ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Минасян А.Ф., Тоноян В.С.

Ключевые слова: упругость, парные интегральные уравнения, сингулярные уравнения.
Key words: elasticity, crack, contact problem, isotropic material, composite.

Հ.Ֆ. Մինասյան, Վ. Ս. Տոնոյան

ՈՒղղաձիգ կիսաանվերջ ճաքով բաղադրյալ կիսահարթության համար մի կոնտակտային խնդրի մասին

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է հորիզոնական եզրից վերջավոր հեռավորության կլիսանվերջ երկարությամբ ճեղք ունեցող առաձգական բաղադրյալ կիսահարության ոչ համաչափ կոնտակտային խնդիրը: Կիսահարությունը կազմված է երկու համասեռ և իզոտրոպ քառորդ հարթություններից, տարբեր առաձգական հատկություններով, որոնց նյութերի բաժանման գիծը ուղղահայաց է կիսահարթության եզրին: Նյութերի բաժանման գծի երկայնքով տարված է եզրից վերջավոր հեռավորության վրա գտնվող կիսաանվերջ ճեղք: Կիսահարթության հորիզոնական եզրի մի մասի վրա կիրառ□ված է կամայական հիմքով կոշտ դրոշմը, այնպես, որ դրոշմը գտնվում է երկու նյութերի վրա միաժամանակ և նրա դիրքը ճեղքի նկատմամբ անհամաչափ է:

H.F. Minasyan, V.S.Tonoyan

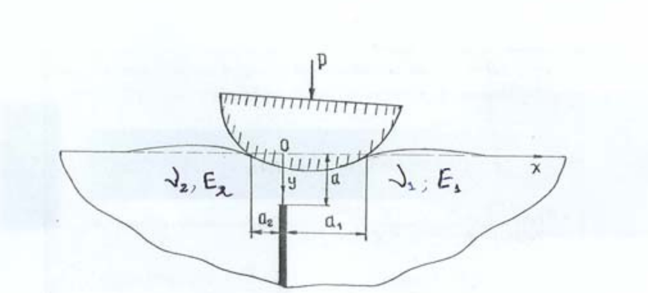
Contact Problem for the Elastic Inhomogeneous half plane with vertical half-infinite cut

Mixed problems for the composite plane and half plane with crack and first main problem for composite plane and half plane with crack as well as the main problem of composite plane were considered in works [1-6].
Consider the solution of the flat elasticity theory contact problem for the inhomogeneous half plane cut along a materials boundary line, starting with the distance “a” from the horizontal boundary.
Half plane consists of the two homogeneous and isotropic quadrants with the different elastic properties and the boundary line of these materials is perpendicular to the half plane boundary.
To the half plane boundary is applied hard die with arbitrary base so that the die is located simultaneously on the both materials and situated nonsymmetrical with respect to cut (Fig.1).
It is suggested that the friction between the die and half plane is absent.

Смешанные задачи для составной плоскости и полуплоскости с трещиной и первая основная задача составной плоскости и полуплоскости рассмотрены в работах [1-6].

Рассмотрим решение контактной задачи плоской теории упругости для неоднородной полуплоскости, разрезанной вдоль линии раздела материалов, начиная с расстояния “a“ от горизонтальной границы.

Полуплоскость состоит из двух однородных и изотропных квадрантов с различными упругими свойствами, линия раздела материалов которых перпендикулярна к границе полуплоскости.



Фиг.1

К границе полуплоскости приложен жесткий штамп с произвольным основанием так, что штамп находится одновременно на обоих материалах и расположен несимметрично относительно разреза (фиг.1).

Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует.

Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних усилий. В полубесконечном разрезе отсутствует нормальное давление. На линии раздела материалов вне разреза заданы условия полного контакта. Требуется определить контактные напряжения, действующие под штампом и на стыке двух четверть-плоскостей, а также размеры зоны контакта. После решения задачи при принятых допущениях устраняются особенности напряжений и получаются уравнения, определяющие величину зоны контакта.

Поставленная задача сводится к решению уравнения (а)

$$\Delta^2\Phi_i(x,y)=\frac{\partial^4\phi_i}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi_i}{\partial y^2\partial x^2}+\frac{\partial^4\phi_i}{\partial y^4}=0 \qquad i=1,2 \tag{a}$$

при следующих граничных условиях контакта или жесткого соединения квадрантов:

$$\begin{gathered}\mathrm{v}_1(x,0)=f_1(x),\quad 0\le x\le a_1,\quad \mathrm{v}_2(x,0)=f_2(x),\quad -a_2\le x\le 0\\ \sigma_y^{(1)}(x,0)=0,\quad a_1<x<\infty,\quad \sigma_y^{(2)}(x,0)=0,\quad -\infty<x<-a_2\end{gathered} \tag{1}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=0,\quad 0<x<\infty,\quad \tau_{xy}^{(2)}(x,0)=0,\quad -\infty<x<0 \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\sigma_x^{(1)}(0,y)=\sigma_x^{(2)}(0,y),\quad \tau_{xy}^{(1)}(0,y)=\tau_{xy}^{(2)}(0,y)\quad 0<y<a\\ u_1(0,y)=-u_2(0,y)\qquad \mathrm{v}_1(0,y)=\mathrm{v}_2(0,y)\qquad 0<y<a\\ \sigma_x^{(1)}(0,y)=\sigma_x^{(2)}(0,y)=0,\qquad \tau_{xy}^{(1)}(0,y)=-\tau_{xy}^{(2)}(0,y)=0\quad a<y<\infty\end{gathered} \tag{3}$$

Полагаем, что это решение в области I правого квадранта принимает значение $\Phi_1(x,y)$, а в области левого квадранта – $\Phi_2(x,y)$.

Бигармоническую функцию напряжений для решения рассматриваемой задачи берем в виде (6)

$$\Phi_i(x,y)=\int_0^\infty\left[A_i(\alpha)+(-1)^{i+1}\alpha xB_i(\alpha)\right]\exp\left[(-1)^i\alpha x\right]\cos(\alpha y)\,d\alpha+$$

$$+(-1)^{i+1}\int_0^\infty\left[C_i(\beta)+\beta yD_i(\beta)\right]\exp[-py]\sin\beta x\,d\beta$$

$$\left(i=1,2,\quad 0\le y<\infty,\qquad 0\le x<\infty\ \text{ при } i=1;\quad \infty<x\le 0\ \text{ при } i=2\right)$$

Напряжения и перемещения в кусочно-однородной полуплоскости через бигармоническую функцию будут определены известными формулами из [7].

Удовлетворяя условиям (1), (2) и (3), получим:

$$C_i(\beta)=D_i(\beta),\qquad (i=1,2),\qquad A_2(\alpha)=A_1(\alpha) \tag{4}$$

$$\alpha B_2(\alpha)=2\alpha A_1(\alpha)-\alpha B_1(\alpha)-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{\beta^4D_1(\beta)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2}d\beta-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{\beta^4D_2(\beta)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2}d\beta \tag{5}$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty \beta D_1(\beta)\sin\beta x d\beta = \frac{E_1}{2} f_1(x) & 0 \le x \le a_1 \\ \int_0^\infty \beta^2 D_1(\beta)\sin\beta x d\beta = \int_0^\infty \alpha^2 \left[A_1(\alpha) - 2B_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)\right] e^{-dx} d\alpha & a_1 < x < \infty \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty \beta D_2(\beta)\sin\beta x d\beta = -\frac{E_2}{2} f_2(x) & -a_2 \le x \le 0 \\ \int_0^\infty \beta^2 D_2(\beta)\sin\beta x d\beta = -\int_0^\infty \left[A_1(\alpha) - 2B_2(\alpha) - \alpha x B_2(\alpha)\right] e^{\alpha x} d\alpha & \\ & -\infty < x < -a_2 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty \alpha A_1^*(\alpha)\cos\alpha y d\alpha = 0 & a < y < \infty \\ \int_0^\infty \alpha\left[A_1^*(\alpha) - B_1^*(\alpha) - E_1^*(\alpha)\right]\sin\alpha y d\alpha = 0 & \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} l_1 \int_0^\infty A_1^*(\alpha)\cos\alpha y d\alpha + l_2 \int_0^\infty B_1^*(\alpha)\cos\alpha y d\alpha = \int_0^\infty \beta\left(-l_2 + l_4\beta y\right) \times \\ \times D_1(\beta) e^{-\beta y} l d\beta + 2 l_6 y \int_0^\infty \beta^2 D_2(\beta) e^{-\beta y} d\beta \\ l_1 \int_0^\infty A_1^*(\alpha)\sin(\alpha y) d\alpha - l_5 \int_0^\infty B_1^*(\alpha)\sin(\alpha y) d\alpha = \frac{8}{\pi E_2}\int_0^\infty \beta^4 D_1(\beta) d\beta \times \\ \times \int_0^\infty \frac{\sin\gamma y dy}{\left(\gamma^2+\beta^2\right)^2} + \frac{8}{\pi E_2}\int_0^\infty \beta^4 D_2(\beta) d\beta g \int_0^\infty \frac{\sin\gamma y d\gamma}{\left(\gamma^2+\beta^2\right)^2} \qquad 0 < y < a \end{cases} \tag{9}$$

$$l_1 = \frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{3-\nu_2}{E_2}, \quad l_2 = \frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2}, \quad l_3 = \frac{1-\nu_2}{E_2} - \frac{1-\nu_1}{E_1}$$

$$l_4 = \frac{1+\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2}, \quad l_5 = \frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2}, \quad l_6 = \frac{1-\nu_2}{E_2} \tag{10}$$

$$A_1^*(\alpha) = \alpha A_1(\alpha), \quad B_1^*(\alpha) = \alpha B_1(\alpha), \quad B_2^*(\alpha) = \alpha B_2(\alpha), \quad E_1^*(\alpha) = \alpha E_1(\alpha)$$

$$\alpha E_1^*(\alpha) = \frac{4}{\pi}\alpha \int_0^\infty \frac{\beta^4 D_1(\beta) d\beta}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \tag{11}$$

Используя результаты работы [3], из парных интегральных уравнений (6) и (7) $\beta D_1(\beta)$ и $\beta D_2(\beta)$ выразим через функции $A_1^*(\alpha)$, $B_1^*(\alpha)$ и $B_2^*(\alpha)$

$$\beta D_1(\beta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{a_1}\Psi_1(t)J_0(\beta t)dt+\frac{2}{\pi}\int_{a_1}^{\infty}F_1(t)J_0(\beta t)dt \qquad (12)$$

$$\beta D_2(\beta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{a_2}\Psi_2(\tau)J_0(\beta\tau)d\tau+\frac{2}{\pi}\int_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)J_0(\beta t)d\tau \qquad (13)$$

$$\Psi_1(t)=\frac{E_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{xf_1(x)}{\sqrt{t^2-x^2}}dx \qquad (14)$$

$$\Psi_2(\tau)=\frac{E_2}{2}\frac{d}{d\tau}\int_0^{\tau}\frac{xf_2(x)}{\sqrt{\tau^2-x^2}}dx \qquad (15)$$

$$F_1(t)=t\int_0^{\infty}\alpha^2A_1(\alpha)K_0(\alpha t)d\alpha-2t\int_0^{\infty}\alpha^2B_1(\alpha)K_0(\alpha t)d\alpha+ \\ +\int_0^{\infty}\alpha^3B_1(\alpha)K_1(\alpha t)d\alpha \qquad (16)$$

$$F_2(\tau)=\tau\int_0^{\infty}\alpha^2A_1(\alpha)K_0(\alpha\tau)d\alpha-2\tau\int_0^{\infty}\alpha^2B_2(\alpha)K_0(\alpha\tau)d\alpha+ \\ +\tau^2\int_0^{\infty}\alpha^3B_2(\alpha)K_1(\alpha\tau)d\alpha \qquad (17)$$

$J_i(x)$–функции Бесселя первого рода с действительным аргументом, а $K_i(x)$–функции Макдональда.

Для решения системы (8) и (9), учитывая результаты работы [4], применим метод преобразующих операторов. Будем иметь

$$A_1^*(\alpha)=\int_0^a H(z)\cos(\alpha z)dz \qquad (18)$$

$$B_1^*(\alpha)=\int_0^a H(z)\cos(dz)dz-\int_0^a s(z)\sin(dz)dz-\alpha E_1^*(\alpha) \qquad (19)$$

Подставляя выражения функций $\alpha\mathrm{A}^*(\alpha)$, $\alpha\mathrm{B}_1^*(\alpha)$ из (18) и (19) в уравнение (9), получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} s(y)+\dfrac{1}{\pi}\dfrac{l_5}{l_2}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{H(z)dz}{z-y}=\chi_1(y) \\ H(y)-\dfrac{1}{\pi}\dfrac{l_5}{l_2}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{s(z)dz}{z-y}=\chi_2(y) \end{cases} \qquad (20)$$

где $H(z)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_z^a\frac{\Phi(t)dt}{\sqrt{t^2-z^2}}$, $s(z)=\dfrac{2}{\pi}z\displaystyle\int_z^a\frac{\Psi(t)dt}{\sqrt{t^2-z^2}}$ (21)

$$s(-z)=-s(z), \qquad H(-z)=H(z), \qquad z\in(-a,a)$$

$$\chi_1(y)=\frac{4}{\pi^2}k_3\int\limits_0^{a_1}\frac{\left(t^2+2y^2\right)\Psi(t)dt}{\left(t^2+y^2\right)\sqrt{t^2+y^2}}+\frac{4}{\pi^2}k_3\int\limits_{a_1}^{\infty}\frac{\left(t^2+2y^2\right)F_1(t)dt}{\left(t^2+y^2\right)\sqrt{y^2+t^2}}-$$

$$-\frac{8}{\pi^2}\frac{1}{l_2E_2}\int\limits_0^{a_2}\frac{\left(t^2+2y^2\right)\Psi_2(t)dt}{\left(t^2+y^2\right)\sqrt{t^2+y^2}}-\frac{8}{\pi^2}\frac{1}{l_2E_2}\int\limits_{a_2}^{\infty}\frac{\left(t^2+2y^2\right)F_2(t)dt}{\left(t^2+y^2\right)\sqrt{t^2+y^2}} \tag{22}$$

$$\chi_2(y)=\frac{4}{\pi^2}k_1y\int\limits_0^{a_1}\frac{\left(2t^2-y^2\right)\Psi_1(t)dt}{\left(y^2+t^2\right)^2\sqrt{t^2+y^2}}+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}k_2y\int\limits_0^{a_2}\frac{\left(2t^2-y^2\right)\Psi_2(t)dt}{\left(y^2+t^2\right)^2\sqrt{t^2+y^2}}+\frac{4}{\pi^2}k_1y\int\limits_{a_1}^{\infty}\frac{\left(2t^2-y^2\right)F_1(t)dt}{\left(y^2+t^2\right)^2\sqrt{t^2+y^2}}+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}k_2y\int\limits_0^{a_1}\frac{\left(2t^2-y^2\right)F_2(t)dt}{\left(y^2+t^2\right)^2\sqrt{t^2+y^2}}$$

$$k_1=1+\frac{l_4}{l_5},\qquad k_2=\frac{l_4}{l_5},\quad k_3=\frac{l_2}{l_5}-\frac{2}{E_2l_5}$$

$H(a)=0,\quad s(0)=0,\quad s(a)=0$. Приведя систему (20) аналогичным образом, как в работе [6], получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\lambda(y)+\frac{i}{\pi}\frac{l_5}{l_2}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\lambda(r)dr}{r-y}=F(y) \tag{23}$$

где введены обозначения

$$s(y)+iH(y)=\lambda(y),\quad \lambda_1(y)+i\lambda_2(y)=F(y) \tag{24}$$

такое уравнение рассматривалось в работах [8, 9].

Используя результаты работы [8], получаем

$$\lambda(y)=\frac{F(y)}{\theta}-\frac{1}{\theta\pi i(y+a)^{1-m}(y-a)^m}\times$$

$$\times\int\limits_{-a}^{a}\frac{(\tau+a)^{1-m}(\tau-a)^m}{\tau-y}F(\tau)d\tau+\frac{c}{(y+a)^{1-m}(y-0)^m} \tag{25}$$

где $m=\frac{1}{2}-i\gamma,\qquad k=\frac{(1+\nu_1)E_2+(3-\nu_2)E_1}{(3-\nu_1)E_2+(1+\nu_2)E_1}$

$$\theta=1-\left(\frac{l_5}{l_2}\right)^2,\qquad \gamma=\frac{1}{2\pi}\ln k \tag{26}$$

Разделяя действительную и мнимую части выражения (25), найдем

$$s(y)=\frac{\chi_1(y)}{\theta}-\frac{1}{\theta\pi\sqrt{a^2-y^2}}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\tau^2}}{\tau-y}\times$$

$$\times\left[\chi_1(\tau)\sin\gamma\ln\frac{y-s}{y+a}\frac{\tau+c}{\tau-c}+\chi_2(\tau)\cos\gamma\ln\frac{a-y}{y+a}\frac{\tau+a}{\tau-a}\right]d\tau- \tag{27}$$

$$-\frac{c}{\sqrt{a^2-y^2}}\sin\gamma\ln\frac{a-y}{y+a}$$

$$H(y)=\frac{\chi_2(y)}{\theta}+\frac{1}{\theta\pi\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\tau^2}}{\tau-y}\times$$

$$\times\left[\chi_1(\tau)\cos\gamma\ln\frac{a-y}{y+c}\frac{\tau+a}{\tau-a}-\chi_2(\tau)\sin\gamma\ln\frac{a-y}{y+a}\frac{\tau+a}{\tau-a}\right]d\tau+$$

$$+\frac{c}{\sqrt{a^2-y^2}}\cos\gamma\ln\frac{a-y}{y+a} \tag{28}$$

Для определения $F_1(t)$ и $F_2(t)$ получаем систему интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода, которая после некоторых преобразований [4-6] примет вид:

$$\begin{cases} F_1(z)=\Omega_1(z)+\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)K_2(z,t)dt+\int\limits_{a_2}^{\infty}F_2(t)K_2(z,t)dt \\ F_2(z)=\Omega_2(z)+\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)K_3(z,t)dt+\int\limits_{a_2}^{\infty}F_2(t)K_4(z,t)dt \end{cases} \tag{29}$$

Систему (29) можно решить методом последовательных приближений, так как доказывается, что

$$\begin{gathered} \int\limits_{a_1}^{\infty}|K_1(z,t)|dt+\int\limits_{a_2}^{\infty}|K_2(z,t)|dt<1 \\ \int\limits_{a_1}^{\infty}|K_3(z,t)|dt+\int\limits_{a_2}^{\infty}|K_4(z,t)|dt<1 \end{gathered} \tag{30}$$

а функции $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$ ограничены сверху и стремятся к нулю, когда $z\to\infty$. Решая систему (29), получаем выражение функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$. Далее по формулам (12), (13) последовательно можно определить все искомые функции.

Напряжения и перемещения по известным формулам [7] определены в любой точке полуплоскости.

Нормальные напряжения $\sigma_y^{(1)}(x,0),\ \sigma_y^{(2)}(x,0)$ под штампом $(y=0)$, выраженные через функцию $F_1(t)$ и $F_2(t)$, определяются по формулам:

$$\sigma_y^{(1)}(x,0)=\frac{2}{\pi}\frac{x}{a_1\sqrt{a_1^2-x^2}}[\Psi_1(a_1)+F_1(a_1)]+w_1(x) \tag{31}$$

$$\sigma_y^{(2)}(x,0)=\frac{2}{\pi}\frac{x}{a_2\sqrt{a_2^2-x^2}}[\psi_2(a_2)+F_2(a_2)]+w_2(x) \tag{32}$$

где $w_j(x)$ $(j=1,2)$–регулярные функции.

Нормальные перемещения вне штампа $(y=0)$, выраженные через функцию $F_1(t)$ и $F_2(t)$, определяются по формулам:

$$\mathrm{v}_1(x,0)=\frac{4}{\pi E_1}\int_0^{a_1}\frac{\Psi_1(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}}+\frac{4}{\pi E_1}\int_{a_2}^{\infty}\frac{F_1(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}} \qquad a_1<x<\infty \tag{33}$$

$$\mathrm{v}_2(x,0)=\frac{4}{\pi E_2}\int_0^{a_2}\frac{\Psi_2(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}}+\frac{4}{\pi E_2}\int_{a_2}^{\infty}\frac{F_2(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}} \qquad -\infty<x<-a_2 \tag{34}$$

Напряжения $\sigma_x^{(1)}(0,y)=\sigma_x^{(2)}(0,y)$ вне разреза на линии $(x=0)$, выраженные через функции $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$, определяются по формулам:

$$\sigma_x^{(1)}(0,y)=\sigma_x^{(2)}(0,y)=\frac{\pi}{2}\frac{c}{\sqrt{a^2-y^2}}\cos\gamma\ln\frac{a-y}{a+y}+\frac{\pi}{2}\frac{\chi_2(y)}{\theta}+$$
$$+\frac{1}{2\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\tau^2}}{\tau-y}\left[\chi_1(y)\cos\gamma\ln\frac{a-y}{a+y}\frac{a+\tau}{a-\tau}-\right. \tag{35}$$
$$\left.-\chi_2(\tau)\sin\gamma\ln\frac{a-y}{a+y}\frac{a+\tau}{a-\tau}\right]d\tau \qquad 0<y<a$$

Как видно из (27), (28), решение сингулярного уравнения (25) имеет осциллирующую особенность на концах интервала $(-a,a)$.

При получении формул (20), (21) были использованы методы обобщенных функций [10].

Напряжения $\tau_{xy}^{(1)}(0,y)=\tau_{xy}^{(2)}(0,y)$ вне разреза на линии $(x=0)$, выраженные через функции $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$, определяются по формулам:

$$\tau_{xy}^{(i)}(0,y)=-\frac{\pi}{2}\frac{c}{\sqrt{a^2-y^2}}\sin\gamma\ln\frac{a-y}{a+y}+\omega_2(y)$$

где $\omega_2(y)$ регулярна.

Формулы (31), (32), (33) и (34) определяют напряжения и перемещения для заданных величин контакта a_1, a_2. Если эти величины не заданы, то их можно определить из условия непрерывности нормальных напряжений, что выражается трансцендентными уравнениями:

$$\psi_1(a_1)+F_1(a_1)=0; \quad \psi_2(a_2)+F_2(a_2)=0 \tag{36}$$

В частном случае, когда $E_1=E_2$; $\nu_1=\nu_2$; $a_1=a_2$ и $a\to 0$, получим решение задачи о вдавливании жесткого штампа симметричного очертания на упругую однородную полуплоскость, совпадающее с решением, полученным М.А. Садовским [3]. Когда $a\to 0$ и материалы квадрантов различные, то получается решение контактной задачи о давлении жесткого штампа с основанием произвольной формы, приложенного на части горизонтальной границы упругой составной полуплоскости [4].

Пусть $a_2 < a_1$, так что давление под штампом имеет особенность типа $\rho^{-1/2}$, где ρ – расстояние от угловой точки штампа.

Условие равновесия штампа определяется формулой:

$$P = \int_0^{a_1} \sigma_y^{(1)}(x,0)\,dx + \int_{-a_2}^{0} \sigma_y^{(2)}(x,0)\,dx = \frac{\pi\delta}{2}(E_1 - E_2) + \frac{\pi}{2}\left[F_1(a_1) - F_2(a_2)\right]$$

Вычисление ведем по суммарной вертикальной нагрузке, действующей в сечении $f(x) = \text{const}$, где $c = \dfrac{P}{\pi}$.

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные до первого порядка включительно, в интервале $x \in (-a_2, a_1)$ и в точке $x = 0$ имеют равенство $f_1(0) = f_2(0)$ и $f_1'(0) = f_2'(0)$. Следует отметить, что в функциональном пространстве L_1 доказывается, что

$$\int_{a_1}^{\infty} |K_1(z,t)|\,dt + \int_{a_2}^{\infty} |K_2(z,t)|\,dt < 1$$

$$\int_{a_1}^{\infty} |K_3(z,t)|\,dt + \int_{a_2}^{\infty} |K_4(z,t)|\,dt < 1$$

которая обеспечивает условия разрешимости системы интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода относительно $F_1(z)$ и $F_2(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашбаух Н.Е. Развитие конечной трещины, перпендикулярной к поверхности раздела двух материалов.//ПМ (тр. амер. о-ва механиков). 1973. Т.40. N2. С.312-314.
2. Боджи Д.В. Действия касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по граням.// ПМ(тр. амер. о-ва механиков). 1968. Т.35. №3. С.29-37.
3. Минасян А.Ф., Тоноян В.С. О контактной задаче для упругой составной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом.// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1980. Т.33. №6. С.18-42.
4. Минасян А.Ф., Тоноян В.С. Об одной задаче для неоднородной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом.// Докл. АН Арм. ССР. 1988. Т.37. №1. С.22-28.
5. Минасян А.Ф. Об одной задаче для неоднородной полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом. Ереван: Изд.”Гитутюн” НАН Армении, 2006. 306с.
6. Тоноян В.С., Мелкумян С.А. Об одной задаче для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом.// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1972. Т.25. №3. С.3-17.
7. Тимошенко С.П. Теория упругости. М.: ОНТИ, 1937.

8. Патваканян Ю.В., Минасян А.Ф., Тоноян В.С. Контактные задачи для бесконечной полосы и составной полуплоскости с вертикальными разрезами. /Всесоюзная научная конференция. “Смешанные задачи механики деформируемого тела”. Тезисы докладов. Днепропетровск. 1981.
9. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
10. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512с.
11. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439с.
12. Sadowsky M.A. Stress concentration caused by multiple punches and cracks. Papers Amer. Soc. Mech. Engr. N.A.16. 1955.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
31.05.2006