

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АНТИПЛОСКОГО ЭЛЕКТРОУПРУГОГО
ВОЛНОВОГО СИГНАЛА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ ПРИ
УЧЕТЕ БОЛЬШИХ СДВИГОВ

Аветисян А.С., Хачатрян В.М.

Ключевые слова: электроупругая волна, геометрическая нелинейность, конечные удлинения и сдвиги, пьезоэлектрический слой.

Key words: electroelastic wave, geometrical nonlinearity, finite elongations and shears, piezoelectric layer.

Ա. Ս. Ավետիսյան, Վ. Մ. Խաչատրյան

Մեծ սահքերի հաշվառման դեպքում հակահարթ էլեկտրաառաձգական ալիքային ազդանշանի տարածման մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է 6mm դասի պիեզոբյուրեղային դիէլեկտրիկ շերտում վերջավոր լայնույթի էլեկտրաառաձգական ալիքի տարածումը, երկրաչափական ոչգծայնության (միայն մեծ սահքերի տեսքով) հաշվառումով: Ցույց է տրվում, որ սահքի էլեկտրաակտիվ գծային ազդանշանի տարածման դեպքում, սահմանակցող միջավայրերում գրգռվում է կապակցված էլեկտրամագնիսաառաձգական ալիքային դաշտ, իսկ սկզբնական ալիքային ազդանշանը ձևախեղվում է: Կատարված է թվային վերլուծություն, և ալիքային դաշտի բաղադրիչների ձևախեղման չափի համեմատություն առաջին մոտավորությամբ:

A.S.Avetisyan, V.M.Khachatryan

Propagation of antiplane electroelastic wave signal in the piezoelectric layer taking into account large shears

In this work the propagation of finite amplitude electroelastic waves in dielectric layer of 6mm hexagonal symmetry class piezocrystal taking into account geometrical nonlinearity only in the form of large shears is investigated. It is shown that during the propagation of electroactive shear linear signal in adjoining mediums the related electromagnetoelastic wave field is arisen and prime signal is hardly distorted. The numerical analysis and comparison of distortion measure in the prime approximation of electroelastic field wave components is carried out.

В работе рассматривается распространение электроупругих волн конечной амплитуды в диэлектрическом слое из пьезокристалла класса 6mm гексагональной симметрии с учетом геометрической нелинейности в виде только больших сдвигов. Показывается, что при распространении электроактивного сдвигового линейного сигнала в граничающих средах индуцируется связанное электромагнитоупругое волновое поле, а первичный сигнал сильно искажается. Проведен численный анализ и сравнение меры искажений в первом приближении волновых составляющих электроупругого поля.

Учет больших сдвигов усложняет взаимодействие между упругим и электромагнитным полями, а также между плоским упругим и антиплоским электроупругим деформированными состояниями.

В этой работе, как геометрическая нелинейность, учитываются только конечные сдвиговые деформации.

1. Пусть пьезоэлектрический слой занимает область $|x_1| < \infty$, $0 < x_2 < h$, $|x_3| < \infty$, для которого уравнения движения упругой среды и уравнения электромагнетостатики в лагранжевой форме записи имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}
& c_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{66} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \\
& = - \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \left(c_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + c_{66} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \left(c_{11} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + c_{66} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} \right) - \\
& - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, \\
& c_{66} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{11} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = \\
& = - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \left(c_{66} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \left(c_{66} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + c_{11} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} \right) - \\
& - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
& c_{44} \Delta U_3 + e_{15} \Delta \Phi - \rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = - \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \left(e_{15} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{44} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \quad (1.1) \\
& e_{15} \Delta U_3 - \varepsilon_{11} \Delta \Phi = \varepsilon_{11} \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \right), \\
& \Delta \Psi = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right),
\end{aligned}$$

где u_k – компоненты упругого перемещения, ρ – естественная плотность среды, $\Phi(x_j, t)$ и $\Psi(x_k, t)$ – потенциалы электрического и магнитного полей, соответственно, введенные через лагранжевы напряженности электрического $E_k(x_j, t)$ и магнитного $H_k(x_j, t)$ полей с учетом градиента деформации $\xi_{i,j} = \delta_{ij} + u_{i,j}$.

Во внешней вакуумной области $|x_1| < \infty$, $x_2 < 0$, $|x_3| < \infty$ или $|x_1| < \infty$, $x_2 > h$, $|x_3| < \infty$ решаются уравнения электромагнестатики для вакуума

$$\begin{aligned}
\Delta \Phi^{(e)} &= \frac{\partial^2 U_2^{(e)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial U_2^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi^{(e)}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
\Delta \Psi^{(e)} &= \frac{\partial^2 U_2^{(e)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial U_2^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi^{(e)}}{\partial x_1 \partial x_2},
\end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\Phi^{(e)}(x_i, t)$ и $\Psi^{(e)}(x_i, t)$ – потенциалы этих внешних полей соответственно, а $u_k^{(e)}(x_i, t) = u_k(x_1, 0, x_3, t)$ и $u_k^{(e)}(x_i, t) = u_k(x_1, h, x_3, t)$ – деформации точек соответствующей поверхности раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ [2].

Естественно, что конечность деформаций поверхности электроупругой среды искажает (“деформирует”) нематериальную внешнюю среду, чем и продиктованы уравнения (1.2).

На границах раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ удовлетворяется непрерывность тангенциальных компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей

$$\Phi - \Phi^{(e)} = 0, \quad \Psi - \Psi^{(e)} = 0 \quad (1.3)$$

и нормальных компонент векторов индукций этих полей

$$\begin{aligned} e_{15} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) - \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial x_1} \right) \\ \mu_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} &= \mu_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

На недеформированных границах раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ термодинамические напряжения должны равняться нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} &= - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, \\ c_{12} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} &= - \frac{1}{2} c_{11} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) - c_{66} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \\ &- \frac{1}{2} c_{12} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} - \frac{1}{2} c_{11} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, \\ c_{44} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= - c_{66} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Очевидно, что учет “деформирования” внешней нематериальной области усложняет запись материальных соотношений внешней среды, тем самым усложняя уравнения электромагнитоупругости (1.2), а также граничные условия (1.4) и (1.5).

Кроме этого, из первоначальных соотношений следует, что посредством градиента деформаций $\xi_{i,j} = \delta_{ij} + u_{i,j}$ квазистатические электрическое и магнитное поля взаимосвязаны. Это значит, что если в пьезодиэлектрическую среду излучать электроупругую волну конечной амплитуды, то как в электроупругой среде, так и в вакуумной области индуцируется также магнитное поле, а волна в целом становится электромагнитоупругой.

Учет “деформаций” внешней вакуумной области особенно важен в задачах о распространении поверхностных электроупругих волн, когда волновая энергия, в основном, локализована у поверхности раздела сред.

Естественно, что при изучении характера распространения излученной в пьезоэлектрическую среду волнового сигнала, наряду с граничными условиями на поверхностях пьезослоя $x_2 = 0$ и $x_2 = h$, должны удовлетворяться также условия затухания по глубине вакуумных соответствующих полупространств всех индуцированных волновых составляющих (при $x_2 \rightarrow \pm\infty$).

2. Пусть на вход пьезодиэлектрической среды падает монохроматическая волна конечной амплитуды. Нелинейность уже не допускает простых периодических волновых решений и приводит к последовательному возбуждению временных гармоник падающей волны типа $f_n = A_n(\xi, \tau) \exp i(\omega_n t - k_n \vec{r})$. При этом

амплитуды генерационных гармоник будут медленно изменяющимися функциями времени и направления распространения волны ($\xi = \varepsilon r, \tau = \varepsilon t$). Здесь ε – физический малый параметр, которым может быть мера понижения первичного волнового сигнала на расстоянии длины волны.

Исходя из вышесказанного и учитывая, что нелинейность кристаллов мала, при решении задачи о распространении волн конечной амплитуды достаточно ограничиться приближением заданного волнового поля (падающего волнового сигнала).

Воспользуемся методом возмущений, представляя искомые величины электромагнитоупругого поля в виде

$$F(x_j, t, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n F_n(x_j, t, \xi, \tau). \quad (2.1)$$

Не нарушая общности решения, за направление распространения волны принята координатная ось Ox_1 (т.е. $\xi = \varepsilon x_1$). В нелинейные волновые уравнения и граничные условия эти изменения входят посредством замены производных по x_1 и по t

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (2.2)$$

Подставляя разложение искомых величин (2.1) в уравнения электромагнитоупругости (1.1) и (1.2) и в граничные условия (1.3) – (1.5) с учетом преобразований (2.2) и приравнявая выражения при одинаковых степенях ε , в первом приближении получим линейную однородную краевую задачу электромагнитоупругости.

Известно, что для пьезоэлектрических кристаллов класса $6mm$ задачи плоскодеформированного упругого поля и магнитного поля разделяются от задачи антиплоской электроактивной деформации [3]. Это означает, что в данной среде в качестве волнового сигнала можно возбуждать один из указанных волновых полей.

В дальнейшем вместо обозначений декартовых координат x_1, x_2, x_3 для удобства будем пользоваться обозначениями x, y, z , соответственно.

Решения полученных краевых задач, с учетом слабой нелинейности пьезокристалла, запишутся в виде:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t, \xi, \tau) = & \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}(\xi, \tau) \{ \exp(kmv_1 y) + f_m \exp(-kmv_1 y) + \\ & + \frac{v_1 v_2}{(v_2^2 + 1) \operatorname{sh}(kmv_2 h)} [[-\exp(kmv_1 h) + \exp(-kmv_2 h) + (\exp(-kmv_1 h) - \\ & - \exp(-kmv_2 h)) f_m] \exp(kmv_2 y) + [\exp(kmv_2 h) - \exp(kmv_1 h) + \\ & + (\exp(-kmv_1 h) - \exp(kmv_2 h)) f_m] \exp(-kmv_2 y)] \} \exp(im\varphi) + \hat{e} \cdot \hat{n}. \quad (2.3) \\ v_1(x, y, t, \xi, \tau) = & \sum_{m=1}^{\infty} i U_{1m}(\xi, \tau) \{ v_1 [\exp(kmv_1 y) - f_m \exp(-kmv_1 y)] + \\ & + \frac{v_1}{(v_2^2 + 1) \operatorname{sh}(kmv_2 h)} [[-\exp(kmv_1 h) + \exp(-kmv_2 h) + (\exp(-kmv_1 h) - \end{aligned}$$

$$-\exp(-kmv_2h))f_m]\exp(kmv_2y)-[\exp(kmv_2h)-\exp(kmv_1h)+ \\ +(\exp(-kmv_1h)-\exp(kmv_2h))f_m]\exp(-kmv_2y)]\}\exp(im\varphi)+\hat{e}\tilde{n}.$$

$$w_1(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}(\xi, \tau) [\exp(km\alpha y) + f_m \exp(-km\alpha y)] \exp(im\varphi) + \hat{e}\tilde{n}.$$

$$\Phi_1(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}(\xi, \tau) \left\{ \frac{\alpha c_{44}(1+\chi)}{2e_{15}\text{sh}(kmh)} [\exp(-kmh) - \exp(km\alpha h) + \right. \\ + (\exp(-km\alpha h) - \exp(-kmh))f_m] \exp(kmy) + [\exp(kmh) - \exp(km\alpha h) + \\ + (\exp(-km\alpha h) - \exp(kmh))f_m] \exp(-kmy)] + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} [\exp(km\alpha y) + \\ \left. + f_m \exp(-km\alpha y)] \right\} \exp(im\varphi) + \hat{e}\tilde{n}. \quad (2.4)$$

$$\Phi_1^{(e)}(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}(\xi, \tau) \frac{\varepsilon_{11}\alpha c_{44}(1+\chi)(f_m-1)}{e_{15}\varepsilon_0} \exp(kmy) \times \\ \times \exp(im\varphi) + \hat{e}\tilde{n} \quad \text{и } \forall y < 0$$

$$\Phi_1^{(e)}(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}(\xi, \tau) \times \\ \times \frac{\varepsilon_{11}\alpha c_{44}(1+\chi)(\exp(km\alpha h) - f_m \exp(-km\alpha h))}{e_{15}\varepsilon_0 \exp(-kmh)} \exp(-kmy) \times \\ \times \exp(im\varphi) + \hat{e}\tilde{n} \quad \text{и } \forall y > h$$

В вакуумных полупространствах потенциальные магнитные поля не существуют. Однако из линейной теории электроупругости известно, что электрическое поле в пьезоэлектрике индуцирует вихревое магнитное поле, определяющееся формулой [4]:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_0}{\partial t}.$$

Под индукцией $\vec{D}_0$ понимается определяемое из задачи электроупругости значение $\vec{D}$. Вихревая часть магнитоупругого поля в акустоэлектрической задаче имеет порядок $(v^2/c_0^2) \times |\nabla \Phi|$ и всегда пренебрежимо мала.

В соотношениях (2.3) и (2.4) использованы обозначения

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v_{SH}^2}{c_t^2}}, \quad v_1 = \sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c_t^2}}, \quad v_2 = \sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c_{lt}^2}}, \quad (2.5) \\ c_t^2 = \frac{c_{44}}{\rho}(1+\chi), \quad c_{lt}^2 = \frac{c_{66}}{\rho}, \quad c_l^2 = \frac{c_{11}}{\rho},$$

$\varphi(x, t) = \omega t - kx$ – фазовая функция. Приведённые параметры характеризуют волновой сигнал.

Во втором приближении волновые уравнения электромагнитоупругости получаются в виде:

$$L_1[u_2, v_2] = -2c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial \xi} - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau} + F_1[u_1, v_1, w_1],$$

$$L_2[u_2, v_2] = -2c_{66} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \xi} - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial \tau} + F_2[u_1, v_1, w_1], \quad (2.6)$$

$$L_3[w_2, \Phi_2] = -2c_{44} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial \xi} - 2e_{15} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t \partial \tau} + F_3[u_1, v_1, w_1, \Phi_1],$$

$$L_4[w_2, \Phi_2] = -2e_{15} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial \xi} + 2\varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \xi} + F_4[u_1, v_1, \Phi_1], \quad (2.7)$$

$$L_5[\Phi_2^{(e)}] = -2 \frac{\partial^2 \Phi_1^{(e)}}{\partial x \partial \xi} + F_5[v_1^{(e)}, \Phi_1^{(e)}], \quad L_6[\Psi_2] = -2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial \xi} + F_6[u_1, v_1, \Psi_1],$$

$$L_7[\Psi_2^{(e)}] = -2 \frac{\partial^2 \Psi_1^{(e)}}{\partial x \partial \xi} + F_7[v_1^{(e)}, \Psi_1^{(e)}]. \quad (2.8)$$

Здесь $L_k[*]$ – линейные волновые операторы, а $F_k[*]$ – нелинейные операторы.

На деформированной поверхности раздела $y = 0$ и $y = h$ искомые величины волнового поля удовлетворяют неоднородным граничным условиям:

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + B_1[w_1]$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{c_{11}}{c_{12}} \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + B_2[u_1, v_1, w_1] \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{e_{15}}{c_{44}} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = B_3[u_1, v_1, w_1]$$

$$\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial \Phi_2^{(e)}}{\partial y} = B_4[u_1, v_1, v_1^{(e)}, \Phi_1, \Phi_1^{(e)}] \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2^{(e)}}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_1^{(e)}}{\partial \xi} + B_5[u_1, v_1, \Phi_1, \Phi_1^{(e)}]$$

$$\frac{\mu_{11}}{\mu_0} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2^{(e)}}{\partial y} = B_6[u, v_1, v_1^{(e)}, \Psi_1, \Psi_1^{(e)}]$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2^{(e)}}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi_1^{(e)}}{\partial \xi} + B_7[u_1, v_1, \Psi_1, \Psi_1^{(e)}] \quad (2.11)$$

Здесь также $B_x[*]$ – нелинейные операторы и выражения соответствующих слагаемых не приводятся из-за их громоздкости.

В практике обычно используется или рэлеевский электроупругий сигнал $\{u_1(x, y, t), v_1(x, y, t), 0, \Phi_1(x, y, t)\}$, или чисто сдвиговой электроупругий волновой сигнал $\{0, 0, w_1(x, y, t), \Phi_1(x, y, t)\}$ (волны Гуляева–Блюстейна). В случае пьезокристалла класса бтп в указанном срезе xOy рэлеевское волновое поле не электроактивное, то есть имеем:

$$u_1(x, y, t) \neq 0, v_1(x, y, t) \neq 0, w_1(x, y, t) = 0$$

$$\Phi_1(x, y, t) = 0, \Phi_1^{(e)}(x, y, t) = 0, \Psi_1(x, y, t) = 0, \Psi_1^{(e)}(x, y, t) = 0$$

Тогда, если в первом приближении имеется только одна рэлеевская волна, в соотношениях (2.6) – (2.11), а также в следующих приближениях ($m \geq 1$) будем иметь:

$$\begin{aligned} F_k[u_m, v_m, 0, 0] &= F_k^{(1)}[u_m, v_m], \quad (k = 1, 2), \\ F_j[u_m, v_m, 0, 0] &= 0, \quad (j = 3, 4, 5, 6, 7), \\ B_k[u_m, v_m, 0, 0] &= B_k^{(1)}[u_m, v_m], \quad (k = 1, 2), \\ B_j[u_m, v_m, 0, 0] &= 0, \quad (j = 3, 4, 5, 6, 7). \end{aligned} \quad (2.12)$$

С учетом (2.12), из (2.7), (2.8) и (2.10), (2.11) очевидно, что начальное плоско-деформированное волновое поле не возбуждает высшие гармоники антиплоского электроупругого, а также магнитоупругого полей. Происходит только последовательное возбуждение высших гармоник чисто упругого плоско-деформированного волнового поля в плоскости изотропии пьезокристалла xOy . Исследование данной задачи можно найти в работах [5,6].

В случае чисто сдвигового электроупругого волнового сигнала:

$$u_1(x, y, t) = 0, v_1(x, y, t) = 0, \Psi_1(x, y, t) = 0, \Psi_1^{(e)}(x, y, t) = 0,$$

а $w_1(x, y, t)$, $\Phi_1(x, y, t)$ и $\Phi_1^{(e)}(x, y, t)$ определяются соотношениями (2.4).

Существует также пренебрежимо малое вихревое поле внутри и вне пьезослоя.

Тогда в уравнениях и граничных условиях имеем:

$$\begin{aligned} F_k[0, 0, w_m, \Phi_m] &= F_k^2[w_m], \\ F_j[0, 0, w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(e)}] &= 0, \\ B_k[0, 0, w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(e)}] &= B_k^{(1)}[w_m], \\ B_j[0, 0, w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(e)}] &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где также $k = 1, 2$ и $j = 3, 4, 5, 6, 7$.

Генерация высших гармоник сдвиговой электроупругой волны происходит из-за самовоздействия волнового сигнала (первичной гармоники). Условие отсутствия вековых членов в решении получается из граничных условий краевой задачи электроупругости (2.7) и (2.10):

$$M_{ij}^0 C_j(\epsilon, \tau) = A_i(W_{1,\xi}, W_{1,\tau}). \quad (2.14)$$

Учитывая, что первичным электроупругим полем обеспечивается выполнение условия $\det \|M_{ij}^0\| = 0$, из условия существования нетривиального решения получаем дифференциальное уравнение, описывающее характер изменения амплитуд высших гармоник сдвиговой электроупругой волны

$$a_1(kh)W_{1m,\xi} + W_{1m,\tau} = 0 \quad \text{для} \quad m \geq 1. \quad (2.15)$$

Здесь $a_1(kh) = (a(kh)/b(kh))$ – скорость изменения амплитуды волны (групповая скорость), где

$$\begin{aligned} a(kh) &= -c_t \left\{ [-1 + e^{2kh}]^2 e_{15}^2 [e^{2kh\alpha} \alpha + e^{2kh\alpha} (kh + 2\alpha) f_1 + (-kh + \alpha) f_1^2] \epsilon_0 + \right. \\ &+ [1 + \chi] c_{44} \epsilon_{11} \left\{ e^{2kh\alpha} [-1 + e^{4kh} - 4e^{2kh} kh\alpha^2 + 2e^{kh(3+\alpha)} (-1 + kh(-1 + \alpha)\alpha) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2e^{kh+kh\alpha}(1+kh\alpha(1+\alpha))\Big] + e^{kh\alpha}\Big[8e^{kh(2+\alpha)}kh\alpha^2 + e^{kh\alpha}(2+kh\alpha) - e^{kh(4+\alpha)}\times \\
& \times(2+kh\alpha) + e^{kh}(-4+2kh(1-2\alpha)\alpha) - 2e^{3kh}(-2+kh\alpha(1+2\alpha))\Big]f_1 + \\
& +[-1+kh\alpha - 4e^{2kh}kh\alpha^2 + e^{4kh}(1-kh\alpha) + 2e^{kh(3+\alpha)}(-1+kh\alpha^2) + 2e^{kh+kh\alpha}\times \\
& \times(1+kh\alpha^2)]f_1^2\Big\rangle\varepsilon_0 - [-1+e^{2kh}]^2[-e^{2kh\alpha} + e^{2kh\alpha}(2+kh\alpha)f_1 + \\
& +(-1+kh\alpha)f_1^2]\varepsilon_{11}\Big\}\Big\} \\
b(kh) = & [-1+e^{2kh}]^2\sqrt{1-\alpha^2}\{-khe_{15}^2[e^{2kh\alpha}-f_1]f_1\varepsilon_0 + [1+\chi]\text{Csch}(kh)\times \\
& \times c_{44}\varepsilon_{11}\Big\langle e^{2kh\alpha}(e^{kh\alpha}(1+kh\alpha)-\text{Ch}(kh)) + e^{kh\alpha}(-2+kh\alpha + e^{kh\alpha}(2+kh\alpha)\times \\
& \times \text{Ch}(kh))f_1 + (e^{kh\alpha} + (-1+kh\alpha)\text{Ch}(kh))f_1^2\Big\rangle\varepsilon_0 + \text{Sh}(kh)\Big\langle -e^{2kh\alpha} + \\
& + e^{2kh\alpha}(2+kh\alpha)f_1 + (-1+kh\alpha)f_1^2\Big\rangle\varepsilon_{11}\Big\}\Big\}
\end{aligned}$$

Очевидно, что по сравнению со случаем пьезополюпространства [2], здесь имеется дисперсия волнового сигнала.

При падении линейного волнового сигнала, для комплексных амплитуд гармоник $W_{1m}(\xi, \tau)$ входными условиями будут:

$$\begin{aligned}
\text{Re}[W_{11}(0,0)] &= A_1, \quad \text{Im}[W_{11}(0,0)] = 0, \\
\text{Re}[W_{1m\geq 2}(0,0)] &= 0, \quad \text{Im}[W_{1m\geq 2}(0,0)] = 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

С учетом этого для комплексных амплитуд получаем

$$\begin{aligned}
W_{11}(\xi, \tau) &= A_1 \exp(\xi - a_1\tau), \quad \text{Im}[W_{11}(\xi, \tau)] = 0 \\
W_{1m}(\xi, \tau) &= 0 \quad \text{при } m \geq 2
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Антиплоское электроупругое поле получается в виде:

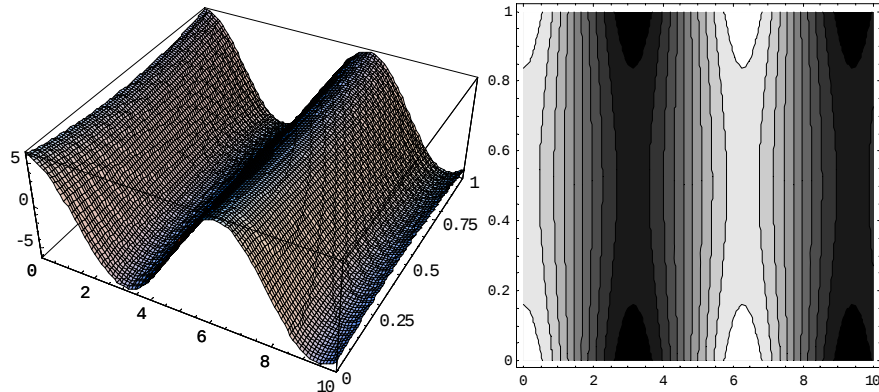
$$\begin{aligned}
w_2(x, y, t, \xi, \tau) &= A_1 \exp(\xi - a_1\tau) \Big\{ [\exp(k\alpha y) + f_1 \exp(-k\alpha y)] \cos(\omega t - kx) - \\
& - \left(1 - \frac{v_{sh}a_1}{c_i^2}\right) \frac{y}{\alpha} [\exp(k\alpha y) - f_1 \exp(-k\alpha y)] \sin(\omega t - kx) \Big\}, \\
\Phi_2(x, y, t, \xi, \tau) &= A_1 \exp(\xi - a_1\tau) \Big\{ \left[\frac{\alpha c_{44}(1+\chi)}{2e_{15}\text{sh}(kh)} [(\exp(-kh) - \exp(k\alpha h) + \right. \\
& + (\exp(-k\alpha h) - \exp(-kh))f_1) \exp(ky) + (\exp(kh) - \exp(k\alpha h) + \\
& + (\exp(-k\alpha h) - \exp(kh))f_1) \exp(-ky)] + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (\exp(k\alpha y) + f_1 \exp(-k\alpha y)) \Big] \times \\
& \times \cos(\omega t - kx) - \left[\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}\alpha} \left(1 - \frac{v_{sh}}{c_i^2} a_1\right) (\exp(k\alpha y) - f_1 \exp(-k\alpha y)) + \right. \\
& + \frac{\alpha c_{44}(1+\chi)}{2e_{15}\text{sh}(kh)} [(\exp(-kh) - \exp(k\alpha h) + (\exp(-k\alpha h) - \exp(-kh))f_1) \times \\
& \times \exp(ky) - (\exp(kh) - \exp(k\alpha h) + (\exp(-k\alpha h) - \exp(kh))f_1) \exp(-ky)] \Big] \times
\end{aligned}$$

$$\times y \sin(\omega t - kx) \} \quad (2.18)$$

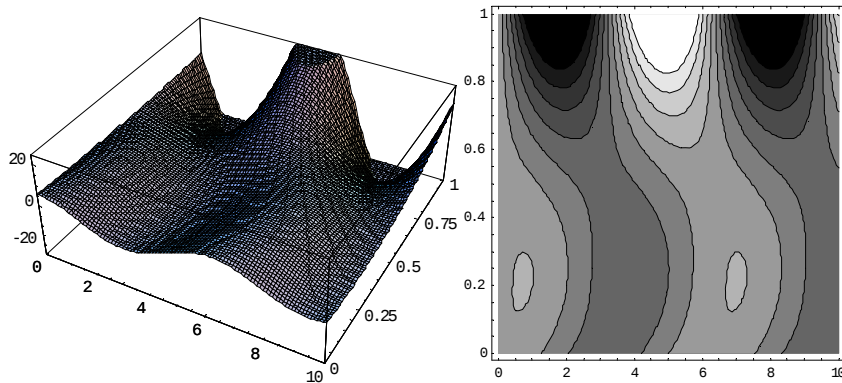
$$\Phi_2^{(a)}(x, y, t, \xi, \tau) = A_1 \exp(\xi - a_1 \tau) \frac{\varepsilon_{11} \alpha c_{44} (1 + \chi)(f_1 - 1)}{e_{15} \varepsilon_0} \left[\cos(\omega t - kx) - \right. \\ \left. - y \sin(\omega t - kx) \right] \exp(ky) \quad \text{и для } y < 0$$

$$\Phi_2^{(a)}(x, y, t, \xi, \tau) = A_1 \exp(\xi - a_1 \tau) \times \\ \times \frac{\varepsilon_{11} \alpha c_{44} (1 + \chi) [\exp(k\alpha h) - f_1 \exp(-k\alpha h)]}{e_{15} \varepsilon_0 \exp(-kh)} \left[\cos(\omega t - kx) + \right. \\ \left. + y \sin(\omega t - kx) \right] \exp(-ky) \quad \text{и для } y > h$$

Из сравнения численных результатов (фиг. 1а и 1б) очевидно, что возникает запаздывающая гармоника электроактивного сдвигового перемещения, отстающая из основного волнового сигнала фазой на $(3/2\pi)$ и неоднородность волны в глубь полупространства, имеет иной характер по сравнению с основным волновым сигналом. Запаздывающая гармоника волны, в отличие от гармонического входного сигнала, имеет максимальную амплитуду как на поверхности $y = h$, так и локальную амплитуду на глубине $y = (\lambda/2\pi\alpha)$ от границы $y = 0$ для каждой волны длиной λ .



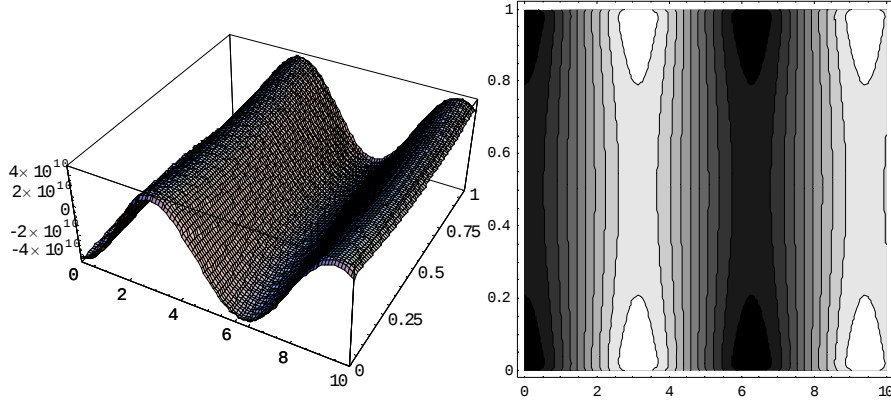
а) перемещение (W_1) в первом приближении



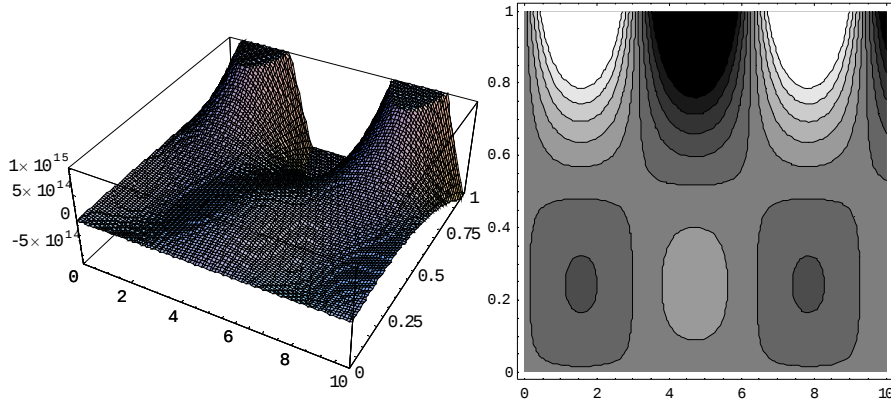
б) перемещение (W_2) во втором приближении

Фиг. 1

Такую же сравнительную картину имеем при сопоставлении численных расчетов для потенциала электрического поля (фиг. 2а и 2б).



а) потенциал электрического поля (Φ_1) в первом приближении



б) потенциал электрического поля (Φ_2) во втором приближении

Фиг. 2

Из (2.13) следует, что в этом случае генерируется также плоско-деформированное волновое состояние.

Во-первых, здесь (фиг.3) возникает акустическое детектирование (нераспространяющаяся волна), обусловленное взаимодействием гармоник электроупругой сдвиговой волны

$$u_{11}(x, y, t, \xi, \tau) = 0,$$

$$v_{11}(x, y, t, \xi, \tau) = R_1^2 B_1 \left[-\exp(2k\alpha y) + f_1^2 \exp(-2k\alpha y) \right],$$

$$\text{где } B_1 = \left[(1/2\alpha) + (\alpha/2) - (c_{1r}^2/\alpha c_l^2) \right], \quad R_1^2 = (2\pi A_1^2/\lambda).$$

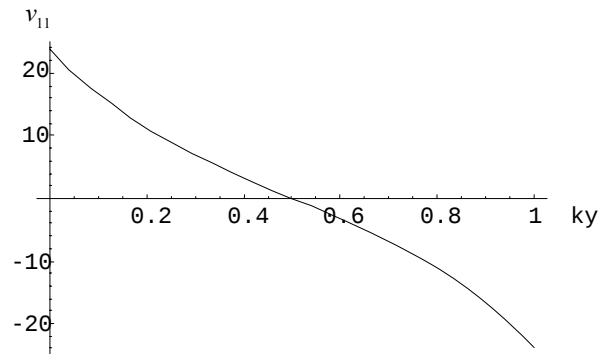
Акустическое детектирование, как и следовало ожидать, по толщине слоя имеет симметричное по отношению к срединной плоскости слоя распределение.

Распространяющееся плоско-деформированное поле (волна Рэлея) определяется из краевой задачи (2.6), (2.9) с учетом (2.13) и (2.18):

$$u_2(x, y, t, \xi, \tau) = \left[C_1 \exp(2kv_1 y) + C_2 \exp(-2kv_1 y) + C_3 \exp(2kv_2 y) + C_4 \exp(-2kv_2 y) + C_5 \left(\exp(2k\alpha y) + f_1^2 \exp(-2k\alpha y) \right) + C_6 \right] \sin(2(\omega t - kx)),$$

$$v_2(x, y, t, \xi, \tau) = [v_1 C_1 \exp(2k v_1 y) - v_1 C_2 \exp(-2k v_1 y) + \frac{C_3}{v_2} \exp(2k v_2 y) - \frac{C_4}{v_2} \exp(-2k v_2 y) + C_5 \alpha (\exp(2k \alpha y) - f_1^2 \exp(-2k \alpha y))] \cos(2(\omega t - kx)),$$

где выражения коэффициентов $C_i(c_{ij}, e_{kij}, \delta_{jk}, A_1, \lambda)$ не приводятся из-за их громоздкости.



Фиг. 3

Неоднородность плоско-деформированного волнового поля по толщине пьезоэлектрического слоя в общем случае может образоваться вследствие взаимодействия основных форм волнового сигнала плоской деформации или первичного волнового сигнала электроактивной антиплоской деформации. В данном случае при отсутствии сигнала плоской деформации, плоско-деформированное волновое поле возникает за счет искажения первичного волнового сигнала электроактивной антиплоской деформации и взаимодействия основных форм этого же волнового сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С., Хачатрян В.М. Особенности учёта геометрической нелинейности при распространении электроупругой волны конечной амплитуды в пьезоэлектрической среде. //Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. № 2. С. 13-23.
2. Аветисян А.С. Поверхностные электроупругие волны конечной амплитуды в пьезоэлектрической среде.//Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т. 48. № 2. С. 27-37.
3. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т. 38. №1. С.12-19.
4. Белакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах.Новосибирск: Наука, 1982.
5. Kalyanasundaram N. Nonlinear surface acoustic waves on an isotropic solid. //Int. J. Eng. Sci., 1981. V. 19. № 1. PP. 279-286.
6. Lardner R.W. Nonlinear surface acoustic waves on an elastic solid of general anisotropy.// J. Elast., 1986. V. 16. № 1. PP. 63-75.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.12.2008