ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 62.50:531.8

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ПО ЗАДАННОМУ ФАЗОВОМУ МНОГООБРАЗИЮ

Гукасян А.А., Багдасарян А.В.

Ա.Ա. Ղուկասյան, Ա.Վ. Բաղդասարյան
Տրված ֆազային բազմաձևությամբ համակարգի շարժման կայունության մասին

Ուսումնասիրվում է տրված ֆազային ծավալով ղեկավարվող համակարգի օպտիմալ շարժման ասիմպտոտիկ կայունությունը: Եռօղակ էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի համար ստացված են տրված ծրագրով շարժման ասիմպտոտիկ կայունությունն ապահովող ղեկավարող ուժերը.

A.A. Ghukasyan, A.V. Baghdasaryan
On stability of the movement of directed system by the given phaze variety

Исследуются вопросы асимптотической устойчивости оптимального движения управляемой системы по заданному фазовому многообразию относительно возмущений начальных условий. Для трехзвенного элекромеханического манипулятора определены оптимально управляющие силы (входные напряжения приводов), которые обеспечивают асимптотическую устойчивость движения схвата по цилиндрической поверхности.

1. Пусть уравнение движения управляемой системы описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{y} = Y(y,c,Q),\ \ y(t_0) = y_0,\ \ Q \in \{Q\} \tag{1.1}$$

где $y - 2n$-мерный вектор фазовых координат управляемой системы; $Q - n$-мерный вектор управления; c– постоянные параметры системы; $Y(y,c,Q)$ – непрерывная, ограниченная функция, имеющая частные производные по $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ в области определения уравнения (1.1), и $\Phi_k(y(t_0),t_0) = 0,\ (k = 1,2,\ldots,r)$.

Ставится следующая задача: определить управляющие усилия системы Q так, чтобы движение $y = y(t)$ системы проходило по заданному фазовому многообразию $\Phi_k(y,t) = 0\ \ (k = 1,2,\ldots,r)$ и было устойчивым по отношению к начальным возмущениям фазовых координат [1-3].

Программа движения системы (1.1) задана в виде уравнений

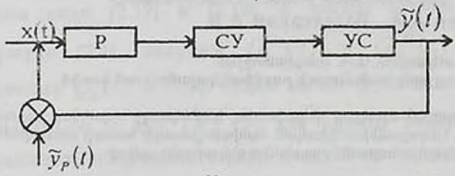
$$\Phi_k(y,t) = 0,\ \ k = 1,2,\ldots,r \le 2n;\quad t \in [t_0,T] \tag{1.2}$$

где Φ_k – непрерывные функции своих аргументов, имеющие непрерывные частные производные.

Пусть при $\Phi_k(y(t_0),t_0) = 0$, $y_p = y_p(t)$ – невозмущенное движение системы (1.1), а $Q_p = Q_p(y,t)$ – закон изменения управляющей функции. Здесь необходимо предполагать, что при $Q_p = Q_p(y,t)$, $y_p = y_p(t)$ удовлетворяет условию $\Phi_k(y_p(t),t) = 0,\ (k = 1,2,\ldots,r)$. Однако на практике, в силу действия различных помех и неточностей, реализация начального условия $\Phi_k(y(t_0),t_0) = 0,\ (k = 1,2,\ldots,r)$ не удается. Следовательно, в реальном случае в системе (1.1) при $Q_p = Q_p(y,t)$ будет осуществляться некоторое другое движение $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$, которое в общем случае не совпадает с заданным программным движением $y_p(t)$

$(\tilde{y}(t) - y_p(t) = x(t) \neq 0)$ и $\Phi_k(y(t),t) \neq 0$ $(k = 1,2,\ldots,r)$. Возникает необходимость иметь регулятор, подключенный к входу системы управления (фиг.1), который по принципу обратной связи вырабатывает дополнительно к $Q_p(y,t)$ управляющее усилие, не только как функцию времени, но и как функцию от возмущений $x(t)$, то есть управление в рассматриваемом случае имеет вид

$$\tilde{Q} = Q_p(y,t) + Q(x,t) \tag{1.3}$$



Р – регулятор; СУ – система управления;
УС – управляемая система
⊗ – измерительное устройство

Фиг.1

Слагаемое $Q(x,t)$ определяется из условия устойчивости программного движения $y_p = y_p(t)$ на многообразии (1.2). Наряду с критерием устойчивости программного движения можно ставить также критерий оптимальности переходного процесса $J = J[x,Q] \to \min$.

Разность значений функций $\Phi_k(y,t)$ $(k = 1,2,\ldots,r)$ в программном движении $y_p(t)$ и в действительном движении $\tilde{y}(t)$

$$x_k^* = \Phi_k(\tilde{y},t) - \Phi_k(y_p,t) \quad (k = 1,2,\ldots,r)$$

назовем возмущениями по заданному многообразию (программе), а вектор $x^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*)$ – вектором возмущений. Возмущение x^* зависит от x и обращается в нуль при $x = 0$ $(x^*(0) \equiv 0)$.

Уравнение возмущенного движения по многообразии имеет вид

$$\dot{x}_k^* = X_k(x,Q,c,t) \quad (k = 1,2,\ldots,r) \tag{1.4}$$

где

$$X_k(x,Q,c,t) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \tilde{y}_i} Y_i(x + y_p, Q_p + Q, c) + \frac{\partial \Phi_k(x + y_p, t)}{\partial t} -$$

$$- \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_{pi}} Y_i(y_p, Q_p, c) - \frac{\partial \Phi_k(y_p, t)}{\partial t}$$

$$X_k(0,0,c,t) \equiv 0; \quad t \in [t_0, T]$$

Уравнения (1.4) допускают тривиальное решение $x^* = 0$, соответствующее невозмущенному движению $y_p = y_p(t)$. Начальное условие системы (1.4) имеет вид

$$x_k^{*0} = \Phi_k(\tilde{y}(t_0), t_0) \qquad (k = 1,2,\ldots,r) \tag{1.5}$$

Таким образом, исследование устойчивости движения управляемой системы по заданной программе сводится к изучению поведения решений возмущенных дифференциальных уравнений (1.4) с начальными условиями (1.5) при $t \geq t_0$. Приведем определение устойчивости в смысле Ляпунова [4,5].

1. Если для всякого произвольно заданного положительного числа ε, как бы оно ни было мало, существует такое число δ, что при всех начальных возмущениях (при $t = t_0$), удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{r}[x_k^*(t_0)]^2 \le \delta$$

и при всех $t \ge t_0$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{r}[x_k^*(t)]^2 < \varepsilon$$

то невозмущенное движение системы $y_p = y_p(t)$ устойчиво по отношению к программе $\Phi_k(y,t) = 0$; в противном случае невозмущенное движение $y_p = y_p(t)$ неустойчиво.

2. Если невозмущенное движение $y_p = y_p(t)$ устойчиво и

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{r}[x_k^*(t)]^2 = 0;$$

то устойчивость по отношению к программе $\Phi_k(y,t)\ \ (k = 1,2,\ldots,r)$ является асимптотической.

В работе для управляемых систем предлагается процедура определения управляющих (обобщенных) сил, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость программного движения $y_p = y_p(t)$ по заданному фазовому многообразию (1.2) и минимизируют при этом критерий качества, который зависит от переходного процесса. Суть алгоритма следующая. Требуется, чтобы регулятор обеспечивал возмущенное движение (1.4) управляемой системы (1.1), по закону

$$\dot{x}_k^* + \gamma_k x_k^* = 0, \text{ где } \mathrm{Re}\,\gamma_k > 0 \quad (k = 1,2,\ldots,r) \tag{1.6}$$

и минимизировал критерий качества, типа

$$J = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i Q_i^2 \to \min \tag{1.7}$$

Физический смысл (1.7) может быть истолкован как энергетические затраты регулятора.

(1.6) в силу (1.4) можно представить в виде

$$X_k(x,Q,c,t) + \gamma_k\Phi_k^*(x,t) = 0 \tag{1.8}$$

где $\Phi_k(x,t) = \Phi_k(\tilde{y},t) - \Phi_k(y_p,t) \quad (k = 1,2,\ldots,r)$

В общем случае (1.8) является системой алгебраических уравнений относительно $Q_k(x,t)$. А в целом, поставленная задача сводится к задаче условного экстремума (1.7) при (1.6), которую далее можно исследовать методом неопределенных множителей Лагранжа. Отметим, что управляющие силы, обеспечивающие асимптотическую устойчивость переходного процесса, исследованы также в работе [3].

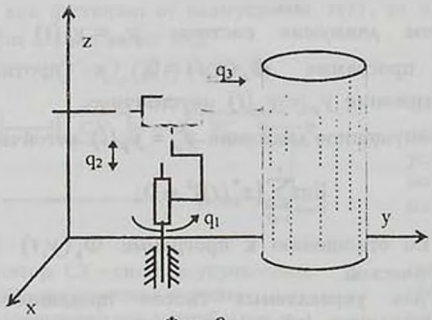
2. Рассмотрим устойчивость программного движения схвата трехзвенного электромеханического манипулятора по цилиндрической поверхности с постоянной скоростью.

Уравнение движения рассматриваемого манипулятора (фиг.2) имеет вид [6]:

$$\ddot{q}_1 = f_1(\dot{q}_1,\dot{q}_2,q_3) + b_{11}Q_1, \quad \ddot{q}_2 = f_2(\dot{q}_2) + b_{22}Q_2$$
$$\ddot{q}_3 = f_3(\dot{q}_1,\dot{q}_3,q_3) + b_{33}Q_3) \tag{2.1}$$
$$L_i\dot{I}_i + R_iI_i + k_in_i\dot{q}_i = u_i,\ Q_i = k_iI_i,\ (i = 1,2,3)$$

Программу движения схвата манипулятора в системе координат (q_1,q_2,q_3) представим в виде

$$\Phi_1 = Aq_3^2\cos^2 q_1 + 2Bq_3^2\cos q_1\sin q_1 + Cq_3^2\sin^2 q_1 +$$
$$+2Dq_3\cos q_1 + 2Eq_3\sin q + F$$
$$\Phi_2 = q_2 - \alpha(t), \quad \Phi_3 = \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_1 q_3^2 - v_0^2 \qquad (2.2)$$



Фиг. 2

Пусть при выполнении начальных условий

$$\Phi_k(q(t_0),\dot{q}(t_0),t_0) = 0 \quad (k = 1,2,3) \qquad (2.3)$$

управляющие усилия $Q_j^p = Q_j^p(q,t)$ (или управляющие напряжения $u_j^p = u_j^p(q,t)$) обеспечивают движения схвата по программе (2.2). Обозначая через $q_j^p = q_j^p(t)$ решение уравнений (2.1) при $Q_j^p = Q_j^p(q,t)$, выполнение программы (2.2) будет

$$\Phi_k(q^p(t),\dot{q}^p(t),t) = 0 \quad (k = 1,2,3) \qquad (2.4)$$

Предположим, что в силу разных причин начальное условие (2.3) не выполняется. Следовательно, движение схвата манипулятора будет осуществляться по некоторому закону $\tilde{q} = \tilde{q}(t)$, который в общем случае не совпадает с $q^p = q^p(t)$, то есть $\tilde{q}(t) - q^p(t) = x(t) \neq 0$ и $\Phi_k(\tilde{q}(t),\dot{\tilde{q}}(t),t) \neq 0 \quad (k = 1,2,3)$.

Управление манипулятором ищем в виде (1.3)

$$\tilde{Q} = Q^p(q,t) + Q(x,t) \qquad (2.5)$$

где дополнительное слагаемое $Q = Q(x,t)$ определим из условий асимптотической устойчивости программного движения $q^p = q^p(t)$ на многообразии (на программе) (2.2), а также из условий минимума квадратичной формы

$$J = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i Q_i^2 \quad (\alpha_i = \text{const} > 0) \qquad (2.6)$$

Уравнение возмущенного движения манипулятора имеет вид

$$\ddot{x}_i = f_i(x,\dot{x}) + b_{ii}Q \qquad (i = 1,2,3) \qquad (2.7)$$

где

$$f_1(x,\dot{x}) = -m_3[2q_3^p\dot{q}_1^p x_3 + \ddot{q}_1^p x_3^2 + 2q_3^p\dot{q}_3^p x_1 + 2q_3^p\dot{x}_1\dot{x}_3 +$$
$$+2q_3^p\dot{q}_1^p x_3 + \dot{q}_1^p\dot{q}_3^p x_3 + \dot{q}_1^p x_3\dot{x}_3 + 2\dot{q}_3^p\dot{x}_1 x_3 + 2x_3\dot{x}_1\dot{x}_3 +$$
$$+b_1\dot{x}_1]/[J + m_3(q_3^p)^2 + 2m_3\dot{q}_3^p x_3 + m_3 x_3^2];$$

$$f_2(x,\dot{x}) = -\frac{b_2 x_2}{m_2 + m_3};$$

$$f_3(x,\dot{x}) = \frac{2q_1^p \dot{q}_1^p \dot{x}_1 + q_1^p \dot{x}_1^2 + (\dot{q}_1^p)^2 x_1 + 2\dot{q}_1^p \dot{x}_1 x_3 + \dot{x}_1^2 x_3 + b_3 \dot{x}_3}{m_3}$$

$$b_{11} = \frac{n_1}{J + m_3(q_3^p)^2 + 2m_3 q_3^p x_3 + m_3 x_3^2};\ b_{22} = \frac{n_2}{m_2 + m_3};$$

$$b_{33} = \frac{n_3}{m_3}$$

Возмущения относительно программы (2.2) обозначим через $x_k^*\ (k = 1,2,3)$

$$\begin{aligned} x_1^* &= \Phi_1(q^p + x) - \Phi_1(q^p) = \Phi_1^*(x) \\ x_2^* &= \Phi_2(q^p + x, t) - \Phi_2(q^p, t) = \Phi_2^*(x,t) \\ x_3^* &= \Phi_3(q^p + x, \dot{q}^p + \dot{x}) - \Phi_3(q^p, \dot{q}^p) = \Phi_3^*(x,\dot{x}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Производные от (2.8) по времени в силу уравнений (2.7) являются

$$\dot{x}_1^* = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i}\dot{x}_i;\ \dot{x}_2^* = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial t};$$

$$\ddot{x}_1^* = \sum_{i=1}^{3}[\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i}(f_i(x,\dot{x}) + b_{ii}Q_i) + \frac{d}{dt}(\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i})\dot{x}_i];$$

$$\ddot{x}_2^* = \sum_{i=1}^{3}[\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_i}(f_i(x,\dot{x}) + b_{ii}Q_i)] + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial x_i \partial x_j}\dot{x}_i\dot{x}_j + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial x_i \partial t}\dot{x}_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial t \partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial t^2};$$

$$\ddot{x}_3^* = \sum_{i=1}^{3}[\frac{\partial \Phi_3^*}{\partial \dot{x}_i}f_i(x,\dot{x}) + b_{ii}Q_i) + \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial x_i}\dot{x}_i] \tag{2.9}$$

Найдем такие управляющие силы $Q_i(x,t)\ \ (i = 1,2,3)$, которые по каждому возмущению $x_i^*\ (i = 1,2,3)$ (2.8) обеспечивают переходный процесс в соответствии с дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1^* + \gamma_{11}\dot{x}_1^* + \gamma_{10}x_1^* &= 0 \\ \ddot{x}_2^* + \gamma_{22}\dot{x}_2^* + \gamma_{20}x_2^* &= 0 \\ \dot{x}_3^* + \gamma_{30}x_3^* &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Если постоянные коэффициенты уравнений (2.10) определить из условий

$$\gamma_{30} > 0,\ \gamma_{22}^2 \geq 4\gamma_{20},\ \gamma_{11}^2 \geq 4\gamma_{10},\ \gamma_{11} > 0,\ \gamma_{22} > 0,\ \gamma_{10} > 0,\ \gamma_{20} > 0 \tag{2.11}$$

то управляющие силы, удовлетворяющие условию (2.10), будут обеспечивать асимптотическую устойчивость переходного процесса.

Уравнения (2.10) в силу (2.9) представляют собой три линейных алгебраических уравнения относительно искомых сил $Q_i\ \ (i = 1,2,3)$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \Phi_j^*}{\partial x_i}b_{ii}Q_i = b_j \quad (j = 1,2);\quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \Phi_3^*}{\partial \dot{x}_i}b_{ii}Q_i = b_3 \tag{2.12}$$

где $b_1 = -\sum_{i=1}^{3}[\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i}f_i(x,\dot{x}) + \frac{d}{dt}(\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i})\dot{x}_i + \gamma_{11}\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i}\dot{x}_i] - \gamma_{10}\Phi_1^*(x);$

$$b_2 = -\sum_{i=1}^{3}[\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial x_i} f_i(x,\dot{x}) + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial x_i \partial x_j}\dot{x}_i\dot{x}_j + \frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial x_i \partial t}\dot{x}_i - \frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial t \partial x_i}\dot{x}_i] - \frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial t^2} -$$

$$-\gamma_{22}[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial\Phi_2^*}{\partial t}] - \gamma_{20}\Phi_2^*(x,t)$$

$$b_3 = -\sum_{i=1}^{3}[\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial \dot{x}_i} f_i(x,\dot{x}) + \frac{\partial\Phi_3^*}{\partial x_i}\dot{x}_i] - \gamma_{30}\Phi_3^*(x,\dot{x})$$

Управляющие силы Q_i $(i = 1,2,3)$ определим также из условий минимума квадратической формы (2.6) при (2.12). Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа, поставленная задача сводится к определению минимума расширенного функционала

$$\bar{J} = J + \lambda_1[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial x_i} b_{ii}Q_i - b_1] + \lambda_2[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial x_i} b_{ii}Q_i - b_2] +$$

$$+\lambda_3[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial \dot{x}_i} b_{ii}Q_i - b_3] \qquad (2.13)$$

где λ_i $(i = 1,2,3)$ –неопределенные множители Лагранжа.

Применяя обычную процедуру минимизации, будем иметь

$$Q_j = -\frac{b_{jj}}{2\alpha_j}[\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\frac{\partial\Phi_i^*}{\partial x_j} + \lambda_3\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial \dot{x}_j}] \quad (j = 1,2,3) \qquad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в (2.12), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно λ_j $(j = 1,2,3)$

$$c_{i1}\lambda_1 + c_{i2}\lambda_2 + c_{i3}\lambda_3 = -b_i \quad (i = 1,2,3) \qquad (2.15)$$

где

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}\frac{b_{ss}^2}{\alpha_s}\frac{\partial\Phi_i^*}{\partial x_s}\frac{\partial\Phi_j^*}{\partial \bar{x}_s}; \quad c_{3j} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}\frac{b_{ss}^2}{\alpha_s}\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial \dot{x}_s}\frac{\partial\Phi_j^*}{\partial \bar{x}_s} \quad (j = 1,2,3;\ i = 1,2)$$

(в принятых обозначениях необходимо иметь в виду, что при $j = 3$ $\bar{x}_s = \dot{x}_s$ $(s = 1,2,3)$).

Из (2.15) имеем $\lambda_i = \Delta_j/\Delta$ $(\Delta \neq 0)$, где Δ и Δ_j $(j = 1,2,3)$ – главные и вспомогательные определители системы (2.15).

Подставляя значение λ_j в (2.14), окончательно получим

$$Q_j = -\frac{b_{jj}}{2\alpha_j\Delta}[\sum_{i=1}^{2}\Delta_i\frac{\partial\Phi_i^*}{\partial x_j} + \Delta_3\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial \dot{x}_j}] \quad (j = 1,2,3) \qquad (2.16)$$

Из возмущенного уравнения баланса напряжений электромеханических приводов [7]

$$u_i = \frac{1}{k}(L_i\dot{Q}_i + R_iQ_i + k_i^2 n_i\dot{x}_i) \quad (i = 1,2,3) \qquad (2.17)$$

можно определить дополнительные управляющие напряжения $u_i = u_i(x,\dot{x})$ $(i = 1,2,3)$, обеспечивающие движение схвата манипулятора по вышеуказанным свойствам. Из (2.16) и (2.17) получим $(i = 1,2,3)$

$$u_i = \frac{L_i}{k_i}\frac{d}{dt}\{-\frac{b_{ii}}{2\alpha_i\Delta}[\sum_{j=1}^{2}\Delta_j\frac{\partial\Phi_j^*}{\partial x_i} + \Delta_3\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial \dot{x}_i}]\} -$$

$$-\frac{R_i b_{ii}}{2k_i\alpha_i\Delta}\left[\sum_{j=1}^{2}\Delta_j\frac{\partial\Phi_j^{''}}{\partial x_i}+\Delta_3\frac{\partial\Phi_3^{*}}{\partial x_i}\right]+k_i n_i\dot{x}_i \qquad (2.18)$$

Для практической реализации имеет смысл в безразмерных переменных рассматривать случай, когда $L_i \ll R_i$ [7]. Это предположение выполняется практически для всех типов современных промышленных манипуляционных роботов и позволяет упростить систему управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. – М.: Наука, 1981.
2. Мухарлямов Р.Г. О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию. – Дифференциальные уравнения. 1969, №4.
3. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные и нелинейные модели. – М.: Наука, 1988.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
5. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966.
6. Гукасян А.А, Барсегян В.Р. Обратная задача динамики электромеханического манипулятора. – Изв. НАН РА, Механика, 1994, №5-6.
7. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями промышленных роботов. – Изв. АН СССР, МТТ, 1986, №4.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 11.04.1997