ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա. Մովսիսյան
Պիեզոէլեկտրիկ սալի համար դինամիկական կայունության մի խնդրի մասին

Դիտարկվում է հեկսագոնալ համակարգի երկու տիպի նյութերից սալի համար դինամիկական կայունության խնդիրը, երբ պարբերական շոշափող լարումները ազդում են սալի արտաքին հարթությունների վրա: Որոշվել են սեփական հաճախությունները, ստատիկական կրիտիկական լարումը և գլխավոր ռեզոնանսային տիրույթը:

L.A. Movsisian
About one problem of dynamic stability for piezoelectric plate

Исследуется динамическая устойчивость пластинки из пьезоэлектриков. Тангенциальные периодические напряжения действуют на внешних плоскостях пластинки (моментное начальное состояние) и направлены в противоположные стороны. Рассматриваются два типа пьезоэлектриков гексагональной системы классов $\bar{6}m2$ и $6mm$. Для первого материала электрическое поле индуцируется при продольном движении (плоская задача), в то время как для второго – при изгибе. Благодаря моментности начального состояния, уравнения возмущенного состояния получаются связанными.

1. Имеется прямоугольная пластинка, на внешних плоскостях которой в направлении одних из сторон действуют тангенциальные периодические напряжения (S), направленные в противоположные стороны. Принимается, что внешние стороны пластинки покрыты металлическим слоем. Изучаются два пьезоэлектрика класса $\bar{6}m2$ (число коэффициентов 5–1–2) и $6mm$ (5–3–2) [1].

Уравнения возмущенного движения пластинки в классической постановке будут [2]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial y}-Sh\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
\frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}-Sh\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial M_2}{\partial y^2}-Sh\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Считается, что тангенциальные напряжения $S=S_0+S_1\cos\theta t$ направлены по оси x.

В рамках принятой модели определяющие уравнения выглядят следующим образом [1]:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x=B_{11}e_x+B_{12}e_y-eE_1, \quad D_1=-ee_x+ee_y+\varepsilon_1E_1\\
&\sigma_y=B_{12}e_x+B_{11}e_y+eE_1, \quad D_2=ee_{xy}+\varepsilon_1E_2\\
&\sigma_{xy}=0{,}5(B_{11}-B_{12})e_{xy}+eE_2, \quad D_3=\varepsilon_2E_3
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

для первого материала и

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x=B_{11}e_x+B_{12}e_y-e_1E_3, \quad D_1=\varepsilon_1E_1\\
&\sigma_y=B_{12}e_x+B_{11}e_y-e_1E_3, \quad D_2=\varepsilon_1E_2
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

$$\sigma_{xy} = 0{,}5(B_{11} - B_{12})e_{xy}, \qquad D_3 = -e_1(e_x + e_y) + \varepsilon_2 E_3$$

К системе (1.1) должны быть присоединены уравнения напряженности электрического поля и электрической индукции

$$\operatorname{rot}\overline{E} = 0, \quad \operatorname{div}\overline{D} = 0 \tag{1.4}$$

По (1.2) и (1.3), вычисляя усилия и моменты, далее выражая их через перемещения, будем иметь следующую систему уравнений в перемещениях:

$$\begin{gathered}
C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y} + \\
+\delta\frac{2}{3}he\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) - Sh\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2} + C_{11}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2} - \\
-\delta\frac{4}{3}he\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - Sh\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \rho h\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \\
D_{11}\Delta^2 w + \gamma\frac{2}{3}e_1 h\Delta F + Sh\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y}\right) + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{gathered} \tag{1.5}$$

А уравнения (1.4) дают

$$\frac{2}{3}h\varepsilon_1\Delta F - \frac{8}{h}\varepsilon_2 F + \delta he\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y}\right) - \gamma h\left(e_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{1.6}$$

При получении (1.5) и (1.6) для электрического потенциала принято

$$\Phi = F(x, y, t)\left(1 - \frac{4}{h^2}z^2\right) \tag{1.7}$$

В системах (1.5) и (1.6) для первого материала следует положить

$\delta = 1$ и $\gamma = 0$, а для второго $-\ \delta = 0$, $\gamma = 1$ $\left(C_{ij} = B_{ij}h,\ D_{11} = \dfrac{h^3}{12}B_{11}\right)$

2. Пусть края пластинки шарнирно закреплены и покрыты металлическим слоем:

$$\begin{aligned}
&w = M_1 = u = T_{12} = F = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = a \\
&w = M_2 = u = T_2 = F = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ y = b
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Условием (2.1) удовлетворим, если возьмем

$$\begin{aligned}
&u = f_1 \sin\lambda x \sin\mu y, \qquad w = f_3 \sin\lambda x \sin\mu y \\
&\mathrm{v} = f_2 \cos\lambda x \cos\mu y, \qquad F = f_4 \sin\lambda x \sin\mu y
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

Подставляя (2.2) в (1.5) и (1.6), исключая f_4, для остальных f_i получим

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + A_{ij}(t) f_i = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

Для определения главных областей параметрических колебаний решение (2.3) будем искать в виде [3]

$$f_i = C_i^{(1)}\cos\frac{\theta}{2}t + C_i^{(2)}\sin\frac{\theta}{2}t \tag{2.4}$$

з условия нетривиальности решения (2.3) получим выражения для главных областей неустойчивости

$$\det\|a_{ij}\| = 0$$

$$a_{11} = \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\rho}\left[B_{11}\lambda^2 + \frac{1}{2}(B_{11} - B_{12})\mu^2 - \delta\frac{2}{3}e^2\frac{\left(\lambda^2-\mu^2\right)^2}{\Delta_1}\right]$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2}(B_{11} + B_{12})\lambda\mu + \delta\frac{4}{3}e^2\frac{\lambda\mu\left(\lambda^2-\mu^2\right)^2}{\Delta_1}\right]$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{S_0}{\rho}(1\pm\chi)\lambda^2,\ a_{23} = a_{32} = -\frac{S_0}{\rho}(1\pm\chi)\lambda\mu$$

$$a_{22} = \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\rho}\left[B_{11}\mu^2 + \frac{1}{2}(B_{11} - B_{12})\lambda^2 - \delta\frac{8}{3}e^2\frac{\lambda^2\mu^2}{\Delta_1}\right] \tag{2.5}$$

$$a_{33} = \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\left[\gamma\frac{2}{3}e_1\frac{e_1\lambda^2 + e_2\mu^2}{\Delta_1} - \frac{h^2}{12}B_{11}(\lambda^2+\mu^2)\right](\lambda^2+\mu^2)$$

$$\Delta_1 = \frac{8}{h^2}\varepsilon_2 + \frac{2}{3}\varepsilon_1(\lambda^2+\mu^2), \qquad \chi = \frac{1}{2}\frac{S_1}{S_0}$$

Из (2.5), в частности, получаются статическое критическое напряжение $\left(S_1 = \theta = 0\right)$ и частоты свободных колебаний $\left(S_1 = 0,\ \frac{\theta}{2} = \omega\right)$.

Нет смысла представить (2.5) в развернутом виде, так как из-за громоздкости формул невозможно будет сделать качественных выводов, поэтому приведем формулы для одномерного случая.

3. В случае цилиндрического изгиба $(b \to \infty)$ условие (2.3) превращается

$$\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) \pm \left[\frac{1}{4}\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)^2 + \frac{S_0^2}{\rho^2}(1\pm\chi)^2\lambda^4\right]^{1/2} \tag{3.1}$$

Здесь собственные частоты определяются

$$\omega_1^2 = \frac{B_{11}}{\rho}\lambda^2\left(1 - \delta E^{(1)}\xi^2\right),\ \omega_2^2 = \frac{B_{11}}{\rho}\lambda^2\xi^2\left(1 - \gamma E^{(1)}\right)$$

$$E^{(1)} = \frac{e^2}{B_{11}\varepsilon_2\Delta_2},\ E^{(2)} = \frac{e_1^2}{B_{11}\varepsilon_2\Delta_2},\ \Delta_2 = 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\xi^2, \quad \xi^2 = \frac{h^2\lambda^2}{12} \tag{3.2}$$

Как видно из (3.1) и (3.2), свободные частоты благодаря пьезоэффекту уменьшаются, и вследствие сдвигающихся напряжений продольная частота увеличивается, а поперечная – уменьшается. Из (3.2) также видно, что по χ получаются узкие области динамической неустойчивости.

Из (3.1) можно получить и выражение статического критического напряжения

$$S_0^{\text{кр}} = B_{11}\xi\left[\left(1 - \delta E^{(1)}\xi^2\right)\left(1 - \gamma E^{(2)}\right)\right]^{1/2} \tag{3.3}$$

т.е. присутствие пьезоэффекта уменьшает также критическое напряжение.

Из (3.3), в частности, получается результат [4] (при $\delta = \gamma = 0$).

4. Так как рассмотренные материалы ортотропные, то имеет смысл

изучение этих же задач в постановке, учитывающих поперечные сдвиги [5].

Приведем приближенные выражения интересующих нас величин (изгибная частота, статическое критическое напряжение и области главной динамической неустойчивости) для второго материала при одномерном случае

$$\begin{aligned} \sigma_x &= B_{11}e_x - e_1E_3, \qquad D_1 = e_3e_{xz} + \varepsilon_1E_1 \\ \sigma_{xz} &= B_{44}e_{xz} - e_3E_1, \qquad D_3 = -e_1e_x + \varepsilon_2E_3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Вот эти формулы

$$\omega^2 = \frac{12B_{11}}{\rho h^2}\xi^4\left(X_1 - X_2\xi^2\right) \tag{4.2}$$

$$S_0^{\text{кр}} = B_{11}\xi\left[\left(X_1 - X_2\xi^2\right)/\left(1 - X_3\xi^2\right)\right]^{1/2} \tag{4.3}$$

$$\frac{\theta}{2} = \omega\left[1 - \frac{S_0^2(1\pm\chi)^2}{\left(S_0^{\text{кр}}\right)^2}\right]^{1/2} \tag{4.4}$$

Здесь

$$X_1 = 1 - \frac{e_1^2}{B_{11}\varepsilon_2}, \quad X_3 = 2\frac{B_{11}}{B_{44}}X_1$$

$$X_2 = \frac{B_{11}}{B_{44}}\left(1 - \frac{2e_1^2}{B_{11}\varepsilon_2} - \frac{e_3^4 - e_1^4}{B_{11}^2\varepsilon_2^2}\right) + \frac{e_3^2(e_3^2 - e_1^2)}{B_{11}B_{44}\varepsilon_2^2} - \frac{e_1^2\varepsilon_1}{B_{44}\varepsilon_2^2}$$

Последние формулы выведены с точностью по ξ^2. В таком же приближении главная область динамической неустойчивости из (3.1) получится по виду (4.4), где уже отсутствуют X_2 и X_3.

Как известно [5], учет сдвигов, как правило, уменьшает значение собственных частот, однако, как видно, из (4.1) при наличии пьезоэффекта возможен случай $(x_2 < 0)$, когда частоты могут увеличиваться.

В то же время, как видно из приведенных формул, учет сдвигов приводит к сужению $(x_3 > 0)$ области параметрических колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. – М.: Наука, 1982. 424с.
2. Мовсисян Л.А., Пештмалджян Д.В. Об уравнениях устойчивости и колебаний анизотропных пластин. – Изв. АН Арм ССР, Механика, 1973, т.26, №6, с.18-29.
3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. 600с.
4. Flemming J.F., Herrman G., Mooney I. Bucling of structural Element Subject to Surface shear. – J. of Appl. Mech., 1965, vol. 32, 1.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. 360с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 27.05.1996