ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №3, 2013 Механика

УДК 539.3

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН В ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Закарян Т.В.

Ключевые слова: пластинка, собственные колебания, частота, вязкость, асимтотический метод.
Key words: plate, natural oscillations, frequency, viscosity, asymptotic method.

Զաքարյան Տ.Վ.
Օրթոտրոպ սալերի սեփական տատանումները առաձգականության տեսության առաջին եզրային խնդրի դեպքում, երբ առկա է մածուցիկ դիմադրություն

Ռիսումնասիրված են օրթոտրոպ սալերի սեփական տատանումները, երբ առկա է ներքին մածուցիկ դիմադրություն, որը համեմատական է միջավայրի կետերի արագությանը: Լուծված է առաձգականության տեսության առաջին դինամիկական տարածական եզրային խնդիրը: Ասիմպտոտիկ մեթոդով արտածված են հաճախությունների որոշման հավասարումները: Ապացուցված է, որ հնարավոր են սալի երկայնական և երկու տիպի սահքային սեփական տատանումներ:

Zakaryan T.V.
About the natural oscillations of orthotropic plate in the value problem of elasticity theory with viscous resistance

Natural spatial vibrations of orthotropic plates are considered, taking into account the internal viscous resistance, which is proportional to velocity of points of medium. First dynamic homogeneous boundary value problem of the elasticity theory is solved. The equations for frequencies are obtained by the asymptotic method. It's shown that longitudinal and two types of shear natural vibrations are possible.

Рассмотрены собственные пространственные колебания ортотропных пластин при наличии внутреннего вязкого сопротивления, которое пропорционально скорости точек среды. Решена соответствующая первая динамическая однородная краевая задача теории упругости. Асимптотическим методом выведены уравнения частот. Показано, что возможны продольные и два типа сдвиговых собственных колебаний.

Введение. Учитывая геометрическую специфику тонких тел типа балок, пластин и оболочек, для определения их напряжённо-деформированных состояний широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений [1-3]. Метод оказался эффективным как для решения статических, так и динамических задач балок, пластин и оболочек на основе уравнений теории упругости. Помимо классических краевых задач тонких тел (на лицевых поверхностях заданы условия первой краевой задачи) рассмотрены также неклассические краевые задачи в смысле классической теории пластин и оболочек– на лицевых поверхностях заданы условия второй и смешанной краевых задач теории упругости. Для последнего класса задач была найдена принципиально новая асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения [2,4]. Эта асимптотика оказалась справедливой и в статических, и в динамических задачах [5,6]. Она применима также для слоистых пластин и оболочек [7,8]. Первая динамическая пространственная краевая задача для ортотропной прямоугольной пластинки решена в [9], а с учётом вязкого сопротивления – в [10]. Настоящая работа посвящена исследованию собственных колебаний ортотропных пластин с учётом вязкого сопротивления.

1. Постановка задачи, основные уравнения и соотношения. Ставится цель найти значения частот собственных колебаний ортотропной пластины $D=\{(x,y,z):\ 0\le x\le a,\quad 0\le y\le b,\quad |z|\le h,\ h<<l,\ l=\min(a,b)\}$, когда имеется внутреннее вязкое сопротивление (трение), пропорциональное скорости точек среды. Для этого необходимо найти решение динамических уравнений пространственной задачи теории упругости:

уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}-k\frac{\partial u}{\partial t}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}-k\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}=\rho\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}-k\frac{\partial w}{\partial t}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{13}\sigma_{zz},\qquad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}=a_{12}\sigma_{xx}+a_{22}\sigma_{yy}+a_{23}\sigma_{zz},$$
$$\frac{\partial w}{\partial z}=a_{13}\sigma_{xx}+a_{23}\sigma_{yy}+a_{33}\sigma_{zz},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}=a_{66}\sigma_{xy}, \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=a_{55}\sigma_{xz},\qquad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}=a_{44}\sigma_{yz},$$

где k – коэффициент сопротивления, ρ – плотность при следующих граничных условиях на лицевых поверхностях $z=\pm h$ пластинки:

$$\sigma_{\alpha z}(x,y,\pm h,t)=0,\qquad \alpha=x,y,z \tag{1.3}$$

и условиях на боковой поверхности, которые пока не будем конкретизировать.

2. Общий интеграл внутренней задачи. Решение сформулированной задачи будем искать в виде:

$$\sigma_{\alpha\beta}(x,y,z,t)=\sigma_{jkI}(x,y,z)\sin\omega t+\sigma_{jkII}(x,y,z)\cos\omega t,\quad \alpha,\beta=x,y,z,\quad j,k=1,2,3$$

$$u(x,y,z,t)=u_{xI}(x,y,z)\sin\omega t+u_{xII}(x,y,z)\cos\omega t,$$
$$\mathrm{v}(x,y,z,t)=u_{yI}(x,y,z)\sin\omega t+u_{yII}(x,y,z)\cos\omega t, \tag{2.1}$$
$$w(x,y,z,t)=u_{zI}(x,y,z)\sin\omega t+u_{zII}(x,y,z)\cos\omega t,$$

здесь ω – неизвестная пока частота собственных колебаний.

Перейдём к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям:

$$\xi=x/l,\quad \eta=y/l,\quad \zeta=z/h,\quad U_I=u_{xI}/l,\quad U_{II}=u_{xII}/l,$$
$$V_I=u_{yI}/l,\quad V_{II}=u_{yII}/l,\quad W_I=u_{zI}/l,\quad W_{II}=u_{zII}/l \tag{2.2}$$

В результате получим сингулярно-возмущённую малым параметром $\varepsilon=h/l$ систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11I}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12I}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13I}}{\partial\zeta}+kl^2\omega U_{II}=-\rho\omega^2l^2U_I,$$
$$\frac{\partial\sigma_{11II}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12II}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13II}}{\partial\zeta}-kl^2\omega U_I=-\rho\omega^2l^2U_{II},$$
$$\frac{\partial\sigma_{12I}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22I}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{23I}}{\partial\zeta}+kl^2\omega V_{II}=-\rho\omega^2l^2V_I,$$
$$\frac{\partial\sigma_{12II}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22II}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{23II}}{\partial\zeta}-kl^2\omega V_I=-\rho\omega^2l^2V_{II},$$
$$\frac{\partial\sigma_{13I}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23I}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{33I}}{\partial\zeta}+kl^2\omega W_{II}=-\rho\omega^2l^2W_I,$$
$$\frac{\partial\sigma_{13II}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23II}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{33II}}{\partial\zeta}-kl^2\omega W_I=-\rho\omega^2l^2W_{II}, \qquad (2.3)$$
$$\frac{\partial U_I}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11I}+a_{12}\sigma_{22I}+a_{13}\sigma_{33I},\quad \frac{\partial U_{II}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11II}+a_{12}\sigma_{22II}+a_{13}\sigma_{33II},$$
$$\frac{\partial V_I}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11I}+a_{22}\sigma_{22I}+a_{23}\sigma_{33I},\quad \frac{\partial V_{II}}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11II}+a_{22}\sigma_{22II}+a_{23}\sigma_{33II},$$
$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial W_I}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11I}+a_{23}\sigma_{22I}+a_{33}\sigma_{33I},\quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial W_{II}}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11II}+a_{23}\sigma_{22II}+a_{33}\sigma_{33II},$$
$$\frac{\partial V_I}{\partial\xi}+\frac{\partial U_I}{\partial\eta}=a_{66}\sigma_{12I},\quad \frac{\partial V_{II}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_{II}}{\partial\eta}=a_{66}\sigma_{12II},\quad \frac{\partial W_I}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U_I}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13I},$$
$$\frac{\partial W_{II}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U_{II}}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13II},\quad \frac{\partial W_I}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V_I}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23I},\quad \frac{\partial W_{II}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V_{II}}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23II},$$

Введя обозначения

$$\omega_*=h\omega\sqrt{\rho},\qquad 2K=\frac{kh}{\sqrt{\rho}}, \qquad (2.4)$$

решение системы (2.3) будем искать в виде

$$\sigma_{jkr}^{\text{int}}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{jkr}^{(s)},\qquad j,k=1,2,3,$$
$$(U_r^{\text{int}},V_r^{\text{int}},W_r^{\text{int}})=\varepsilon^s(U_r^{(s)},V_r^{(s)},W_r^{(s)}),\qquad r=I,II \qquad (2.5)$$
$$\omega_*=\varepsilon^s\omega_{*s},\qquad s=\overline{0,N}$$

Подставив (2.5) в (2.3), применив правило Коши умножения рядов, для определения неизвестных коэффициентов $\sigma_{jkr}^{(s)},U_r^{(s)},V_r^{(s)},W_r^{(s)}$ получим систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11I}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{13I}^{(s)}}{\partial\zeta}+c_nU_I^{(s-n)}+2K\omega_{*m}U_{II}^{(s-m)}=0,\quad n=\overline{0,s},\quad m=\overline{0,s}$$

$$\frac{\partial\sigma_{11II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12II}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{13II}^{(s)}}{\partial\zeta}+c_nU_{II}^{(s-n)}-2K\omega_{*m}U_I^{(s-m)}=0,\quad c_n=\sum_{m=0}^{n}\omega_{*n-m}\omega_{*m}$$

$$\frac{\partial\sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22I}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{23I}^{(s)}}{\partial\zeta}+c_nV_I^{(s-n)}+2K\omega_{*m}V_{II}^{(s-m)}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{12II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22II}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{23II}^{(s)}}{\partial\zeta}+c_nV_{II}^{(s-n)}-2K\omega_{*m}V_I^{(s-m)}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{13I}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23I}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{33I}^{(s)}}{\partial\zeta}+c_nW_I^{(s-n)}+2K\omega_{*m}W_{II}^{(s-m)}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{13II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23II}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{33II}^{(s)}}{\partial\zeta}+c_nW_{II}^{(s-n)}-2K\omega_{*m}W_I^{(s-m)}=0,\qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11I}^{(s)}+a_{12}\sigma_{22I}^{(s)}+a_{13}\sigma_{33I}^{(s)},\quad \frac{\partial U_{II}^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11II}^{(s)}+a_{12}\sigma_{22II}^{(s)}+a_{13}\sigma_{33II}^{(s)},$$

$$\frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11I}^{(s)}+a_{22}\sigma_{22I}^{(s)}+a_{23}\sigma_{33I}^{(s)},\quad \frac{\partial V_{II}^{(s-1)}}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11II}^{(s)}+a_{22}\sigma_{22II}^{(s)}+a_{23}\sigma_{33II}^{(s)},$$

$$\frac{\partial W_I^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11I}^{(s)}+a_{23}\sigma_{22I}^{(s)}+a_{33}\sigma_{33I}^{(s)},\quad \frac{\partial W_{II}^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11II}^{(s)}+a_{23}\sigma_{22II}^{(s)}+a_{33}\sigma_{33II}^{(s)},$$

$$\frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial\eta}=a_{66}\sigma_{12I}^{(s)},\quad \frac{\partial V_{II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_{II}^{(s-1)}}{\partial\eta}=a_{66}\sigma_{12II}^{(s)},\quad \frac{\partial W_I^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_I^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13I}^{(s)},$$

$$\frac{\partial W_{II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_{II}^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13II}^{(s)},\quad \frac{\partial W_I^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V_I^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23I}^{(s)},\quad \frac{\partial W_{II}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V_{II}^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23II}^{(s)},$$

Из системы (2.6) все компоненты тензора напряжений можно выразить через компоненты вектора перемещения по формулам

$$\sigma_{13r}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left(\frac{\partial U_r^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W_r^{(s-1)}}{\partial\xi}\right),\quad \sigma_{23r}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left(\frac{\partial V_r^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W_r^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),\quad r=I,II$$

$$\sigma_{12r}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial U_r^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V_r^{(s-1)}}{\partial\xi}\right),$$

$$\sigma_{11r}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left(-A_{23}\frac{\partial W_r^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{22}\frac{\partial U_r^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{12}\frac{\partial V_r^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{22r}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left(-A_{13}\frac{\partial W_r^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{12}\frac{\partial U_r^{(s-1)}}{\partial\xi}+A_{33}\frac{\partial V_r^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),\qquad(2.7)$$

$$\sigma_{33r}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left(A_{11}\frac{\partial W_r^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{23}\frac{\partial U_r^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{13}\frac{\partial V_r^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

где

$$A_{11}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2,\quad A_{12}=a_{12}a_{33}-a_{23}a_{13},\quad A_{13}=a_{11}a_{23}-a_{13}a_{12},\quad A_{22}=a_{22}a_{33}-a_{23}^2,$$

$$A_{23}=a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23},\quad A_{33}=a_{11}a_{33}-a_{13}^2,\quad \Delta=a_{11}A_{22}-a_{12}A_{12}-a_{13}A_{23},\qquad(2.8)$$

Подставив значения $\sigma_{13r}^{(s)}$ из (2.7) в первые два уравнения (2.6), для определения $U_I^{(s)},U_{II}^{(s)}$ получим систему:

$$\frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\left[c_nU_I^{(s-n)}+2K\omega_{*m}U_{II}^{(s-m)}\right]=f_{1u}^{(s)},$$

$$\frac{\partial^2 U_{II}^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\left[c_nU_{II}^{(s-n)}-2K\omega_{*m}U_{I}^{(s-m)}\right]=f_{2u}^{(s)},\qquad(2.9)$$

$$f_{1u}^{(s)}=-a_{55}\left[\frac{\partial\sigma_{11I}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]-\frac{\partial^2 W_I^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta},\qquad(1,2;I,II)$$

Если подставить значения $\sigma_{23r}^{(s)}$ из (2.7) в соответствующие уравнения (2.6), для определения $V_I^{(s)},V_{II}^{(s)}$ получим систему:

$$\frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{44}\left[c_nV_I^{(s-n)}+2K\omega_{*m}V_{II}^{(s-m)}\right]=f_{1\mathbf{v}}^{(s)},$$

$$\frac{\partial^2 V_{II}^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{44}\left[c_nV_{II}^{(s-n)}-2K\omega_{*m}V_{I}^{(s-m)}\right]=f_{2\mathbf{v}}^{(s)},\qquad(2.10)$$

$$f_{1\mathbf{v}}^{(s)}=-a_{44}\left[\frac{\partial\sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22I}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]-\frac{\partial^2 W_I^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta},\qquad(1,2;I,II)$$

Подставив значения $\sigma_{33r}^{(s)}$ из (2.7) в соответствующие уравнения (2.6), для определения $W_I^{(s)},W_{II}^{(s)}$ получим систему:

$$\frac{\partial^2 W_I^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\Delta}{A_{11}}\left[c_n W_I^{(s-n)}+2K\omega_{*m}W_{II}^{(s-m)}\right]=f_{1w}^{(s)},$$

$$\frac{\partial^2 W_{II}^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\Delta}{A_{11}}\left[c_n W_{II}^{(s-n)}-2K\omega_{*m}W_I^{(s-m)}\right]=f_{2w}^{(s)}, \tag{2.11}$$

$$f_{1w}^{(s)}=-\frac{\Delta}{A_{11}}\left[\frac{\partial\sigma_{13I}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23I}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]+\frac{A_{23}}{A_{11}}\frac{\partial^2 U_I^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}+\frac{A_{13}}{A_{11}}\frac{\partial^2 V_I^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta},\ (1,2;I,II)$$

Определив из систем (2.9), (2.10), (2.11) функции $U_I^{(s)}, V_I^{(s)}, W_I^{(s)}$, (I,II), по формулам (2.7) определим напряжения, что позволит удовлетворить граничным условиям (1.3).

Рассмотрим приближение $s=0$. Считая, что $K\neq 0$, из системы (2.9) можно $U_{II}^{(0)}$ выразить через $U_I^{(0)}$:

$$U_{II}^{(0)}=-\frac{1}{2K\omega_{*0}a_{55}}\left(\frac{\partial^2 U_I^{(0)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\omega_{*0}^2 U_I^{(0)}\right), \tag{2.12}$$

а для определения $U_I^{(0)}$ получим уравнение

$$\frac{\partial^4 U_I^{(0)}}{\partial\zeta^4}+2a_{55}\omega_{*0}^2\frac{\partial^2 U_I^{(0)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}^2(\omega_{*0}^2+4K^2)\omega_{*0}^2 U_I^{(0)}=0. \tag{2.13}$$

Решением уравнения (2.13) является

$$U_I^{(0)}=C_1^{(0)}(\xi,\eta)\Phi_1+C_2^{(0)}(\xi,\eta)\Phi_2+C_3^{(0)}(\xi,\eta)\Phi_3+C_4^{(0)}(\xi,\eta)\Phi_4, \tag{2.14}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1&=\mathrm{ch}\gamma_u\zeta\cos\delta_u\zeta, &\Phi_2&=\mathrm{sh}\gamma_u\zeta\sin\delta_u\zeta,\\ \Phi_3&=\mathrm{ch}\gamma_u\zeta\sin\delta_u\zeta, &\Phi_4&=\mathrm{sh}\gamma_u\zeta\cos\delta_u\zeta,\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\gamma_u=\sqrt{\frac{a_{55}\omega_{*0}}{2}}\sqrt{\sqrt{\omega_{*0}^2+4K^2}-\omega_{*0}},$$

$$\delta_u=\sqrt{\frac{a_{55}\omega_{*0}}{2}}\sqrt{\sqrt{\omega_{*0}^2+4K^2}+\omega_{*0}}$$

Учитывая, что

$$\Phi_1'=\gamma_u\Phi_4-\delta_u\Phi_3,\ \ \Phi_2'=\gamma_u\Phi_3+\delta_u\Phi_4,\ \ \Phi_3'=\gamma_u\Phi_2+\delta_u\Phi_1,\ \ \Phi_4'=\gamma_u\Phi_1-\delta_u\Phi_2,$$

$$\Phi_1''=\left(\gamma_u^2-\delta_u^2\right)\Phi_1-2\gamma_u\delta_u\Phi_2,\ \ \Phi_2''=\left(\gamma_u^2-\delta_u^2\right)\Phi_2+2\gamma_u\delta_u\Phi_1,$$

$$\Phi_3''=\left(\gamma_u^2-\delta_u^2\right)\Phi_3+2\gamma_u\delta_u\Phi_4,\ \ \Phi_4''=\left(\gamma_u^2-\delta_u^2\right)\Phi_4-2\gamma_u\delta_u\Phi_3, \tag{2.16}$$

$$\Phi_1'''=\gamma_u\left(\gamma_u^2-3\delta_u^2\right)\Phi_4-\delta\left(3\gamma_u^2-\delta_u^2\right)\Phi_3,\ \ \Phi_2'''=\gamma_u\left(\gamma_u^2-3\delta_u^2\right)\Phi_3+\delta\left(3\gamma_u^2-\delta_u^2\right)\Phi_4,$$

$$\Phi_3'''=\gamma_u\left(\gamma_u^2-3\delta_u^2\right)\Phi_2+\delta\left(3\gamma_u^2-\delta_u^2\right)\Phi_1,\ \ \Phi_4'''=\gamma_u\left(\gamma_u^2-3\delta_u^2\right)\Phi_1-\delta\left(3\gamma_u^2-\delta_u^2\right)\Phi_2,$$

используя формулы (2.7), (2.12), (2.14)-(2.16), будем иметь:

$$U_{II}^{(0)} = \Phi_2 C_1^{(0)} - \Phi_1 C_2^{(0)} - \Phi_4 C_3^{(0)} + \Phi_3 C_4^{(0)},$$

$$\sigma_{13I}^{(0)} = \frac{1}{a_{55}}\Big[\left(\gamma_u \Phi_4 - \delta_u \Phi_3\right)C_1^{(0)} + \left(\gamma_u \Phi_3 + \delta_u \Phi_4\right)C_2^{(0)} +$$

$$+\left(\gamma_u \Phi_2 + \delta_u \Phi_1\right)C_3^{(0)} + \left(\gamma_u \Phi_1 - \delta_u \Phi_2\right)C_4^{(0)}\Big], \qquad (2.17)$$

$$\sigma_{13II}^{(0)} = \frac{1}{a_{55}}\Big[\left(\gamma_u \Phi_3 + \delta_u \Phi_4\right)C_1^{(0)} - \left(\gamma_u \Phi_4 - \delta_u \Phi_3\right)C_2^{(0)} -$$

$$-\left(\gamma_u \Phi_1 - \delta_u \Phi_2\right)C_3^{(0)} + \left(\gamma_u \Phi_2 + \delta_u \Phi_1\right)C_4^{(0)}\Big],$$

Из системы (2.10) $V_{II}^{(0)}$ выражается через $V_I^{(0)}$

$$V_{II}^{(0)} = -\frac{1}{2K\omega_{*0} a_{44}}\left(\frac{\partial^2 V_I^{(0)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}\omega_{*0}^2 V_I^{(0)}\right), \qquad (2.18)$$

а для определения $V_I^{(0)}$ получим уравнение

$$\frac{\partial^4 V_I^{(0)}}{\partial \zeta^4} + 2a_{44}\omega_{*0}^2 \frac{\partial^2 V_I^{(0)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^2(\omega_{*0}^2 + 4K^2)\omega_{*0}^2 V_I^{(0)} = 0. \qquad (2.19)$$

Решением уравнения (2.19) является

$$V_I^{(0)} = D_1^{(0)}(\xi,\eta)\Phi_1 + D_2^{(0)}(\xi,\eta)\Phi_2 + D_3^{(0)}(\xi,\eta)\Phi_3 + D_4^{(0)}(\xi,\eta)\Phi_4, \qquad (2.20)$$

где Φ_i определяются по формулам (2.15), если вместо γ_u, δ_u взять γ_v, δ_v

$$\gamma_v = \sqrt{\frac{a_{44}\omega_{*0}}{2}}\sqrt{\sqrt{\omega_{*0}^2 + 4K^2} - \omega_{*0}}$$

$$\delta_v = \sqrt{\frac{a_{44}\omega_{*0}}{2}}\sqrt{\sqrt{\omega_{*0}^2 + 4K^2} + \omega_{*0}} \qquad (2.21)$$

Согласно (2.7), (2.18), (2.20), имеем:

$$V_{II}^{(0)} = \Phi_2 D_1^{(0)} - \Phi_1 D_2^{(0)} - \Phi_4 D_3^{(0)} + \Phi_3 D_4^{(0)},$$

$$\sigma_{23I}^{(0)} = \frac{1}{a_{44}}\Big[\left(\gamma_v \Phi_4 - \delta_v \Phi_3\right)D_1^{(0)} + \left(\gamma_v \Phi_3 + \delta_v \Phi_4\right)D_2^{(0)} +$$

$$+\left(\gamma_v \Phi_2 + \delta_v \Phi_1\right)D_3^{(0)} + \left(\gamma_v \Phi_1 - \delta_v \Phi_2\right)D_4^{(0)}\Big], \qquad (2.22)$$

$$\sigma_{23II}^{(0)} = \frac{1}{a_{44}}\Big[\left(\gamma_v \Phi_3 + \delta_v \Phi_4\right)D_1^{(0)} - \left(\gamma_v \Phi_4 - \delta_v \Phi_3\right)D_2^{(0)} -$$

$$-\left(\gamma_v \Phi_1 - \delta_v \Phi_2\right)D_3^{(0)} + \left(\gamma_v \Phi_2 + \delta_v \Phi_1\right)D_4^{(0)}\Big].$$

Из системы (2.11) $W_{II}^{(0)}$ выражается через $W_I^{(0)}$

$$W_{II}^{(0)} = -\frac{1}{2K\omega_{*0}\Delta}\left(A_{11}\frac{\partial^2 W_I^{(0)}}{\partial \zeta^2} + \Delta\omega_{*0}^2 W_I^{(0)}\right), \qquad (2.23)$$

а для определения $W_I^{(0)}$ получим уравнение

$$\frac{\partial^4 W_I^{(0)}}{\partial \zeta^4} + \frac{2\omega_{*0}^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 W_I^{(0)}}{\partial \zeta^2} + \frac{(\omega_{*0}^2 + 4K^2)\omega_{*0}^2}{A_{11}^2} W_I^{(0)} = 0. \tag{2.24}$$

Решением уравнения (2.24) является

$$W_I^{(0)} = F_1^{(0)}(\xi,\eta)\Phi_1 + F_2^{(0)}(\xi,\eta)\Phi_2 + F_3^{(0)}(\xi,\eta)\Phi_3 + F_4^{(0)}(\xi,\eta)\Phi_4, \tag{2.25}$$

где Φ_i определяются по формулам (2.15), если γ_u, δ_u заменить на γ_w, δ_w

$$\gamma_w = \sqrt{\frac{\Delta\omega_{*0}}{2A_{11}}} \sqrt{\sqrt{\omega_{*0}^2 + 4K^2} - \omega_{*0}}$$

$$\delta_w = \sqrt{\frac{\Delta\omega_{*0}}{2A_{11}}} \sqrt{\sqrt{\omega_{*0}^2 + 4K^2} + \omega_{*0}} \tag{2.26}$$

Повторив аналогичные действия, получим

$$W_{II}^{(0)} = \Phi_2 F_1^{(0)} - \Phi_1 F_2^{(0)} - \Phi_4 F_3^{(0)} + \Phi_3 F_4^{(0)},$$

$$\sigma_{33I}^{(0)} = \frac{A_{11}}{\Delta}\Big[\left(\gamma_w\Phi_4 - \delta_w\Phi_3\right)F_1^{(0)} + \left(\gamma_w\Phi_3 + \delta_w\Phi_4\right)F_2^{(0)} +$$
$$+ \left(\gamma_w\Phi_2 + \delta_w\Phi_1\right)F_3^{(0)} + \left(\gamma_w\Phi_1 - \delta_w\Phi_2\right)F_4^{(0)}\Big], \tag{2.27}$$

$$\sigma_{33II}^{(0)} = \frac{A_{11}}{\Delta}\Big[\left(\gamma_w\Phi_3 + \delta_w\Phi_4\right)F_1^{(0)} - \left(\gamma_w\Phi_4 - \delta_w\Phi_3\right)F_2^{(0)} -$$
$$- \left(\gamma_w\Phi_1 - \delta_w\Phi_2\right)F_3^{(0)} + \left(\gamma_w\Phi_2 + \delta_w\Phi_1\right)F_4^{(0)}\Big],$$

Граничные условия (1.3) при $s = 0$ примут вид:

$$\sigma_{13}^{(0)}\left(\xi,\eta,\pm 1\right) = 0, \qquad \sigma_{23}^{(0)}\left(\xi,\eta,\pm 1\right) = 0, \qquad \sigma_{33}^{(0)}\left(\xi,\eta,\pm 1\right) = 0, \tag{2.28}$$

Используя формулы (2.17), удовлетворив условиям (2.28) относительно $\sigma_{13}^{(0)}$, получим систему:

$$\begin{aligned} &b_1C_1^{(0)} + b_2C_2^{(0)} + b_3C_3^{(0)} + b_4C_4^{(0)} = 0, \\ &-b_1C_1^{(0)} - b_2C_2^{(0)} + b_3C_3^{(0)} + b_4C_4^{(0)} = 0, \\ &b_2C_1^{(0)} - b_1C_2^{(0)} - b_4C_3^{(0)} + b_3C_4^{(0)} = 0, \\ &-b_2C_1^{(0)} + b_1C_2^{(0)} - b_4C_3^{(0)} + b_3C_4^{(0)} = 0, \end{aligned} \tag{2.29}$$

где

$$b_1 = \gamma_u\bar{\Phi}_4 - \delta_u\bar{\Phi}_3,\ b_2 = \gamma_u\bar{\Phi}_3 + \delta_u\bar{\Phi}_4,\ b_3 = \gamma_u\bar{\Phi}_2 + \delta_u\bar{\Phi}_1,\ b_4 = \gamma_u\bar{\Phi}_1 - \delta_u\bar{\Phi}_2,$$
$$\bar{\Phi}_i = \Phi_i(\zeta = 1)$$

Система (2.29) равнозначна следующим двум системам:

$$b_1C_1^{(0)} + b_2C_2^{(0)} = 0, \qquad b_2C_1^{(0)} - b_1C_2^{(0)} = 0, \tag{2.30}$$

$$b_3C_3^{(0)} + b_4C_4^{(0)} = 0, \qquad b_4C_3^{(0)} - b_3C_4^{(0)} = 0, \tag{2.31}$$

Из условия существования ненулевого решения системы (2.30) следует

$$\mathrm{ch}2\gamma_u - \cos 2\delta_u = 0, \quad (2.32)$$

откуда определяется ω_{*0}^{I}. Из системы (2.30) $C_2^{(0)}$ можно выразить через $C_1^{(0)}$, одновременно следует $C_3^{(0)} = C_4^{(0)} = 0$. Следовательно, будем иметь:

$$U_I^{(0)} = C_1^{(0)}\left(\Phi_1 + \frac{b_2}{b_1}\Phi_2\right), \quad (2.33)$$

которому соответствуют симметричные собственные сдвиговые колебания с частотами ω_{*0}^{I}.

Из системы (2.31) вытекает уравнение

$$\cos 2\delta_u + \mathrm{ch}2\gamma_u = 0, \quad (2.34)$$

откуда определяется ω_{*0}^{II}. Для этого случая $C_1^{(0)} = C_2^{(0)} = 0$, поскольку корни уравнений (2.32), (2.34) разные и имеем решение

$$U_I^{(0)} = C_3^{(0)}\left(\Phi_3 + \frac{b_4}{b_3}\Phi_4\right), \quad (2.35)$$

которому соответствуют несиметричные (изгибные) сдвиговые собственные колебания с частотами ω_{*0}^{II}.

Аналогичным образом из формул (2.33), (2.35) формальной заменой a_{55} на a_{44} выписываются решения, соответствующие граничным условиям $\sigma_{23}^{(0)}(\xi, \eta, \pm 1) = 0$.

Удовлетворим условиям (2.28) относительно $\sigma_{33}^{(0)}$. Получим системы алгебраических уравнений

$$b_1 F_1^{(0)} + b_2 F_2^{(0)} = 0, \qquad b_2 F_1^{(0)} - b_1 F_2^{(0)} = 0, \quad (2.36)$$

$$b_3 F_3^{(0)} + b_4 F_4^{(0)} = 0, \qquad b_4 F_3^{(0)} - b_3 F_4^{(0)} = 0. \quad (2.37)$$

Из системы (2.36) следует следующее уравнение частот:

$$\mathrm{ch}2\gamma_w - \cos 2\delta_w = 0, \quad (2.38)$$

и решение

$$W_I^{(0)} = F_1^{(0)}\left(\Phi_1 + \frac{b_2}{b_1}\Phi_2\right) \quad (2.39)$$

Из системы (2.37) следует

$$\cos 2\delta_w + \mathrm{ch}2\gamma_w = 0 \quad (2.40)$$

и решение

$$W_I^{(0)} = F_3^{(0)}\left(\Phi_3 + \frac{b_4}{b_3}\Phi_4\right), \quad (2.41)$$

которым соответствуют продольные симметричные и несимметричные колебания с частотами ω_{*0}^{V}, ω_{*0}^{VI}.

Найдём корни уравнений (2.32), (2.34). Уравнение (2.32) представим в виде

$$\cos i2\gamma_u - \cos 2\delta_u = 0, \quad (2.42)$$

откуда следуют два независимых уравнения а) $\sin(\delta_u + i\gamma_u) = 0,$ б) $\sin(-\delta_u + i\gamma_u) = 0,$ (2.43)

которым соответствуют решения

$$\begin{aligned} &а)\ \ \omega_{*0} = -ik \pm \sqrt{(\pi n)^2 / a_{55} - k^2},\ \ n \in N, \\ &б)\ \ \omega_{*0} = ik \pm \sqrt{(\pi n)^2 / a_{55} - k^2},\ \ n \in N. \end{aligned} \qquad (2.44)$$

Анологичным образом представив левую часть уравнения (2.34) в виде $\cos 2\delta_u + \cos i2\gamma_u$, соответствующее уравнение будет иметь корни:

$$\begin{aligned} &а)\ \ \omega_{*0} = -ik \pm \sqrt{(\pi(2n+1))^2 / 4a_{55} - k^2},\ \ n \in N, \\ &б)\ \ \omega_{*0} = ik \pm \sqrt{(\pi(2n+1))^2 / 4a_{55} - k^2},\ \ n \in N. \end{aligned} \qquad (2.45)$$

Для остальных случаев необходимо в формулах (2.44), (2.45) вместо a_{55} подставить a_{44} и Δ / A_{11}.

При $s \geq 1$ необходимо рассматривать системы неоднородных уравнений (2.9)-(2.11). Можно показать [11], что $\omega_{*1} = 0$, а $\omega_{*2} \neq 0$, т.е. вклад последующих приближений будет порядка $O\left(\varepsilon^2\right)$, что в практических приложениях вряд ли представит особый интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997. 414с.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с.
4. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела.// Межвуз. сб.: Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып.2. С.7-12.
5. Агаловян Л.А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Междунар. научн. журнал Прикл. Механика. 2002. Т.38. №7. С.3-24.
6. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. Неклассические краевые задачи о собственных и вынужденных колебаниях анизотропных пластин. / В сб.: «Механика оболочек и пластин» (Тр. XIX Международной конф. по теории оболочек и пластин). Изд-во. Нижегородского университета. Нижний Новгород. 1999. С.16-20.
7. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. О характере вынужденных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанной краевой задаче. //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №4. С.186-192.
8. Агаловян Л.А., Погосян А.М. Вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки при кулоновом трении между слоями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №3. С.36-47.
9. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки.// Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. №4. С.304-309.

10. Закарян Т.В. К решению первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления. // Докл. НАН Армении. 2012. Т.65. №2. С.5-13.
11. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О частотах и формах собственных колебаний ортотропной полосы со свободными продольными краями. // В сб.: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» Ереван: 2008. С 36-42.

Сведения об авторе:

Закарян Татевик Владиковна – научн. сотр. Института механики НАН Армении
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24[б]
Тел: (+37410) 63-88-82,
E-mail: zaqaryantatevik@mail.ru

Поступила в редакцию 30.05.2013