ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №1, 2011 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ПЕТРОСЯН Г.А., ХАЧАТРЯН А.М.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, смешанные условия, асимптотический метод, внутренняя задача, нелинейная задача.
Key words: anisotropic plate, mixed conditions, asymptotic method, interior problem, non-liner problem.

Պետրոսյան Գ.Ա. , Խաչատրյան Ա. Մ.
Անիզոտրոպ սալի մի խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը առաձգականության ոչ գծային տեսության հիման վրա

Քննարկվում է անիզոտրոպ սալի մի եռաչափ խնդրի լարված-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումների հիման վրա, երբ սալի դիմային հարթությունների վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ: Ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով լուծված է ներքին խնդիրը: Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ:

Petrosyan G.A. , Khachatryan A.M.
Asymptotic Solution of one Mixed Boundary Problem of Anisotropic Plate, on the Base of Geometrical Non-Linear Theory of Elasticity

Consider a question of solution stress-strain state in three dimention problem for an asymptotic plate, on the base of geometrical non-liner equations, in the surface of which are given mixed conditions of theory of elasticity. With appliance of asymptotic method of integration are built solutions of the interior problem. Consider concrete examples.

Обсуждается вопрос определения напряженно-деформированного состояния в трехмерной задаче для анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейных уравнений, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости. С применением асимптотического метода интегрирования решена внутренняя задача. Рассмотрены конкретные примеры.

1. Асимптотическая теория для классических статических краевых задач изотропных пластин и оболочек построена в [1]. Подобные задачи для анизотропных полос, пластин и оболочек решены в [2]. Неклассические задачи теории упругости рассмотрены в [3]. Асимптотическим методом интегрирования построено и напряженно-деформированное состояние пластин с общей анизотропией в [7]. Этим же методом построено решение для анизотропной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости в [8]. Первая краевая задача для анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости решена в [9]. Смешанная краевая задача для анизотропной пластинки в линейной постановке решена в [10].

Рассматривается трехмерная задача для анизотропной прямоугольный пластинки по геометрически нелинейной теории упругости: $\Omega = \{(x,y,z): 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, |z| \le h, h << a,b\}$, где a,b – размеры пластинки в плоскости Oxy, а h – толщина пластинки. На лицевых плоскостях пластинки заданы следующие смешанные условия теории упругости:

$$\sigma_{xz}=\left(\frac{h}{l}\right)^4\sigma^-_{xz}(x,y),\sigma_{yz}=\left(\frac{h}{l}\right)^4\sigma^-_{yz}(x,y),w=\left(\frac{h}{l}\right)^3 w^-(x,y) \quad \text{при } z=-h$$

$$u=\left(\frac{h}{l}\right)^3 u^+(x,y),\quad \mathrm{v}=\left(\frac{h}{l}\right)^3 \mathrm{v}^+(x,y),\quad \sigma_z=\left(\frac{h}{l}\right)^3\sigma^+_Z(x,y) \quad \text{при} \quad z=h. \tag{1.1}$$

Краевые условия на торцах $x=0,a$ пока произвольные.

Для решения поставленной задачи будем исходить из трехмерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости [4-6]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_x+\frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{xy}+\frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{xz}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xy}+\frac{\partial u}{\partial y}\sigma_y+\frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{yz}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xz}+\frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{yz}+\frac{\partial u}{\partial z}\sigma_z\right]=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y+a_{13}\sigma_z+$$

$$+a_{14}\sigma_{yz}+a_{15}\sigma_{xz}+a_{16}\sigma_{xy} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}=a_{16}\sigma_x+a_{26}\sigma_y+a_{36}\sigma_z+$$

$$+a_{46}\sigma_{yz}+a_{56}\sigma_{xz}+a_{66}\sigma_{xy}$$

Вводя безразмерную координатную систему $\xi=x/l,\ \eta=y/l,\quad \zeta=z/h$ и безразмерные перемещения $U=u/l$, $V=\mathrm{v}/l$, $W=w/l$, получим систему, которая содержит малый геометрический параметр $\varepsilon=h/l$, где $l=\max(a,b)$. Решение этой системы складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя. Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде суммы по степеням малого параметра [1-3, 7-10]:

$$Q=\varepsilon^q\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^s Q^{(s)}\ , \tag{1.3}$$

где Q – любое из напряжений или безразмерных перемещений.

Значения для q подбираются таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(s)}$. Для рассматриваемой задачи эта цель достигается лишь при:

$$q=3 \ \text{ для } \ \sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy},\sigma_z,U,V,W,\qquad q=4 \ \text{ для } \ \sigma_{xz},\sigma_{yz}. \tag{1.4}$$

Эта асимптотика по сути не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости. Однако, здесь, чтобы получить итерационный процесс, асимптотическое представление (1.3) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра. Асимптотике (1.4) соответствует выбор представления (1.1).

Подставляя (1.3) с учетом (1.4) в преобразованные нелинейные уравнения теории уругости и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим систему:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_1^{*(s)}=0,\quad \left(x,y;\xi,\eta;1,2\right),$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{zy}^{(s-2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_z^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_3^{*(s)}=0\,, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\xi}+U_\xi^{(s-3)}+V_\xi^{(s-3)}+W_\xi^{(s-3)}=a_{11}\sigma_x^{(s)}+a_{12}\sigma_y^{(s)}+a_{13}\sigma_z^{(s)}+a_{14}\sigma_{yz}^{(s-1)}+$$

$$+a_{15}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{16}\sigma_{xy}^{(s)},\qquad \left(1,2;4,5;x,y;\xi,\eta;U,V\right),$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}+U_\zeta^{(s-2)}+V_\zeta^{(s-2)}+W_\zeta^{(s-2)}=a_{13}\sigma_x^{(s-1)}+a_{22}\sigma_y^{(s-1)}+a_{33}\sigma_z^{(s-1)}+a_{34}\sigma_{yz}^{(s-2)}+$$

$$+a_{35}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{36}\sigma_{xy}^{(s-1)},$$

$$\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+U_{\xi\zeta}^{(s-3)}+V_{\xi\zeta}^{(s-3)}+W_{\xi\zeta}^{(s-3)}=a_{15}\sigma_x^{(s-1)}+a_{25}\sigma_y^{(s-1)}+a_{35}\sigma_z^{(s-1)}+$$

$$+a_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)},\qquad \left(1,2;4,5;x,y;\xi,\eta;U,V\right)$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\xi}+U_{\xi\eta}^{(s-3)}+V_{\xi\eta}^{(s-3)}+W_{\xi\eta}^{(s-3)}=a_{16}\sigma_x^{(s)}+a_{26}\sigma_y^{(s)}+a_{36}\sigma_z^{(s)}+$$

$$+a_{46}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{56}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s)},$$

где

$$\sigma_1^{*(s)}=\sigma_{11}^{(s-3)}+\sigma_{12}^{(s-2)},\qquad \sigma_2^{*(s)}=\sigma_{22}^{(s-3)}+\sigma_{21}^{(s-2)},\qquad \sigma_3^{*(s)}=\sigma_{33}^{(s-4)}+\sigma_{32}^{(s-2)},$$

$$\sigma_{11}^{(s)}=\sum_{i=0}^{S}\left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\sigma_x^{(s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-i)}}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_y^{(s-i)}}{\partial\eta}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-i)}}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{zy}^{(s-i)}}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2U^{(i)}}{\partial\xi^2}\sigma_x^{(s-i)}+\frac{\partial^2U^{(i)}}{\partial\eta^2}\sigma_y^{(s-i)}+$$

$$\left.+2\frac{\partial^2U^{(i)}}{\partial\xi\partial\eta}\sigma_{xy}^{(s-i)}+2\frac{\partial^2U^{(i)}}{\partial\xi\partial\zeta}\sigma_{xz}^{(s-i)}+2\frac{\partial^2U^{(i)}}{\partial\eta\partial\zeta}\sigma_{yz}^{(s-i)}\right],\qquad \left(1,2,3;U,V,W\right)$$

$$\sigma_{12}^{(s)}=\sum_{i=0}^{S}\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma_z^{(s-i)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial^2U^{(i)}}{\partial\zeta^2}\sigma_z^{(s-i)}\right),\quad \left(1,2,3;U,V,W\right) \tag{1.6}$$

$$U_\xi^{(s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{S}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\xi},\qquad U_{\xi\eta}^{(s)}=\sum_{i=0}^{S}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\eta},\quad \left(U,V,W\right),$$

$$U_\eta^{(s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{S}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\eta}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\eta},\qquad U_{\zeta\eta}^{(s)}=\sum_{i=0}^{S}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\eta},\quad \left(U,V,W\right),$$

$$U_\zeta^{(s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{S}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\zeta},\qquad U_{\xi\zeta}^{(s)}=\sum_{i=0}^{S}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\zeta}\qquad \left(U,V,W\right).$$

Интегрируя полученную систему (1.5) по ζ, для напряжений и перемещений получим следующие формулы:

$$\sigma_z^{(s)} = \sigma_{z0}^{(s)} + \sigma_z^{*(s)}, \qquad U^{(s)} = u_0^{(s)} + u^{*(s)},\ (U,V,W),$$
$$\sigma_x^{(s)} = \tau_{x0}^{(s)} + a_3\sigma_{z0}^{(s)} + \sigma_x^{*(s)},\ (x,y;a,b), \qquad \sigma_{xy}^{(s)} = \tau_{xy0}^{(s)} + c_3\sigma_{z0}^{(s)} + \sigma_{xy}^{*(s)}, \tag{1.7}$$
$$\sigma_{xz}^{(s)} = \tau_{xz1}^{(s)}\zeta + \sigma_{xz0}^{(s)} + \sigma_{xz}^{*(s)},\ (x,y),$$

где

$$\tau_{x0}^{(s)} = B_{11}\varepsilon_1^{(s)} + B_{12}\varepsilon_2^{(s)} + B_{16}\omega^{(s)},\ (1{,}2;x,y),$$
$$\tau_{xy0}^{(s)} = B_{16}\varepsilon_1^{(s)} + B_{26}\varepsilon_2^{(s)} + B_{66}\omega^{(s)}, \tag{1.8}$$
$$\tau_{xz1}^{(s)} = -\left(\frac{\partial\tau_{x0}^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\tau_{xy0}^{(s)}}{\partial\eta} + a_3\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\xi} + c_3\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\eta}\right),\ (x,y;\ \xi,\eta;\ a,b)$$
$$\varepsilon_1^{(s)} = \frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial\xi},\ \varepsilon_2^{(s)} = \frac{\partial \mathrm{v}_0^{(s)}}{\partial\eta},\ \omega^{(s)} = \frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial \mathrm{v}_0^{(s)}}{\partial\xi}.$$

Коэффициенты B_{ij}, a_i, b_i, c_i определяются по известным формулам [4, 9,10].

$\sigma_{xz0}^{(s)}, \sigma_{yz0}^{(s)}, \sigma_{z0}^{(s)}, u_0^{(s)}, \mathrm{v}_0^{(s)}, w_0^{(s)}$ – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже с помощью условий (1.1).

Величины со звездочками, входящие в уравнения (1.7), как обычно, известны для каждого приближения s, поскольку выражаются через предыдущие приближения. Сюда же входят члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Эти величины определяются по следующим формулам:

$$\sigma_z^{*(s)} = -\int_0^\zeta\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-2)}}{\partial\eta} + \sigma_3^{*(s)}\right)d\zeta,$$

$$u^{*(s)} = \int_0^\zeta\Big(a_{15}\sigma_x^{(s-1)} + a_{25}\sigma_y^{(s-1)} + a_{35}\sigma_z^{(s-1)} + a_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)} -$$
$$-\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi} - U_{\xi\zeta}^{(s-3)} - V_{\xi\zeta}^{(s-3)} - W_{\xi\zeta}^{(s-3)}\Big)d\zeta,$$

$$\mathrm{v}^{*(s)} = \int_0^\zeta\Big(a_{14}\sigma_x^{(s-1)} + a_{24}\sigma_y^{(s-1)} + a_{34}\sigma_z^{(s-1)} + a_{44}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{45}\sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{46}\sigma_{xy}^{(s-1)} -$$
$$-\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta} - U_{\eta\zeta}^{(s-3)} - V_{\eta\zeta}^{(s-3)} - W_{\eta\zeta}^{(s-3)}\Big)d\zeta,$$

$$w^{*(s)} = \int_0^\zeta\Big(a_{13}\sigma_x^{(s-1)} + a_{23}\sigma_y^{(s-1)} + a_{33}\sigma_z^{(s-1)} + a_{34}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{35}\sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{36}\sigma_{xy}^{(s-1)} -$$
$$-U_\zeta^{(s-2)} - V_\zeta^{(s-2)} - W_\zeta^{(s-2)}\Big)d\zeta,$$

$$\sigma_x^{*(s)} = B_{11}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{12}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{16}\omega^{*(s)} + a_3\sigma_z^{*(s)} + a_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + a_5\sigma_{xz}^{(s-1)},$$

$$\sigma_y^{*(s)} = B_{12}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{22}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{26}\omega^{*(s)} + b_3\sigma_z^{*(s)} + b_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + b_5\sigma_{xz}^{(s-1)},$$
$$\sigma_{xy}^{*(s)} = B_{16}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{26}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{66}\omega^{*(s)} + c_3\sigma_z^{*(s)} + c_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + c_5\sigma_{xz}^{(s-1)},$$
$$\sigma_{xz}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_x^{*(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial\eta} + \sigma_1^{*(s)}\right)d\zeta,\ \left(1,2;\ x,y;\ \xi,\eta\right), \tag{1.9}$$
$$\varepsilon_1^{*(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\xi} + U_\xi^{(s-3)} + V_\xi^{(s-3)} + W_\xi^{(s-3)},\ \left(1,2;u,\mathrm{v};\xi,\eta\right),$$
$$\omega^{*(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial \mathrm{v}^{*(s)}}{\partial\xi} + U_{\xi\eta}^{(s-3)} + V_{\xi\eta}^{(s-3)} + W_{\xi\eta}^{(s-3)}.$$

Предполагается, что $Q^{(s-k)} \equiv 0$, если $s < k$.

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим неизвестные функции интегрирования:

$$u_0^{(s)} = u^{+(s)} - u^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right),\ \left(u,\mathrm{v}\right), \qquad w_0^{(s)} = w^{-(s)} - w^{*(s)}\left(\xi,\eta,-1\right),$$
$$\sigma_{z0}^{(s)} = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right), \tag{1.10}$$
$$\sigma_{xz0}^{(s)} = \sigma_{xz}^{-} - L_{11}\left(B_{ij}\right)u^{+} - L_{12}\left(B_{ij}\right)\mathrm{v}^{+} - a_3\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\xi} - c_3\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\eta} + L_{11}\left(B_{ij}\right)u^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right) +$$
$$+ L_{12}\left(B_{ij}\right)\mathrm{v}^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right) + a_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\xi} + c_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\eta} - \sigma_{xz}^{*(s)}\left(\xi,\eta,-1\right)$$
$$\sigma_{yz0}^{(s)} = \sigma_{yz}^{-} - L_{12}\left(B_{ij}\right)u^{+} - L_{22}\left(B_{ij}\right)\mathrm{v}^{+} - c_3\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\xi} - b_3\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\eta} + L_{12}\left(B_{ij}\right)u^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right) +$$
$$+ L_{22}\left(B_{ij}\right)\mathrm{v}^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right) + c_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\xi} + b_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\eta} - \sigma_{yz}^{*(s)}\left(\xi,\eta,-1\right)$$

Здесь $L_{ij}\left(B_{ij}\right)$ – известные дифференциальные операторы второго порядка [4].

С учетом (1.12), окончательное решение внутренней задачи представим в виде:

$$U^{(s)} = u^{+(s)} + u^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right) - u^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right), \qquad \left(U,V\right),$$
$$W^{(s)} = w^{-(s)} + w^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right) - w^{*(s)}\left(\xi,\eta,-1\right)$$
$$\sigma_z^{(s)} = \sigma_z^{+} + \sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right) - \sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right), \tag{1.11}$$
$$\sigma_x^{(s)} = B_{11}\frac{\partial u^{+(s)}}{\partial\xi} + B_{12}\frac{\partial \mathrm{v}^{+(s)}}{\partial\eta} + B_{16}\left(\frac{\partial u^{+(s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial \mathrm{v}^{+(s)}}{\partial\xi}\right) + a_3\sigma_z^{+(s)} -$$
$$- B_{11}\frac{\partial u^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\xi} - B_{12}\frac{\partial \mathrm{v}^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\eta} - B_{16}\left(\frac{\partial u^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\eta} +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial \mathrm{v}^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\xi}\right) + \sigma_x^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right) - a_3\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right),\ \left(x,y;\xi,\eta;1,2;u,\mathrm{v};a,b\right)$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = B_{16}\frac{\partial u^{+(s)}}{\partial\xi} + B_{26}\frac{\partial \mathrm{v}^{+(s)}}{\partial\eta} + B_{66}\left(\frac{\partial u^{+(s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial \mathrm{v}^{+(s)}}{\partial\xi}\right) + c_3\sigma_z^{+(s)} -$$

$$- B_{16}\frac{\partial u^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi} - B_{26}\frac{\partial \mathrm{v}^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta} - B_{66}\left(\frac{\partial u^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial \mathrm{v}^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi}\right) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta) - c_3\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1),$$

$$\sigma_{xz}^{(s)} = \sigma_{xz}^{-(s)} + \left[-L_{11}(B_{ij})u^{+(s)} - L_{12}(B_{ij})\mathrm{v}^{+(s)} - a_3\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\xi} - c_3\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\eta} +\right.$$

$$+ L_{11}(B_{ij})u^{*(s)}(\xi,\eta,1) + L_{12}(B_{ij})\mathrm{v}^{*(s)}(\xi,\eta,1) + a_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi} +$$

$$\left. + c_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta}\right](\zeta+1) + \sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta) - \sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,-1),$$

$$(x, y;\xi,\eta;1,2;u,\mathrm{v};a,b).$$

Решение (1.11) внешне полностью совпадает с решением соответствующей линейной задачи, но здесь величины со звездочками включают в себе и те члены, которые обусловлены нелинейностью данной задачи.

В формулах (1.11) необходимо учитывать, что

$u^{+(0)} = u^+$, $\mathrm{v}^{+(0)} = \mathrm{v}^+$, $w^{-(0)} = w^-$, $\sigma_z^{+(0)} = \sigma_z^+$, $\sigma_{xz}^{-(0)} = \sigma_{xz}^-$, $\sigma_{yz}^{-(0)} = \sigma_{yz}^-$,

$u^{+(s)} = \mathrm{v}^{+(s)} = w^{-(s)} = 0$, $\sigma_z^{+(s)} = \sigma_{xz}^{-(s)} = \sigma_{yz}^{-(s)} = 0$ при $s > 0$

2. Рассмотрим конкретные примеры.

а) Пусть

$\sigma_z^+ = -q$, $u^+ = \mathrm{v}^+ = 0$, $\sigma_{xz}^- = \sigma_{yz}^- = 0$, $w^- = 0$.

Используя формулы (1.6), (1.9) и (1.11) и считая все приближения до $s = 7$ включительно, получим следующее решение:

$$\sigma_x = -\frac{h^3}{l^3}a_3 q,\quad \sigma_y = -\frac{h^3}{l^3}b_3 q,\quad \sigma_{xy} = -\frac{h^3}{l^3}c_3 q,$$

$$\sigma_{xz} = 0,\quad \sigma_{yz} = 0,\quad \sigma_z = -\frac{h^3}{l^3}q,$$

$$u = \frac{h^3}{l^3}k_{35}(h-z)q,\quad \mathrm{v} = \frac{h^3}{l^3}k_{34}(h-z)q, \tag{2.1}$$

$$w = -\frac{h^3}{l^3}k_{33}(z+h)q - \left[\frac{h^6q^2}{2l^6}\left(k_{33}^2+k_{34}^2+k_{35}^2\right) + \frac{h^9q^3}{2l^9}k_{33}\left(k_{33}^2+k_{34}^2+k_{35}^2\right)\right](z+h)$$

где $k_{ij} = a_i a_{1j} + b_i a_{2j} + c_i a_{j6} + a_{ij}$, $(i, j = 3,4,5)$.

Нелинейность задачи проявляется с приближения $s = 4$. Поправки, обусловленные нелинейностью, взяты в квадратные скобки. Были учтены первые две отличные от нуля поправки.

По сравнению с той же задачей в линейной постановке [10], претерпела изменение только формула для перемещения w.

б) Рассмотрим другой пример. Пусть

$$\sigma_z^+ = px + qy,\ u^+ = \mathrm{v}^+ = 0, \qquad \sigma_{xz}^- = \sigma_{yz}^- = 0,\ w^- = 0.$$

Вычисляя приближения до $s = 4$ для напряжений и до $s = 5$ для перемещений, получим следующие формулы для неизвестных величин:

$$\sigma_x = \frac{h^3}{l^3} a_3 \left(px + qy \right) + \frac{h^3}{l^3}\left(B_{11}k_{35}p + B_{12}k_{34}q + B_{16}\left(k_{34}p + k_{35}q \right)\right)\left(z - h \right) +$$
$$+ \left[-\frac{h^6}{l^6} a_3 c_0 \left(px + qy \right) + \ldots \right]\left(z - h \right),$$

$$\sigma_{xy} = \frac{h^3}{l^3} c_3 \left(px + qy \right) + \frac{h^3}{l^3}\left(B_{16}k_{35}p + B_{26}k_{34}q + B_{66}\left(k_{34}p + k_{35}q \right)\right)\left(z - h \right) +$$
$$+ \left[-\frac{h^6}{l^6} c_3 c_0 \left(px + qy \right) + \ldots \right]\left(z - h \right),$$

$$\sigma_{xz} = \left[\frac{h^6}{2l^6} c_0 \left(a_3 p + c_3 q \right)\left(z - 3h \right) - \frac{h^6}{2l^6} k_{35}\left(a_3 p^2 + 2c_3 pq + b_3 q^2 \right)\left(z - 3h \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{h^7}{l^7} a_0 \left(px + qy \right) + \ldots \right]\left(z + h \right), \qquad (2.2)$$

$$\sigma_z = \left[\frac{h^3}{l^3}\left(px + qy \right) - \frac{h^6}{l^6} c_0 \left(px + qy \right) + \ldots \right]\left(z - h \right),$$

$$u = \frac{h^3}{l^3} k_{35}\left(px + qy \right)\left(z - h \right) + \frac{h^3}{2l^3} a_0 \left(z - h \right)^2 +$$
$$+ \left[-\frac{h^6}{2l^6} k_{35} c_0 \left(z - h \right)\left(px + qy \right) + \frac{2h^7}{l^7} p\left(k_{34}^2 + k_{35}^2 \right)\left(px + qy \right) + \ldots \right]\left(z - h \right)$$

$$w = \frac{h^3}{l^3} k_{33}\left(px + qy \right)\left(z + h \right) + \frac{h^3}{2l^3} c_0 \left(z - 3h \right)\left(z + h \right) +$$
$$+ \left[-\frac{h^6}{2l^6}\left(k_{33}^2 + k_{34}^2 + k_{35}^2 \right)\left(px + qy \right)^2 + \ldots \right]\left(z + h \right),$$

где $a_0 = a_5 k_{35} p + b_5 k_{34} q + c_5 \left(k_{34} p + k_{35} q \right) - k_{33} p$,

$c_0 = a_3 k_{35} p + b_3 k_{34} q + c_3 \left(k_{34} p + k_{35} q \right)$.

Напряжения σ_y и σ_{yz} и перемещение v имеют аналогичный вид.

Здесь, также поправки, обусловленные нелинейностью задачи, взяты в квадратные скобки.

Полученные формулы и рассмотренные примеры показывают, что учёт нелинейности будет существенным для толстых пластин при сильной анизотропии и большой изменяемости внешних нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких оболочек. М.: 1976. 510с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во "Гитутюн" НАН РА, 2005. 468с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1967. 268с.
5. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948.
6. Черных К.Ф., Литвененкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ, 1988.
7. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К вопросу определения напряженно-деформираванного состояния пластинок с общей анизотропией // В сб.:"XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин". Тезисы докладов. М.: 1977.
8. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости // Изв.Северо-Кавказского центра высшей школы. Сер. естест. наук. Спецвыпуск. 2001. С.16-18.
9. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. Первая краевая задача для анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости. //Ученые записки АрГУ. 2007. №1(14). С.30-35.
10. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С.65-72.

Сведения об авторах:

Хачатрян Александр Мовсесович
Доктор физ-мат наук, профессор, зав. кафедрой математики АрГУ
Адрес: НКР, г. Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5
Тел.: (37497)20-19-49
E-mail: alexkhach49@yandex.ru

Петросян Гаянэ Альбертовна
Ассистент кафедры математики АрГУ
Адрес: НКР, г. Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5
Тел.: (37497)23-83-10
E-mail: gayan-petrosian@rambler.ru

Поступила в редакцию 11.05.2010