

УДК 531.36

ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА В ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ K_{Δ}^{ω} -
УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ $\ddot{x} + \varphi(t)x = 0$ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ
Аванян М. В.

Ключевые слова: K_{Δ}^{ω} -устойчивость, эрмитова форма, колебательная система, функция Ляпунова, жорданова нормальная форма матрицы, эрмитова норма матрицы.

Keywords: K_{Δ}^{ω} -stability, Hermitian form, oscillatory system, Lyapunov's function, Jordanian normal form of the matrix, Hermitian normal form of the matrix.

Մ. Վ. Ավանյան

Լյապունովի ֆունկցիան K_{Δ}^{ω} -կայունության խնդրի դրվածքում $\ddot{x} + \varphi(t)x = 0$ դիֆերենցիալ
հավասարման համար

Դիտարկվում է մի որոշ տեսքի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարում, որով նկարագրվում են մեխանիկական համակարգերի պարամետրական տատանումները: Ժամանակի տրված միջակայքում նախապես տրված $\omega(t) > 0$ ֆունկցիայով այդ հավասարման համար կառուցվում է Լյապունովի ֆունկցիա, որի միջոցով հետազոտվում է նրա տրիվյալ լուծման K_{Δ}^{ω} -կայունությունը:

M. V. Avanyan

The Lyapunov's function in the setting of the K_{Δ}^{ω} -stability for the $\ddot{x} + \varphi(t)x = 0$ differential equations

There is considered the second order differential equation of definite type, by which are described parametric oscillations of the mechanical systems. By the function $\omega(t) > 0$, that is given in the given interval of time,

there is constructed the Lyapunov's function and there is considered the K_{Δ}^{ω} -stability of it's trivial solution.

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка одного типа, которыми описываются параметрические колебания механических систем. Для этого уравнения строится функция Ляпунова на данном интервале времени при наперед заданной функции $\omega(t) > 0$, с помощью которой исследуется K_{Δ}^{ω} -устойчивость тривиального решения этой системы.

Приведем определение K_{Δ}^{ω} -устойчивости. В [1] вводится K_{Δ}^{ω} -класс $n \times n$ -матриц $G(t) = (G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t))$ над полем комплексных чисел, удовлетворяющих на интервале $\Delta = [t_0, \infty)$ следующим условиям: а) $|\det G(t)| \neq 0$, б) эрмитова норма столбцов $G_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) матрицы $G(t)$ совпадает с наперед заданной положительной функцией

$$\omega(t): \|G_j(t)\| = \sqrt{(G_j(t), G_j(t))} = \omega(t).$$

Затем приводятся следующие определения.

Определение 1. Если в заданном классе K_{Δ}^{ω} существует такая матрица $G(t)$,

что при достаточно малом числе $\rho > 0$ любое возмущение $x(t)$ процесса, начальное значение $x(t_0) = x_0$ которого удовлетворяет условию $(G^{-1}(t_0)x_0, G^{-1}(t_0)x_0) \leq \rho^2$, при всех $t \geq t_0$ удовлетворяет условию $(G^{-1}(t)x(t), G^{-1}(t)x(t)) \leq \rho^2$, то невозмущенный процесс K_Δ^ω устойчив на $[t_0, \infty)$. В противном случае процесс неустойчивый.

Определение 2. Невозмущенный процесс называется асимптотически K_Δ^ω -устойчивым при $t \rightarrow +\infty$ (или на $[a, +\infty)$), если: а) K_Δ^ω устойчив на $[a, +\infty)$; б) для любого $t_0 \in [a, +\infty)$ существует такое число $\rho = \rho(t_0)$, что все возмущения $x(t)$ процесса, удовлетворяющие условию $(G^{-1}(t_0)x_0, G^{-1}(t_0)x_0) \leq \rho^2$, обладают свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.

Легко доказывается, что при $\omega(t) \geq 1$ на $[t_0, \infty)$ из K_Δ^1 -устойчивости на $[t_0, \infty)$ всегда следует K_Δ^ω -устойчивость.

Из определения 1 следует, что начальные и последующие области предельных отклонений для возмущений $x(t)$ определяются с помощью положительно определенной эрмитовой формы [2]:

$$V(t, x) = x^* B(t) x$$

$$\left(B(t) = G^{-1*}(t) G^{-1}(t), G(t) \in K_\Delta^\omega, \sqrt{n^{-1} S p B^{-1}(t)} = \omega(t) t \in [t_0, \infty) \right) \quad (1)$$

Пусть возмущенный процесс описывается следующим дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + \varphi(t) x = 0, \quad \varphi(t) \in C^1 \{t \in [t_0, \infty)\} \quad (2)$$

Известно, что существуют такие колебательные системы, в которых внешнее воздействие сводится к изменению ее параметров со временем и тогда уравнение движений таких систем представляется в виде (2).

Примем $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, тогда уравнение (2) будет эквивалентно следующей неавтономной системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\varphi(t) x_1 \quad (3)$$

Система (3) в матричной форме имеет вид:

$$\dot{x} = P(t) x, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varphi(t) & 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Возможны следующие случаи:

1. $\varphi(t) \equiv 1$ на $[t_0, \infty)$, тогда уравнение (2) имеет вид $\ddot{x} + x = 0$, общим решением которого является

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t = a \cos(t + \alpha) \quad \left(a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -c_2 / c_1 \right) \quad (5)$$

Из (5) следует, что тривиальное решение уравнения (2) K_Δ^ω устойчиво на

$[t_0, \infty)$ (неасимптотически) [3].

Построим функцию Ляпунова. Она определяется по формуле [4]

$$V(x_1, x_2) = \frac{\omega^2}{\alpha^2} (B_1 x, x), \quad B_1 = S^{-1} * S^{-1} \quad (B_1^{-1} = SS^*)$$

где матрица S удовлетворяет условию $S^{-1}PS = J(P)$, ($J(P)$ – жорданова нормальная форма матрицы P) и имеем:

$$S = \begin{pmatrix} 1+2i & -1-3i \\ -2+i & -3+i \end{pmatrix} \quad S^{-1} = (-0.05 + 0.05i) \begin{pmatrix} -3+i & 1+3i \\ 2-i & 1+2i \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}PS = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = J(P) \quad B_1 = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix} \quad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & i \\ -i & 15 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} Sp B_1^{-1}} = \sqrt{15}$$

Следовательно,

$$V(x_1, x_2) = \frac{\omega^2}{200} (x_1^2 + x_2^2) \quad B = \frac{\omega^2}{\alpha^2} B_1 \quad \sqrt{\frac{1}{2} Sp B^{-1}} = \omega \quad (6)$$

Она положительно определенная, а ее производная по t , в силу системы (3), удовлетворяет условию $\dot{V}(x_1, x_2) = 0$. Значит, функция (6) удовлетворяет условиям теоремы о K_{Δ}^{ω} -устойчивости [2], т. е. является функцией Ляпунова для системы (3) при $\varphi(t) \equiv 1$.

2. Пусть $\varphi(t) \leq 1$ на $[t_0, \infty)$. Предположим, что

$$\varphi(t) = 1 - [1 - \varphi(t_0)] \exp[-(t - t_0)] \quad (7)$$

и наперед заданная положительная функция $\omega(t)$ определяется следующим образом:

$$\omega(t) = \omega(t_0) \exp[\varphi(t) - \varphi(t_0)] \quad (8)$$

Возьмем следующую диагональную матрицу:

$$K(t) = \text{diag} \{ \exp[\varphi(t) - 1], \exp[\varphi(t) - 1] \}$$

столбцы которой имеют одинаковую эрмитову норму: $\alpha(t) = \exp[\varphi(t) - 1]$. Тогда положительно определенной матрице

$$B(t) = K^{-1*}(t) K^{-1}(t) = \text{diag} \{ \exp[-2(\varphi(t) - 1)], \exp[-2(\varphi(t) - 1)] \}$$

соответствует положительно определенная эрмитова форма:

$$V(t, x) = (B(t) x, x) = \|x\|^2 \exp[-2(\varphi(t) - 1)] \quad (9)$$

где $\sqrt{n^{-1} Sp B^{-1}(t)} = \exp[\varphi(t) - 1] = \alpha(t)$ и на $[t_0, \infty)$ выполняется следующее соотношение:

$$\frac{\omega(t)}{\omega(t_0)} = \exp[\varphi(t) - \varphi(t_0)] = \frac{\exp[\varphi(t) - 1]}{\exp[\varphi(t_0) - 1]} = \frac{\alpha(t)}{\alpha(t_0)} \quad (10)$$

Производная по t функции $\|x\|^2$ в силу системы (3) будет

$$\frac{d\|x\|^2}{dt} = 2x_1x_2(1-\varphi(t)) \quad (11)$$

Так как для $\forall x_i$ имеет место неравенство $x_i \leq \|x\|$, то из (11) получаем следующее неравенство:

$$\frac{d\|x\|^2}{dt} \leq 2(1-\varphi(t))\|x\|^2 \text{ на } [t_0, \infty) \quad (12)$$

Полная производная по t функции $V(t, x)$ в силу системы (3) с учетом (12) будет удовлетворять на $[t_0, \infty)$ неравенству

$$\dot{V}(t, x) \leq -2[\dot{\varphi}(t) + \varphi(t) - 1]\|x\|^2 \exp[-2(\varphi(t) - 1)] \quad (13)$$

Из (7) получаем

$$\dot{\varphi}(t) = -[\varphi(t_0) - 1] \exp[-(t - t_0)] = -[1 + (\varphi(t_0) - 1) \exp[-(t - t_0)]] + 1$$

или $\dot{\varphi}(t) = -[\varphi(t) - 1]$, откуда на $[t_0, \infty)$ имеем следующее равенство:

$$\dot{\varphi}(t) + \varphi(t) - 1 = 0 \quad (14)$$

В силу (14), из (13) следует

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad (x \in D_x, t \in [t_0, \infty)) \quad (15)$$

Таким образом, при (7) и (8) для положительно определенной эрмитовой формы (9) выполняются условия (10) и (15), т.е. функция (9) удовлетворяет всем условиям теоремы о K_Δ^ω -устойчивости [2], значит имеем функцию Ляпунова.

3. Пусть на $[t_0, \infty)$ $\varphi(t) \geq 1$. Предположим, что

$$\varphi(t) = 1 + [\varphi(t_0) - 1] \exp[-(t - t_0)] \quad (16)$$

и наперед заданная положительная функция $\omega(t)$ на $[t_0, \infty)$ определяется следующим образом:

$$\omega(t) = \omega(t_0) \exp[-(\varphi(t) - \varphi(t_0))] \quad (17)$$

Возьмем диагональную матрицу

$$K(t) = \text{diag}\{\exp[-(\varphi(t) - 1)], \exp[-(\varphi(t) - 1)]\}$$

столбцы которой имеют одинаковую эрмитову норму $\alpha(t) = \exp[-(\varphi(t) - 1)]$.

Тогда положительно определенной матрице

$$B(t) = K^{-1*}(t) K^{-1}(t) = \text{diag}\{\exp[2(\varphi(t) - 1)], \exp[2(\varphi(t) - 1)]\}$$

соответствует положительно определенная эрмитова форма

$$V(t, x) = (B(t)x, x) = \|x\|^2 \exp[2(\varphi(t) - 1)] \quad (18)$$

где $\sqrt{n^{-1} \text{Sp} B^{-1}(t)} = \exp[-(\varphi(t) - 1)] = \alpha(t)$ и на $[t_0, \infty)$ выполняется соотношение

$$\frac{\omega(t)}{\omega(t_0)} = \exp[-(\varphi(t) - \varphi(t_0))] = \frac{\exp[-(\varphi(t) - 1)]}{\exp[-(\varphi(t_0) - 1)]} = \frac{\alpha(t)}{\alpha(t_0)} \quad (19)$$

Так как производная по t функция $\|x\|^2$ в силу системы (3) имеет вид

$$\frac{d\|x\|^2}{dt} = -2x_1x_2[\varphi(t) - 1]$$

то в силу условия $\varphi(t) \geq 1$ на $[t_0, \infty)$ имеет место неравенство :

$$\frac{d\|x\|^2}{dt} \leq 2[\varphi(t) - 1]\|x\|^2 \quad (t \in [t_0, \infty)) \quad (20)$$

Тогда полная производная функции $V(t, x)$ по t в силу системы (3) с учетом неравенства (20) будет удовлетворять на $[t_0, \infty)$ неравенству

$$\dot{V}(t, x) \leq 2[\dot{\varphi}(t) + \varphi(t) - 1]\|x\|^2 \exp\{2[\varphi(t) - 1]\} \quad (21)$$

в котором в силу (16) $\dot{\varphi}(t) + \varphi(t) - 1 = 0$ на $[t_0, \infty)$, следовательно,

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad (t \in [t_0, \infty)) \quad (22)$$

Получили, что положительно определенная эрмитова форма (18) удовлетворяет условиям (19) и (22) (условиям теоремы о K_Δ^ω -устойчивости [2]), т.е. является функцией Ляпунова для системы (3) и, следовательно, для уравнения (2) при $\varphi(t) \geq 1$ на $[t_0, \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К. А. Устойчивость движения на конечном интервале. // Итоги науки и техники. Общая механика. 1976. Т. 3. С.43-124.
2. Абгарян К. А., Аванян В. Т. К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. Методы теории дифференциальных уравнений и их приложение. // Тематический сб. науч. трудов МАИ. 1975. Вып. 339. С. 5-11.
3. Абгарян К. А., Аванян В. Т. К теории устойчивости на заданном интервале времени. // ПММ. 1977. Т. 41. № 5. С. 844-849.
4. Ավանյան Վ. Տ., Ավանյան Մ. Վ., Ավանյան Ն. Վ.: Գծային ավտոնոմ համակարգի համար Լյապունովի ֆունկցիայի կառուցումը և նրա որոշ կիրառությունները: // Մաթեմատիկական բարձրագույն դպրոցում: Միջբուհական գիտական և մեթոդական հոդվածների ժողովածու, Ճարտարագետներ. Երևան. 2003թ. պրակ 5, էջ 69-76:

Государственный инженерный университет
Армении

Поступила в редакцию
4.10.2006