некоторые частные случаи поставленной задачи, которые, на наш взгляд, представляют самостоятельный интерес.

2. Антиплоские стационарные колебания штампа на границе составного полупространства с межфазной трещиной и абсолютно жёстким включением

Рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда составное полупространство расслаблено одной магистральной межфазной трещиной, занимающей область $\{y = 0; -\infty < z < \infty; x \in (-c, c)\}$, усилено одним межфазным включением, занимающим область $\{y = 0; -\infty < z < \infty; x \in (a_2, b_2)\}$ и деформируется при помощи абсолютно жёсткого полосового штампа с плоским основанием, приложенного к свободной поверхности слоя в области $\{y = h; a_1 \leq x \leq b_1; -\infty < z < \infty\}$ (фиг.1).



Фиг.1

В этом частном случае система определяющих сингулярных интегральных уравнений (1.9) и условия (1.10) примут вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi\mu_1} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau(s)ds}{s-x} + \int_{a_1}^{b_1} K_{1,1}(s-x)\tau(s)ds + \int_{-c}^c K_{1,2}(s-x)W'(s)ds + \\
 & \quad + \int_{a_2}^{b_2} K_{1,3}(s-x)T(s)ds = 0 \quad (a_1 < x < b_1); \\
 & \frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)} \int_{-c}^c \frac{W'(s)ds}{s-x} + \int_{a_1}^{b_1} K_{2,1}(s-x)\tau(s)ds + \int_{-c}^c K_{2,2}(s-x)W'(s)ds \\
 & \quad + \int_{a_2}^{b_2} K_{2,3}(s-x)T(s)ds = q(x) \quad (-c < x < c) \\
 & -\frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_{a_2}^{b_2} \frac{T(s)ds}{s-x} + \int_{a_1}^{b_1} K_{3,1}(s-x)\tau(s)ds + \int_{-c}^c K_{3,2}(s-x)W'(s)ds + \\
 & \quad + \int_{a_2}^{b_2} K_{3,3}(s-x)T(s)ds = 0 \quad (a_2 < x < b_2). \\
 & \int_{a_1}^{b_1} \tau(x)dx = T_0; \quad \int_{a_2}^{b_2} T(x)dx = 0; \quad \int_{-c}^c W'(x)dx = 0.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Систему определяющих сингулярных интегральных уравнений (2.1) при условиях (2.2) будем решать численно-аналитическим методом механических квадратур. Для этого при помощи замены переменных $x = p_j t + q_j$ ($p_j = (c_j - b_j)/2$, $q_j = (c_j + b_j)/2$) ($j = 1, 2$) в первом и последнем уравнениях (2.1) и $x = ct$ во втором уравнении (2.1) перейдём на интервал $(-1, 1)$ и введя обозначения

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= p_1 \tau(p_1 t + q_1) / T_0; \quad \varphi_2(t) = W'(ct); \quad \varphi_3(t) = p_1 T(p_2 t + q_2) / T_0; \\
R_{11}(\xi, t) &= p_1 \mu_1 K_{11}((\xi - t) p_1); \quad R_{12}(\xi, t) = c p_1 \mu_1 K_{12}(c \xi - p_1 t - q_1) / T_0; \\
R_{13}(\xi, t) &= p_2 \mu_1 K_{13}(p_2 \xi + q_2 - p_1 t - q_1); \\
R_{21}(\xi, t) &= \frac{(1 + \mu) T_0}{\mu_2} K_{21}(p_1 \xi + q_1 - ct); \\
R_{22}(\xi, t) &= \frac{c(1 + \mu)}{\mu_2} K_{22}(c(\xi - t)); \\
R_{23}(\xi, t) &= \frac{p_2(1 + \mu) T_0}{p_1 \mu_2} K_{23}(p_2 \xi + q_2 - ct); \\
R_{31}(\xi, t) &= -\mu_1 p_1 (1 + \mu) K_{31}(p_1 \xi + q_1 - p_2 t - q_2); \\
R_{32}(\xi, t) &= -\frac{p_1 \mu_1 (1 + \mu)}{T_0} K_{32}(c \xi - p_2 t - q_2); \\
R_{33}(\xi, t) &= -\mu_1 (1 + \mu) p_2 K_{33}(p_2(\xi - t)); \\
f_1(t) &= f_3(t) = 0; \quad f_2(t) = (1 + \mu) q(ct) / \mu_2,
\end{aligned}$$

перепишем в виде:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_j(s) ds}{s - x} + \sum_{i=1}^3 \int_{-1}^1 R_{ji}(s, x) \varphi_i(s) ds = f_j(x) \quad (2.3)$$

$(-1 < x < 1; \quad j = 1-3)$

При этом, условия (2.2) запишутся в виде:

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx = 1; \quad \int_{-1}^1 \varphi_j(x) dx = 0 \quad (j = 2, 3). \quad (2.4)$$

Легко проверить, что функции $\varphi_j(t)$ ($j = 1-3$) в концевых точках интервала интегрирования ± 1 имеют корневую особенность и их можно представить в виде:

$$\varphi_j(t) = \frac{\varphi_j^*(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (j = 1-3), \quad (2.5)$$

где $\varphi_j^*(x)$ – непрерывные функции, ограниченные вплоть до концов интервала $[-1, 1]$.

Подставляя значения функций $\varphi_j(x)$ ($j = 1-3$) в (2.3)-(2.4) и используя соотношения, приведённые в [9], по стандартной процедуре, придём к системе из $3n$ алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_j^*(\xi_i)$ ($j = 1-2; i = \overline{1, n}$).

После определения функций $\varphi_j^*(\xi_i)$ нетрудно при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа восстановить функции $\varphi_j(x)$ ($j = 1-3$) и определить все

необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в слое и полупространстве.

Приведём формулу для определения коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины. С этой целью используем второе и последнее из соотношений (1.8), когда $(|x| > c)$. Далее сформулируем это соотношение на интервале $(-1, 1)$ и представим в виде:

$$\tau_{yz}^{(2)}(at, 0) = \frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(\xi) d\xi}{\xi - t} + F_2(t) \quad (|t| > 1), \quad (2.6)$$

$$\text{где } F_2(t) = T_0 \int_{-1}^1 K_{21}(p_1\xi + q_1 - ct) \varphi_1(\xi) d\xi + c \int_{-1}^1 K_{22}(a(\xi - t)) \varphi_2(\xi) d\xi + \\ + T_0 \frac{p_2}{p_1} \int_{-1}^1 K_{23}(p_2\xi + q_2 - ct) \varphi_3(\xi) d\xi;$$

— ограниченная функция в обоих концах трещины.

Подставляя в (2.6) значение функции $\varphi_2(t)$ из (2.5) и учитывая соотношение [10]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{ds}{\sqrt{c^2 - s^2} (s - x)} = -\frac{\text{sign}(x)}{\sqrt{x^2 - c^2}} \quad (|x| > c),$$

для определения амплитуд безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины получим выражения:

$$K_{III}^*(\pm c) = \frac{K_{III}^{(1)}(\pm c) + iK_{III}^{(2)}(\pm c)}{\mu_2} = \sqrt{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{|t \mp 1|} \tau_{yz}^{(i)}(ct, 0) / \mu_2 = \mp \frac{\sqrt{\pi} \varphi_2^*(\pm 1)}{(1+\mu)}.$$

Тогда [12]

$$K_{III}(\pm c, t) = K_{III}^*(\pm c) e^{i\omega t} = |K_{III}^*(\pm c)| e^{i(\omega t - \delta)} \quad (\delta = -\arctg(K_{III}^{(2)} / K_{III}^{(1)})).$$

Для определения же амплитуды безразмерного раскрытия трещины будем использовать формулу:

$$w_*(t) = w(ct) / c = \int_{-1}^t \varphi_2(\xi) d\xi.$$

Для определения же контактных напряжений, действующих на длинные стороны включения, опять будем использовать второе и последнее из соотношений (1.8), когда $x \in (a_2, b_2)$. Написав его на интервале $(-1, 1)$, для безразмерных контактных напряжений получим формулы:

$$\tau_2^*(t) = \frac{p_1 \tau_{yz}^{(2)}(p_2 t + q_2, 0)}{T_0} = -\frac{\mu \varphi_3(t)}{1+\mu} + \sum_{i=1}^3 \int_{-1}^1 K_{2,i}^*(s, t) \varphi_i(s) ds; \\ (-1 < t < 1; \quad j = 1-3)$$

$$\begin{aligned}\tau_1^*(t) &= \frac{p_1 \tau_{yz}^{(1)}(p_2 t + q_2, 0)}{T_0} = \tau_2^*(t) + \varphi_3(t), \\ K_{2,1}^*(s, t) &= p_1 K_{2,1}(p_1 s + q_1 - p_2 t - q_2); \\ K_{2,2}^*(s, t) &= \frac{p_1 \mu_2}{\pi T_0 (1 + \mu)(s - p_2 t / c - q_2 / c)} + \frac{p_1 c}{T_0} K_{2,2}(cs - p_2 t - q_2); \\ K_{2,3}^*(s, t) &= p_2 K_{2,3}(p_2(s - t));\end{aligned}$$

Численный анализ.

В некоторых частных случаях проведён численный расчёт и выявлены закономерности изменения важных механических характеристик задачи в зависимости от места расположения концентраторов напряжений и частоты вынужденных колебаний.

Сначала приведём результаты численных расчётов поставленной задачи, когда включение отсутствует, составное полупространство расслаблено одной магистральной межфазной трещиной, занимающей область $\{y = 0; -\infty < z < \infty; x \in (-c, c)\}$, и деформируется при помощи абсолютно-жесткого полосового штампа с плоским основанием, приложенного к свободной поверхности слоя в области $\{y = h; a_1 \leq x \leq b_1; -\infty < z < \infty\}$. Заметим, что определяющая система сингулярных интегральных уравнений этой задачи получена в работе [7]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_j(s) ds}{s - x} + \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 R_{ji}(s - x) \varphi_i(s) ds = f_j(x) \quad (-1 < x < 1; j = 1, 2) \quad (2.7)$$

Эту систему нужно рассматривать при условиях

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx = 1; \quad \int_{-1}^1 \varphi_2(x) dx = 0. \quad (2.8)$$

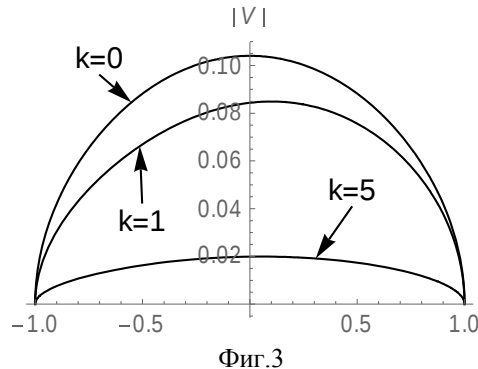
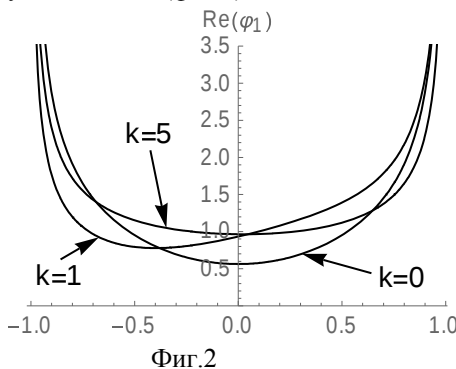
Проведён численный расчёт задачи, когда $T_0 / p_1 \mu_2 = 0.05$; $\mu = 2/3$; $c / h = p_1 / h = 1$, $c_2^{(1)} / c_2^{(2)} = 2$, $q(x) = 0$ и выявлены закономерности изменения амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины, их аргумента δ , действительной части амплитуд контактных напряжений под штампом и раскрытия трещины в зависимости от параметров $k = q_1 / h$ и $\lambda = h\omega / c_2^{(1)}$. Результаты численных расчётов приведены в виде таблиц 1-2 и графиков фиг. 2-3. В табл.1 приведены значения модулей амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины и её аргумента при $\lambda = 0,5$ в зависимости от k . Из них явствует, что при удалении штампа от трещины амплитуды коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в обоих концах трещины уменьшаются, в то время как их аргумент у левого конца трещины по абсолютной величине возрастает, а у правого конца трещины сначала убывает, а затем также возрастает.

На фиг.2 и 3 приведены графики соответственно действительной части безразмерных амплитуд контактных напряжений под штампом и абсолютная величина амплитуды раскрытия трещины в случае, когда $k = 0;1;5$.

Таблица 1

k	0	0.5	1	3	5
$ K_{III}(-c) $	0.10075	0.08812	0.07218	0.03201	0.018018
$ K_{III}(c) $	0.10075	0.10107	0.09174	0.01475	0.00468
$\delta(-c)$	0.17892	0.2396	0.3323	1.0527	2.3043
$\delta(c)$	0.1789	0.1641	0.1897	0.6618	1.7929

На (фиг.2) видно, что при удалении штампа от трещины происходит перераспределение амплитуд контактных напряжений: сначала нарушается их симметрия относительно оси симметрии штампа, а затем постепенно, по мере удаления штампа, симметрия восстанавливается. При этом, амплитуды контактных напряжений в средней части штампа увеличиваются, а у концов уменьшаются, тогда как абсолютная величина амплитуды раскрытия трещины при удалении штампа от трещины уменьшается (фиг.3).



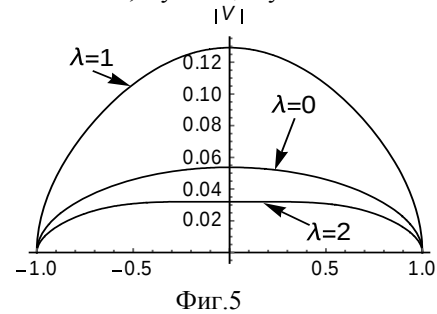
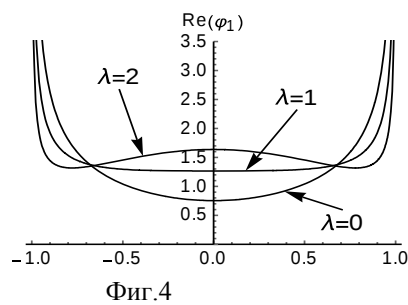
В табл. 2 приведены значения модулей амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины и её аргумента в случае, когда штамп находится прямо над трещиной, т.е. при $k = 0$ в зависимости от λ . Из них явствует, что при увеличении параметра λ модули амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений и их аргументы на обоих концах трещины сначала увеличиваются, а затем уменьшаются.

На фиг.4–5 приведены графики соответственно действительных частей безразмерных амплитуд контактных напряжений под штампом и абсолютные величины амплитуд раскрытия трещины в случае, когда $\lambda = 0;1;2$.

Таблица 2

λ	0	0.5	0.79	1	1.5	2	5
$ K_{III}(\pm c) $	0.05395	0.10075	0.17360	0.111323	0.04747	0.037524	0.00449
$\delta(\pm c)$	0	0.17892	1.2654	2.04936	2.48655	2.78636	0.71198

На графиках (фиг.4) видно, что при увеличении параметра λ , который при постоянных значениях толщины слоя h и скорости распространения сдвиговой волны в слое $C_2^{(1)}$ можно трактовать как увеличение частоты вынужденных колебаний Ω , опять происходит перераспределение амплитуд действительных частей контактных напряжений: они в средней части штампа увеличиваются, а у концов уменьшаются.



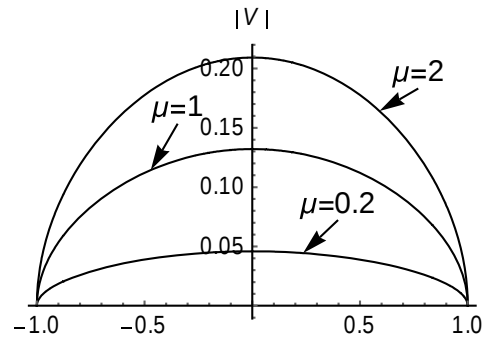
При этом, абсолютные величины амплитуд раскрытия трещины колеблются вокруг состояния равновесия, если таковым считать раскрытие трещины при $\lambda = 0$ (фиг.5).

Исследована также зависимость указанных величин от параметра μ . Результаты вычислений в случае, когда $k = 0$ и $\lambda = 0.5$, приведены в табл. 3 и представлены в виде графиков (фиг. 6).

В табл. 3 приведены значения модулей амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины и её аргумента при различных значениях μ . Из них явствует, что при увеличении параметра μ амплитуды коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений на обоих концах трещины увеличиваются, в то время как их аргумент уменьшается.

Таблица 3

μ	0.25	0.5	1	2	5
$ K_{III}(\pm c) $	0.04002	0.08194	0.17348	0.37747	0.81715
$\delta(\pm c)$	2.1141	2.0779	1.9835	1.7427	1.0093



Фиг.6

На фиг. 6 приведены графики абсолютных величин амплитуд раскрытия трещины в зависимости от параметра μ . Из них видно, что при увеличении параметра μ абсолютные величины амплитуд раскрытия трещины также увеличиваются. Вычисления показывают, что контактные напряжения под штампом мало зависят от параметра μ .

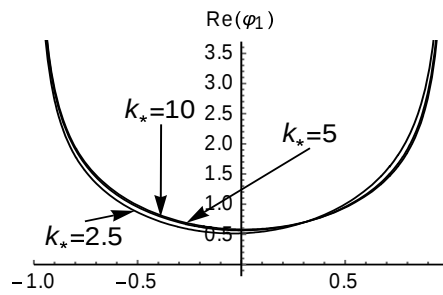
Теперь приведём результаты численных расчётов поставленной задачи, когда включение присутствует. При этом принято $T_0 / p_1 \mu_2 = 0.05$; $\mu = 2/3$; $c / h = p_1 / h = 1$, $c_2^{(1)} / c_2^{(2)} = 2$, $p_2 / h = 1$, $k = 0$ и выявлены закономерности изменения амплитуд контактных напряжений, действующих под штампом, скачка напряжений, действующих на длинные стороны включений, абсолютной величины амплитуд раскрытия трещины и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от относительного расстояния включения от трещины $k_* = q_2 / h$ и приведённой частоты вынужденных колебаний $\lambda = h\omega / c_2^{(1)}$. Результаты численных расчётов приведены в виде таблиц 4-5 и графиков фиг.8-13.

В табл. 3 приведены значения модулей амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины при $\lambda = 0,5$ в зависимости от k_* . Из них видно, что присутствие включений мало влияет на модули амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в обоих концах трещины и при удалении включений стремится к определённому значению, соответствующему случаю, когда включение отсутствует.

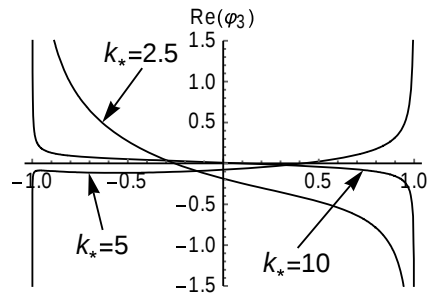
Таблица 4

k_*	2.1	2.5	3.5	5	10	20
$ K_{III}(-c) $	0.10636	0.10650	0.10314	0.09862	0.100643	0.10075
$ K_{III}(c) $	0.10625	0.10748	0.10510	0.09856	0.10049	0.10074

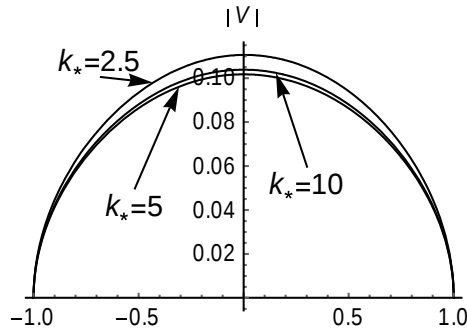
На фиг. 7-9 приведены графики соответственно действительной части безразмерных амплитуд контактных напряжений под штампом, скачка напряжений, действующих на длинные стороны включений и абсолютные величины амплитуд раскрытия трещины при $k = 0$ и $\lambda = 0.5$ в зависимости от k_* .



Фиг.7



Фиг.8



Фиг.9

Из них видно, что при удалении включения от штампа и трещины действительная часть амплитуд контактных напряжений и абсолютная величина амплитуд раскрытия трещины почти не терпят изменений, тогда как действительная часть скачка напряжений, действующих на длинные стороны включений, уменьшается, стремясь к нулю.

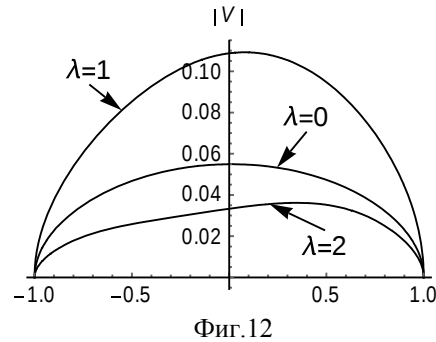
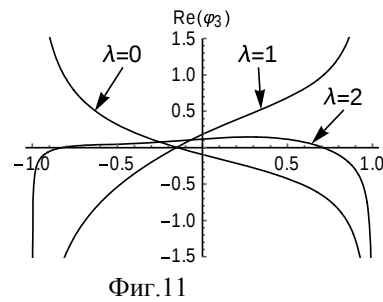
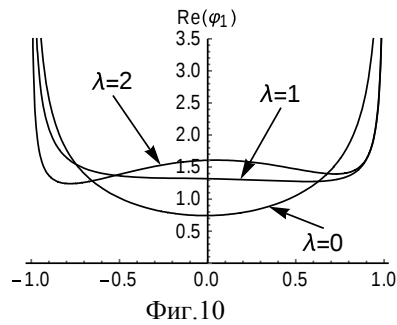
В табл. 5 приведены значения модулей амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины при $k = 0$, $k_* = 3$ в зависимости от изменения приведённой частоты вынужденных колебаний λ .

Таблица 5

λ	0	0.5	0.72	1	2	5
$ K_{III}(-c) $	0.05469	0.10538	0.1668	0.08884	0.02991	0.00474
$ K_{III}(c) $	0.05587	0.10715	0.1791	0.10525	0.04135	0.00401

Полученные результаты показывают, что присутствие включения опять мало влияет на концентрацию напряжений в концевых точках трещины.

А на фиг. 10-12 приведены графики соответственно действительной части безразмерных амплитуд контактных напряжений под штампом, действительной части скачка напряжений, действующих на длинные стороны включений, и абсолютной величины амплитуд раскрытия трещины при $k=0$, $k_*=3$ в случае, когда $\lambda=0;1;2$.



Видно, что закономерность изменения действительных частей контактных напряжений и абсолютной величины амплитуды раскрытия трещины та же самая, что и в случае отсутствия включения, т.е. при увеличении параметра λ опять происходит перераспределение амплитуд действительных частей контактных напряжений: они в средней части штампа увеличиваются, а у концов уменьшаются (фиг.11), тогда как абсолютная величина амплитуды раскрытия трещины при этом колеблется вокруг состояния равновесия (фиг.13). Что же касается действительной части скачка контактных напряжений, действующих на длинные стороны включения, то они при увеличении параметра λ меняют знак (фиг.12).

Заключение

Таким образом, в антиплоской постановке исследованы закономерности взаимовлияния межфазных трещин и абсолютно жёстких включений, находящихся в составном полупространстве, изготовленного при помощи соединения слоя и полупространства из разных материалов, и деформирующегося при помощи абсолютно жёсткого штампа, на который действует гармоническая по времени сосредоточенная нагрузка. При помощи численных расчётов показано, что в случае отсутствия включения, когда штамп находится прямо над трещиной, при выбранных значениях параметров абсолютная величина коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины при увеличении частоты вынужденных колебаний возрастают и принимают максимальное значение при

$\omega = 0.79c_2^{(1)} / h$. При дальнейшем увеличении частоты вынужденных колебаний они уменьшаются, стремясь к нулю. Выяснено, что при уменьшении параметра μ , что можно трактовать как увеличение жёсткости слоя μ_1 при постоянной μ_2 , коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины по абсолютной величине уменьшаются.

В случае, когда вместе с трещиной присутствует также абсолютно жёсткое включение, указанные закономерности сохраняются, однако, значение параметра Ω , при котором абсолютная величина коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений принимают максимальное значение, меняется в зависимости от соотношения сдвиговых жёсткостей слоя и полупространства, а также от местоположения штампа и расстояния включения от трещины. В частности, при выбранных значениях параметров, когда $k = 0$ и $k_* = 3$, абсолютная величина коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений принимают максимальное значение при $\omega = 0.72c_2^{(1)} / h$.

Показано также, что при выбранных значениях параметров, присутствие включения мало влияет как на распределение контактных напряжений, действующих под штампом, так и на абсолютную величину коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18Т-2С290.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В.А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т.207. №2. С.324–327. Babeshko V.A. On a problem of dynamic destruction of layered bodies with cracks // Proc. Of Academy of Sciences. USSR. 1989. Vol. 207, №2, pp.324–327. (in Russian)
2. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С.5–9. Babeshko V.A. Mediums with heterogeneities (combination of inclusions with heterogeneities) // Proc. RAS. Mechanics of Solids. 2000. №3. Pp.5-9. (in Russian)
3. Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Докл. РАН. 2002. Т.382. №5. С.625–628. Babeshko V.A., Pavlova A.V., Ratner S.V., Williams R.T. On a solution of problem on vibration of elastic body, containing the system of inner cavities// Proc. Proc. of Academy of Sciences. 2002. Vol.382. №5. Pp. 625-628. (in Russian)
4. Прякина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т.68. Вып.3. С.500–507. Pryakhina O.D., Smirnova A.V. The effective method for solution of dynamic problems for layered mediums with discontinuous boundary conditions. // journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2004.Vol.68. Iss.3, pp.500-507. (in Russian)
5. Hakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading. // Proceedings of the Twelfth

- International Conference on Composites or Nano Engineering, ICCE-12 August 1-6, 2005, Spain.
6. Акопян В.Н., Саргсян А.О. Об одной динамической смешанной задаче для составного пространства с трещиной при антиплоской деформации. //В сб. статей «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести», посв. 75-летию академика М.А. Задояна, Ереван, «Гитутюн» 2006, с.50-56. On one dynamic mixed boundary value problem for compound space with crack under antiplane deformation // In coll. «Selected problems of the elasticity theory, plasticity and creep», dedicated to 75-anniversary of acad. M.A.Zadoyan. (in Russian)
 7. Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Антиплоская динамическая контактная задача для составного полупространства с межфазной трещиной. // В сб. трудов 9-ой междунар. Конференции: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», октябрь 1-6, 2018, Горис, с. 44-48. Amirjanyan H.A., Hakobyan L.V. Antiplane dynamic contact problem for compound semi-space with interphase crack. // Proc. of IX international conference «The problems of interaction of deformable media», October 1-6, 2018, Goris, pp.44-48. (in Russian)
 8. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа.- Н: Мир, 1962. 279ст. Noble B. Wiener-Hopf method// Mir, 1962, 279p. (in Russian)
 9. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. // Известия НАН Армении, Механика. 2000. Т.53. №3. С.12-19. Sahakyan A.V. Application of the method of discrete singularities for solving the singular integral equations with unmoved singularities. // Proc. NAS RA. Mechanics. 2000. Vol.53. №3. Pp. 12-19. (in Russian)
 10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 738с. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series.// Moscow. Nauka. 1981. 738p. (in Russian)
 11. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций.- М.: Наука, 1977.- 287с. Brychkov A., Prudnikov A.P. Integral transformations of generalized functions. // М.: Nauka, 1977. 287 p. (in Russian)
 12. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения.- М.: Наука, 1974.- 416с. Parton V.Z., Morozov Ye. M. Elastic-plastic mechanics fracture. // М.: Nauka, 1974. 416 p. (in Russian)

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович - доктор физ.-мат. наук., проф., директор Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: amirjanyan@gmail.com

Акопян Лусине Ваграмовна – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90

Поступила в редакцию 21.03.2019