

УДК 539.3

**УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С УПРУГИМ  
БЕСКОНЕЧНЫМ СЛОЕМ**

Восканян А.Р., Григорян Э.Х.

**Ա.Ռ.Ոսկանյան, Է.Խ.Գրիգորյան**

**Առաձգական անվերջ շերտով առաձգական տարածության հաստատված տատանումները**

Դիտարկված են անվերջ առաձգական շերտ պարունակող առաձգական տարածության հաստատված տատանումները ներդաշնակ տատանումների զծային աղբյուրի ազդեցության տակ: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ: Ցույց է տրված, որ առաձգական շերտի և առաձգական տարածության բնութագրիչների որոշակի արժեքների դեպքում շերտի և տարածության կոնտակտային մակերևույթին առաջանում են տեղայնացված ալիքներ: Շերտի և տարածության տեղափոխության ամպլիտուդաները ներկայացված են տեղայնացված ալիքների և սահքի ծավալային ալիքների գումարի տեսքով: Ստացված են տեղափոխությունների ամպլիտուդների ասիմպտոտական բանաձևերը հեռավոր գոտում, որոնցից երևում է, որ ծավալային սահքային ալիքները շերտի և տարածության հեռավոր գոտիներում տարածվում են նույն արագությամբ: Դիտարկված է նաև փոքր հաստությամբ առաձգական շերտի դեպքը:

**A.R.Voskanyan, E.Kh.Grigoryan**

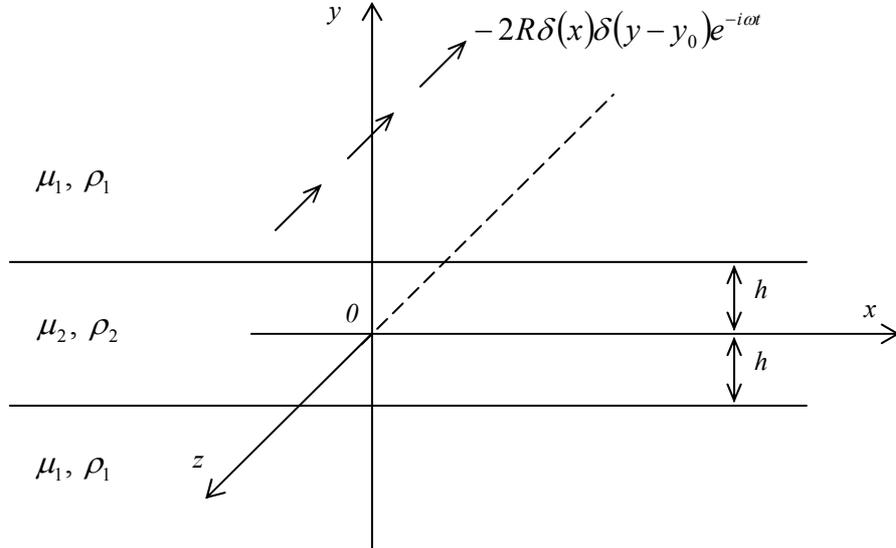
**Steady-State Vibrations Of Elastic Space Contaning Elastic Infinite Strip**

The problem of steady-state vibrations of elastic space containing elastic infinite strip under the action of a linear source of harmonic vibrations is considered. The problem is solved with the aid of Fourier integral transformation. It is shown that in some cases of elastic parameters' values of the strip and the space, surface waves appear, which are localized on the contact surface of the elastic strip and the space. The displacement amplitude of the elastic strip and the space are represented in the form of a sum of the above mentioned surface waves and shear volume waves. Asymptotic expressions in far field are derived for the displacements of the elastic strip in the case of different values of parametrs, from which it can be seen that the shear volume wave in the strip has the same propagation speed as the shear volume wave of the space. Asymptotic expressions in far field for the displacements of the elastic space are also derived. The case of a thin elastic strip is also considered in the paper.

Рассматривается задача об установившихся колебаниях упругого пространства с бесконечным упругим слоем под действием линейного источника гармонических колебаний. Задача решается с помощью интегрального преобразования Фурье. Показано, что при некоторых значениях параметров упругого слоя и пространства возникают поверхностные волны, локализованные на поверхности контакта упругого слоя и пространства. Амплитуда перемещений упругого слоя и пространства представлены в виде суммы вышеуказанных поверхностных волн и сдвиговых объемных волн. Для амплитуды перемещений упругого слоя при различных значениях параметров упругого слоя и пространства получены асимптотические формулы в дальней зоне, из которых видно, что сдвиговая объемная волна в слое распространяется со скоростью сдвиговой объемной волны упругого пространства. Получены также асимптотические формулы для амплитуды перемещений упругого пространства в дальней зоне. В работе рассматривается также случай упругого слоя малой толщины.

Рассмотрим установившиеся сдвиговые колебания упругого пространства, содержащего бесконечный упругий слой с толщиной  $2h$ . Начало оси координат  $Oxyz$  поместим в середине слоя, ось  $Ox$  направим таким образом, чтобы образовалась левая система координат. Упругое пространство со слоем деформируется под действием линейного источника гармонических колебаний  $2R\delta(x)\delta(y-y_0)e^{-i\omega t}$ , направленного по отрицательной оси  $OZ$ , где  $2R$  – интенсивность источника,  $\delta(x)$ ,  $\delta(y)$  – функции Дирака,  $\omega$  – частота

колебаний,  $t$  – параметр времени. Величины, характеризующие пространство, обозначим индексом 1, а слой – 2.



Фиг. 1

Векторы перемещений упругого пространства и слоя имеют вид  $\vec{U}_1(x, y, t) = \vec{U}_1(0, 0, W_1(x, y)e^{-i\omega t})$ ,  $\vec{U}_2(x, y, t) = \vec{U}_2(0, 0, W_2(x, y)e^{-i\omega t})$ , соответственно, где амплитуды перемещений  $W_1(x, y)$ ,  $W_2(x, y)$  определяются из дифференциальных уравнений [1].

$$\frac{\partial^2 W_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1(x, y)}{\partial y^2} + K_1^2 W_1(x, y) = 2P\delta(x)\delta(y - y_0), |y| > h \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 W_2(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_2(x, y)}{\partial y^2} + K_2^2 W_2(x, y) = 0, |y| < h \quad (2)$$

с контактными условиями

$$W_1(x, h) = W_2(x, h), W_1(x, -h) = W_2(x, -h)$$

$$\mu_1 \frac{\partial W_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h} = \mu_2 \frac{\partial W_2(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h}, \mu_1 \frac{\partial W_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-h} = \mu_2 \frac{\partial W_2(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-h} \quad (3)$$

Здесь  $y_0 > h$ ,  $P = R/\mu_1$ ,  $k_1^2 = \omega^2/C_1^2$ ,  $C_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$  – скорость распространения сдвиговой волны в пространстве,  $\mu_1$  – модуль сдвига,  $\rho_1$  – плотность материала пространства,  $k_2^2 = \omega^2/C_2^2$ ,  $C_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$  – скорость распространения сдвиговой волны в слое,  $\mu_2$  – модуль сдвига,  $\rho_2$  – плотность материала слоя. Функция  $W_1(x, y)$  должна удовлетворять условию уходящей волны.

Для решения дифференциальных уравнений (1), (2) с условием (3) применим к ним действительное преобразование Фурье

$$\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (4)$$

В итоге получим

$$\frac{d^2 \bar{W}_1(\sigma, y)}{dy^2} - (\sigma^2 - k_1^2) \bar{W}_1(\sigma, y) = 2P\delta(y - y_0) \quad |y| > h \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \bar{W}_2(\sigma, y)}{dy^2} - (\sigma^2 - k_2^2) \bar{W}_2(\sigma, y) = 0 \quad |y| < h$$

$$\bar{W}_1(\sigma, h) = \bar{W}_2(\sigma, h), \quad \bar{W}_1(\sigma, -h) = \bar{W}_2(\sigma, -h)$$

$$\mu_1 \left. \frac{d\bar{W}_1(\sigma, y)}{dy} \right|_{y=h} = \mu_2 \left. \frac{d\bar{W}_2(\sigma, y)}{dy} \right|_{y=h}$$

$$\mu_1 \left. \frac{d\bar{W}_1(\sigma, y)}{dy} \right|_{y=-h} = \mu_2 \left. \frac{d\bar{W}_2(\sigma, y)}{dy} \right|_{y=-h} \quad (6)$$

Чтобы  $\bar{W}_1(x, y)$  удовлетворял условию уходящей волны, из (1) надо определить ту  $\bar{W}_1(\sigma, y)$ , которая при  $|\sigma| > k_1$  стремилась к нулю, когда  $|y| \rightarrow \infty$ , а при  $|\sigma| < k_1$  она представляла уходящую волну. Такое решение можно представить в виде

$$\bar{W}_1(\sigma, y) = A e^{-\gamma_1 y} - \frac{P}{\gamma_1} e^{-\gamma_1 |y - y_0|}, \quad y > h$$

$$\bar{W}_1(\sigma, y) = B e^{\gamma_1 y}, \quad y < -h$$

где  $\gamma_1 = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2}$ ,  $A, B$  – постоянные, которые определяются в дальнейшем. В силу вышесказанного, ветвь функции  $\gamma_1 = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2}$  выбирается таким образом, чтобы  $\gamma_1(\sigma) \rightarrow |\sigma|$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} = -i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2}$ . В таком случае вещественная ось обходит точку  $\sigma = -k_1$  сверху, а точку  $\sigma = k_1$  снизу [2].

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\bar{W}_2(\sigma, y) = C \operatorname{sh} \gamma_2 y + D \operatorname{ch} \gamma_2 y \quad |y| < h, \quad \gamma_2 = \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} \quad (7)$$

Удовлетворив условиям контакта (6), для определения неизвестных  $A, B, C, D$  получим систему уравнений

$$A e^{-\gamma_1 h} - \frac{P}{\gamma_1} e^{-\gamma_1 (y_0 - h)} = C \operatorname{sh} \gamma_2 h + D \operatorname{ch} \gamma_2 h$$

$$B e^{-\gamma_1 h} = -C \operatorname{sh} \gamma_2 h + D \operatorname{ch} \gamma_2 h$$

$$\gamma_1 \mu_1 \left( -A e^{-\gamma_1 y} - \frac{P}{\gamma_1} e^{-\gamma_1 (y_0 - h)} \right) = \gamma_2 \mu_2 (C \operatorname{ch} \gamma_2 h + D \operatorname{sh} \gamma_2 h)$$

$$B \gamma_1 \mu_1 e^{-\gamma_1 h} = \gamma_2 \mu_2 (C \operatorname{ch} \gamma_2 h - D \operatorname{sh} \gamma_2 h)$$

откуда  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  определяются в виде

$$A = -\frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1} e^{\gamma_1 h}}{\gamma_1 \left( 1 + \frac{\gamma_2 \mu_2}{\gamma_1 \mu_1} \operatorname{cth} \gamma_2 h \right)} - \frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1} e^{\gamma_1 h}}{\gamma_1 \left( 1 + \frac{\gamma_2 \mu_2}{\gamma_1 \mu_1} \operatorname{th} \gamma_2 h \right)} + \frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1} e^{\gamma_1 h}}{\gamma_1}$$

$$B = \frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1} e^{\gamma_1 h}}{\gamma_1 \left( 1 + \frac{\gamma_2 \mu_2}{\gamma_1 \mu_1} \operatorname{cth} \gamma_2 h \right)} - \frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1} e^{\gamma_1 h}}{\gamma_1 \left( 1 + \frac{\gamma_2 \mu_2}{\gamma_1 \mu_1} \operatorname{th} \gamma_2 h \right)}$$

$$C = -\frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1}}{\gamma_1 \left( 1 + \frac{\gamma_2 \mu_2}{\gamma_1 \mu_1} \operatorname{cth} \gamma_2 h \right)} \frac{1}{\operatorname{sh} \gamma_2 h}, \quad D = -\frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1} e^{\gamma_1 h}}{\gamma_1 \left( 1 + \frac{\gamma_2 \mu_2}{\gamma_1 \mu_1} \operatorname{th} \gamma_2 h \right)} \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma_2 h}$$

Тогда для  $\bar{W}_1(\sigma, y)$ ,  $\bar{W}_2(\sigma, y)$  будем иметь

$$\bar{W}_1(\sigma, y) = -\frac{P e^{-|y - y_0| \gamma_1}}{\gamma_1} + P e^{\gamma_1 (2h - y - y_0)} \left( \frac{1}{\gamma_1} - \frac{\operatorname{ch} \gamma_2 h}{\gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_2 h + \gamma_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{sh} \gamma_2 h} - \frac{\operatorname{sh} \gamma_2 h}{\gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_2 h + \gamma_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{ch} \gamma_2 h} \right) \quad y > h$$

$$\bar{W}_1(\sigma, y) = P e^{\gamma_1 (y + h)} e^{-(y_0 - h) \gamma_1} \left( \frac{\operatorname{sh} \gamma_2 h}{\gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_2 h + \gamma_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{ch} \gamma_2 h} - \frac{\operatorname{ch} \gamma_2 h}{\gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_2 h + \gamma_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{sh} \gamma_2 h} \right) \quad y < -h \quad (8)$$

$$\bar{W}_2(\sigma, y) = -\frac{P e^{-(y_0 - h) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}}{L_1(\sigma)} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} y - \frac{P e^{-(y_0 - h) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}}{L_2(\sigma)} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} y \quad |y| < h \quad (9)$$

$$\text{где } L_1(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h - \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h$$

$$L_2(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \quad (10)$$

В дальнейшем, в основном, будет рассмотрен важный случай, когда  $k_2 > k_1$ . В

этом случае в зависимости от значения  $\sqrt{k_2^2 - k_1^2} h$  функции  $L_1(\sigma)$  и  $L_2(\sigma)$  имеют действительные нули.

Рассмотрим случаи:

1)  $(n-1)\pi < \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h \leq \frac{(2n-1)\pi}{2}$ . В этом случае, как показывают исследования, функция  $L_1(\sigma)$  имеет  $2n$  корней, квадраты которых находятся в интервалах отрезка  $(k_1^2, k_2^2)$  в следующем порядке [3]:

$$k_2^2 - \left[ \frac{(2n-2m+1)\pi}{2h} \right]^2 < (\pm\sigma_m^{(1)})^2 < k_2^2 - \left[ \frac{(n-m)\pi}{h} \right]^2,$$

где  $k_2^2 - \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2h} \right]^2 \leq k_1^2$  ( $m = \overline{1, n}; n = 1, 2, \dots$ )

А  $L_2(\sigma)$  имеет  $(2n-2)$  корней, квадраты которых распределены в порядке  $k_2^2 - \left[ \frac{(n-m)\pi}{h} \right]^2 < (\pm\sigma_m^{(2)})^2 < k_2^2 - \left[ \frac{(2n-2m-1)\pi}{2h} \right]^2$  ( $m = \overline{1, n-1}; n = 2, 3, \dots$ ),  $k_2^2 - \left[ \frac{(n-1)\pi}{h} \right]^2 > k_1^2$

2)  $\frac{(2n-1)\pi}{2} < \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h \leq n\pi$ . В этом случае и  $L_1(\sigma)$ , и  $L_2(\sigma)$  имеют  $2n$  корней, расположенных в интервале  $(k_1^2, k_2^2)$ , соответственно в порядке

$$k_2^2 - \left[ \frac{(2n-2m+1)\pi}{2h} \right]^2 < (\pm\sigma_m^{(1)})^2 < k_2^2 - \left[ \frac{(n-m)\pi}{h} \right]^2$$

где  $k_2^2 - \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2h} \right]^2 > k_1^2$

$$k_2^2 - \left[ \frac{(n-m+1)\pi}{h} \right]^2 < (\pm\sigma_m^{(2)})^2 < k_2^2 - \left[ \frac{(2n-2m+1)\pi}{2h} \right]^2$$

где  $k_2^2 - \left[ \frac{n\pi}{h} \right]^2 \leq k_1^2$ , ( $m = \overline{1, n}; n = 1, 2, \dots$ )

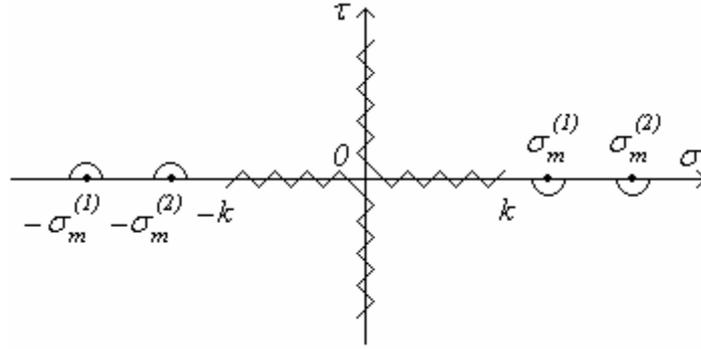
Исследование количества корней  $L_1(\sigma)$  графическим способом приведено в [4,5].

Далее определим  $W_1(x, y)$ ,  $W_2(x, y)$ .

$$W_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}_1(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma, W_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}_2(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

Чтобы удовлетворялись условия уходящей волны, контуры интегрирования должны обходить отрицательные и положительные полюса подынтегральных выражений, соответственно сверху и снизу.

Вычислим  $W_2(x, y)$  в комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  с разрезами, указанными на фиг.2.



Фиг.2

Разрезами указанным образом в комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  функции  $L_1(\sigma)$  и  $L_2(\sigma)$  не могут иметь комплексных корней. Поскольку, если  $\alpha = \alpha_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) будут чисто комплексными корнями  $L_j(\alpha)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), находящимися в первой четверти, то отсюда будет следовать, что точки  $\bar{\alpha}_j$  тоже будут корнями  $L_j(\alpha)$  ( $j = 1, 2, \dots$ )  $\left( \sqrt{\alpha_j^2 - k_1^2} = \sqrt{\bar{\alpha}_j^2 - k_1^2} \right)$ . А это означает, что  $W_2(x, y)$  будет иметь составляющие в виде приходящей волны из  $x \rightarrow +\infty$ , которая противоречит поставленной задаче. Очевидно, что функции  $L_j(\alpha)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) на мнимой оси не имеют нулей. Тогда замыкая путь интегрирования в верхней полуплоскости в интегралах входящих в  $W_2(x, y)$ , используя лемму Жордана, получим

$$W_2(x, y) = P(\varphi_0(x, y) - I_1(x, y) - I_2(x, y)) \quad x < 0 \quad (11)$$

где

$$I_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \cos(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 + \tau^2}}{(k_1^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 + \tau^2} \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \sin(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 + \tau^2}}{(k_1^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h} \right\} \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} y e^{-\tau|x|} d\tau + \\
& + \frac{i}{\pi} \int_0^{k_1} \left\{ \frac{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \cos(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 - \sigma^2}}{(k_1^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h} - \right. \\
& \left. \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \sin(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 - \sigma^2}}{(k_1^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h} \right\} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} y e^{i\sigma|x|} d\sigma \\
I_2(x, y) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \cos(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 + \tau^2}}{(k_1^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h} + \right. \\
& \left. + \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \sin(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 + \tau^2}}{(k_1^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h} \right\} \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} y e^{-\tau|x|} d\tau + \\
& + \frac{i}{\pi} \int_0^{k_1} \left\{ \frac{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \cos(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 - \sigma^2}}{(k_1^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h} + \right. \\
& \left. + \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \sin(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 - \sigma^2}}{(k_1^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h} \right\} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} y e^{i\sigma|x|} d\sigma
\end{aligned}$$

В случае 1)  $\varphi_0(x, y) = -iA_n^{(1)} e^{i\sigma_n^{(1)}|x|} - i \sum_{m=1}^{n-1} \left( A_m^{(1)} e^{i\sigma_m^{(1)}|x|} + A_m^{(2)} e^{i\sigma_m^{(2)}|x|} \right)$

$$A_m^{(2)} = \frac{\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2} (k_2^2 - \sigma_m^{(2)^2}) e^{-(y_0-h)\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2}} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma_m^{(2)^2}} y}{\sigma_m^{(2)} \left[ k_2^2 - k_1^2 + h\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2} \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} (\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2) + \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 - \sigma_m^{(2)^2}) \right) \right]} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma_m^{(2)^2}} h$$

$$A_m^{(1)} = \frac{\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2} (k_2^2 - \sigma_m^{(1)^2}) e^{-(y_0-h)\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2}} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma_m^{(1)^2}} y}{\sigma_m^{(1)} \left[ k_2^2 - k_1^2 + h\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2} \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} (\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2) + \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 - \sigma_m^{(1)^2}) \right) \right]} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma_m^{(1)^2}} h$$

Во втором случае

$$\Phi_0(x, y) = -i \sum_{m=1}^n \left( A_m^{(1)} e^{i\sigma_m^{(1)}|x|} + A_m^{(2)} e^{i\sigma_m^{(2)}|x|} \right)$$

Очевидно, что в силу четности задачи по  $x$  эти формулы имеют место и при  $0 < x < \infty$ .

Теперь приступим к определению асимптотических формул при  $|x| \rightarrow \infty$ . Проводя интегрирование по частям и используя свойства интеграла Фурье, из (11) получены следующие асимптотические формулы:

В случае 1)  $\left( \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h \neq \frac{(2n-1)\pi}{2} \right)$

$$W_2(x, y) = -iPA_n^{(1)} e^{k\sigma_n^{(1)}|x|} - iP \sum_{m=1}^{n-1} \left( A_m^{(1)} e^{k\sigma_m^{(1)}|x|} + A_m^{(2)} e^{k\sigma_m^{(2)}|x|} \right) - \frac{iPk_1^{3/2}}{4\sqrt{\pi}} (A_1 + A_2) |k_1 x|^{-3/2} e^{i\left(k_1|x| + \frac{\pi}{4}\right)} + o\left(|k_1 x|^{-5/2}\right) \quad |x| \rightarrow \infty \quad (12)$$

$$A_1 = \sqrt{2k_1} \frac{\cos \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h - \frac{\mu_2}{\mu_1} (y_0 - h) \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \sin \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h}{\left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - k_1^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h} \cos \sqrt{k_2^2 - k_1^2} y$$

$$A_2 = \sqrt{2k_1} \frac{\sin \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h + \frac{\mu_2}{\mu_1} (y_0 - h) \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \cos \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h}{\left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - k_1^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h} \sin \sqrt{k_2^2 - k_1^2} y$$

В случае, когда  $\sqrt{k_2^2 - k_1^2} h = \frac{(2n-1)\pi}{2}$

$$W_2(x, y) = -iPA_n^{(1)} e^{i\sigma_n^{(1)}|x|} - iP \sum_{m=1}^{n-1} \left( A_m^{(1)} e^{i\sigma_m^{(1)}|x|} + A_m^{(2)} e^{i\sigma_m^{(2)}|x|} \right) +$$

$$+ \frac{iP \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}}{2\sqrt{2\pi}} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2h} y |k_1 x|^{-\frac{1}{2}} e^{i\left(k_1|x| + \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(|k_1 x|^{-\frac{3}{2}}\right)$$

В случае 2)  $\left(\sqrt{k_2^2 - k_1^2} h \neq n\pi\right)$

$$W_2(x, y) = -iP \sum_{m=1}^n \left( A_m^{(1)} e^{i\sigma_m^{(1)}|x|} + A_m^{(2)} e^{i\sigma_m^{(2)}|x|} \right) - \frac{iP}{4\sqrt{\pi}} (A_1 + A_2) |k_1 x|^{-\frac{3}{2}} e^{i\left(k_1|x| + \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(|k_1 x|^{-\frac{5}{2}}\right)$$

В случае, когда  $\sqrt{k_2^2 - k_1^2} h = n\pi$

$$W_2(x, y) = -iP \sum_{m=1}^n \left( A_m^{(1)} e^{i\sigma_m^{(1)}|x|} + A_m^{(2)} e^{i\sigma_m^{(2)}|x|} \right) + \frac{iP(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{n\pi}{h} y |k_1 x|^{-\frac{1}{2}} e^{i\left(k_1|x| + \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(|k_1 x|^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$|x| \rightarrow \infty$

Теперь вычислим  $W_1(x, y)$  на комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  с разрезами, показанными на фиг.2, с помощью метода контурного интегрирования.

В итоге получим

$$W_1(x, y) = P \left( \Psi_0(x, y) - I_3(x, y) - I_4(x, y) + I_5(x, y) - \frac{i}{2} H_0^{(1)}(k_1 r) \right)$$

$y > h$

(13)

где  $r = \sqrt{(y - y_0)^2 + x^2}$ , и  $H_0^{(1)}(k_1 r)$  – функция Ханкеля первого рода [1,6].

$$I_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} |2h - y_0 - y|}{(k_1^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h} - \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h} \right] \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h e^{-\tau|x|} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{k_1} \left[ \frac{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h} - \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h} \right\} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h e^{\sigma|x|} d\sigma \\
I_3 = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h} + \right. \\
& \left. + \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 + \tau^2} \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h} \right] \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h e^{-\tau|x|} d\tau + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^{k_1} \left[ \frac{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h} + \right. \\
& \left. + \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h} \right] \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h e^{i\sigma|x|} d\sigma \\
I_5(x, y) = & \frac{P}{2\pi} \left( \int_0^\infty \frac{e^{i\sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)} e^{-\tau|x|}}{\sqrt{k_1^2 + \tau^2}} d\tau + \int_0^\infty \frac{e^{-i\sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)} e^{-\tau|x|}}{\sqrt{k_1^2 + \tau^2}} d\tau \right) - \\
& - \frac{P}{2\pi} \left( \int_0^{k_1} \frac{e^{i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)} e^{i\sigma|x|}}{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2}} d\sigma + \int_0^{k_1} \frac{e^{-i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)} e^{i\sigma|x|}}{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2}} d\sigma \right), \quad y > h
\end{aligned}$$

$$W_1(x, y) = P(\Psi_0(x, -y) - I_3(x, -y) - I_4(x, -y)), \quad y < -h$$

где  $\Psi_0(x, y)$  в случае 1) будет

$$\Psi_0(x, y) = -iB_n^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_n^{(1)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_n^{(1)} |x|} - i \sum_{m=1}^{n-1} \left( B_m^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_m^{(1)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_m^{(1)} |x|} + B_m^{(2)} e^{-\sqrt{\sigma_m^{(2)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_m^{(2)} |x|} \right)$$

В случае когда  $\sqrt{k_2^2 - k_1^2} h = (n-1)\pi$

$$\Psi_0(x, y) = -i \sum_{m=1}^{n-1} \left( B_m^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_m^{(1)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_m^{(1)} |x|} + B_m^{(2)} e^{-\sqrt{\sigma_m^{(2)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_m^{(2)} |x|} \right)$$

Во втором случае

$$\Psi_0(x, y) = -i \sum_{m=1}^n \left( B_m^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_m^{(1)} |x|} + B_m^{(2)} e^{-\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_m^{(2)} |x|} \right)$$

где

$$B_m^{(1)} = \frac{\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2} (k_2^2 - \sigma_m^{(1)^2}) e^{-(y_0-h)\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2}}}{\sigma_m^{(1)} \left[ k_2^2 - k_1^2 + h\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2} \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} (\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2) + \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 - \sigma_m^{(1)^2}) \right) \right]}$$

$$B_m^{(2)} = \frac{\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2} (k_2^2 - \sigma_m^{(2)^2}) e^{-(y_0-h)\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2}}}{\sigma_m^{(2)} \left[ k_2^2 - k_1^2 + h\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2} \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} (\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2) + \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 - \sigma_m^{(2)^2}) \right) \right]}$$

Как видно из представления функции  $\Psi_0(x, y)$ , она экспоненциально убывает по  $y$  при  $|y| > h$ , т.е. ее значения, в основном, сосредоточены на контактных поверхностях  $y = \pm h$ , иначе говоря,  $\Psi_0(x, y)$  является поверхностной или локализованной волной. Отметим также, что волны, соответствующие волновым числам  $\sigma_m^{(1)}$ , являются волнами Лява. Асимптотическая формула  $W_1(x, y)$  при  $r_1 \rightarrow \infty$ , ( $r_1^2 = (y-h)^2 + x^2$ ) имеет вид

$$W_1(x, y) = (A_1 + A_2 + A_3) (k_1 r_1)^{-\frac{1}{2}} e^{i(k_1 r_1 - \frac{\pi}{4})} - \frac{iPe^{i(k_1 r_1 - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k_1 r_1}} + O\left((k_1 r_1)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\text{где } r = r_1 \sqrt{1 - \frac{2y_1(y_0 - h) - (y_0 - h)^2}{r_1^2}}$$

$$A_1 = \frac{Pk_1 \sin \theta e^{-ik_1(h-y_0)\sin \theta}}{\sqrt{2\pi} \left( ik_1 \sin \theta + \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta} \operatorname{tg} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta} h \right)}$$

$$A_2 = \frac{Pk_1 \sin \theta e^{-ik_1(h-y_0)\sin \theta}}{\sqrt{2\pi} \left( ik_1 \sin \theta + \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta} \operatorname{ctg} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta} h \right)}$$

$$A_3 = \frac{iPe^{-ik_1(h-y_0)\sin \theta}}{\sqrt{2\pi}}$$

А при  $y < -h$

$$W_1(x, y) = (A_1 + A_2) \Big|_{\theta=0} \frac{e^{i(k_1 r_1 - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{k_1 r_1}} + O\left((k_1 r_1)^{-\frac{3}{2}}\right), \quad r_1 \rightarrow \infty$$

В случае, когда  $k_2 < k_1$ , в выражениях  $W_1(x, y)$ ,  $W_2(x, y)$  (11), (12), (13), (14) надо поставить  $\Phi_0(x, y) = 0$ ,  $\Psi_0(x, y) = 0$ , поскольку в этом случае поверхностные волны отсутствуют.

Теперь рассмотрим случай упругого слоя малой толщины, т.е. когда  $k_2 h \ll 1$ , ( $k_1 < k_2$ ) [7]. Тогда  $W_1(x, y)$  и  $W_2(x, y)$  определятся из (11), (13), заменив в них  $\cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \sim 1$ ,  $\sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \sim \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h$ . В итоге получим

$$\begin{aligned}
W_1(x, y) = & -iPB_1^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_1^{(1)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_1^{(1)} |x|} - \\
& - \frac{iP}{\pi} \int_0^{k_1} \left( \frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y) + \frac{\mu_2}{\mu_1} h (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 + \tau^2) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2) h^2} \right) e^{-\tau |x|} d\tau - \\
& - \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{h \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y) + \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 - \sigma^2) (k_2^2 - \sigma^2) h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2} \right) e^{i\sigma |x|} d\sigma \\
& - \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y) - \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)}{(k_2^2 + \tau^2) (k_1^2 + \tau^2) h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2)} \right) \times \\
& \times \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h e^{-\tau |x|} d\tau - \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{iP}{\pi} \int_0^{k_1} \left( \frac{h \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y) - \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 - \sigma^2) (k_2^2 - \sigma^2) h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2} \right) \times \\
& \times \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h e^{i\sigma |x|} d\sigma + PI_5(x, y) - \frac{iP}{2} H_0^{(1)}(k, r), \quad y > h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_1(x, y) = & -iPB_1^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_1^{(1)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_1^{(1)} |x|} - \\
& - \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y) + \frac{\mu_2}{\mu_1} h (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 + \tau^2) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2) h^2} \right) e^{-\tau |x|} d\tau -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{iP}{\pi} \int_0^{k_1} \left( \frac{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y) + \frac{\mu_2}{\mu_1} h (k_2^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 + y)}{(k_1^2 - \sigma^2) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) h^2} \right) e^{i\sigma|x|} d\sigma - \\
& -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y) - \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 + y)}{(k_2^2 + \tau^2)(k_1^2 + \tau^2) h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2)} \right) \times \\
& \quad \times \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h e^{-\tau|x|} d\tau - \tag{15} \\
& -\frac{iP}{\pi} \int_0^{k_1} \left( \frac{h \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y) - \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 + y)}{(k_1^2 - \sigma^2)(k_2^2 - \sigma^2) h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2} \right) \times \\
& \quad \times \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h e^{i\sigma|x|} d\sigma, \quad y < -h \\
& W_2(x, y) = -iPA_1^{(1)} e^{i\sigma_1^{(1)}|x|} - \\
& -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (y_0 - h) - \frac{\mu_2}{\mu_1} h (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (y_0 - h)}{(k_1^2 + \tau^2) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2) h^2} \right) \times \\
& \quad \times \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} y e^{-\tau|x|} d\tau - \\
& -\frac{iP}{\pi} \int_0^{k_1} \left( \frac{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (y_0 - h) + \frac{\mu_2}{\mu_1} h (k_2^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (y_0 - h)}{(k_1^2 - \sigma^2) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) h^2} \right) \times \\
& \quad \times \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} e^{i\sigma|x|} d\sigma - \\
& -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} (k_1^2 + \tau^2) h \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (y_0 - h) - \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (y_0 - h)}{(k_2^2 + \tau^2)(k_1^2 + \tau^2) h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2)} \right) \times \\
& \quad \times \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} y e^{-\tau|x|} d\tau -
\end{aligned}$$

$$-\frac{iP}{\pi} \int_0^{k_1} \left( \frac{h\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \cos\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (y_0 - h) - \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 - \sigma^2) \sin\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (y_0 - h)}{(k_1^2 - \sigma^2)(k_2^2 - \sigma^2)h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2} \right) \times \\ \times \sin\sqrt{k_2^2 - \sigma^2} y e^{i\sigma|x|} d\sigma \quad (16)$$

Здесь  $k_1^2 < (\pm\sigma_1^1)^2 < k_2^2$  – нули функции  $L_1(\sigma)$  при  $hk_2 \ll 1$ , а  $L_2(\sigma)$  в данном случае не имеет нулей. Причем

$$L_1(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} h(k_2^2 - \sigma^2) \\ L_2(\sigma) = h\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} h(k_2^2 - \sigma^2) \\ \sigma_1^1 = \frac{\sqrt{2k_2^2 h^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 + 1} - \sqrt{1 + 4h^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - k_1^2)}}{2h^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2}$$

Асимптотические формулы для  $W_1(x, y)$  и  $W_2(x, y)$  получаются из формул (14), (15), (16) и будут иметь вид:

$$W_1(x, y) = (A_1 + A_2 + A_3)(k_1 r_1)^{-\frac{1}{2}} e^{i\left(k_1 r_1 - \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{iP e^{i\left(k_1 r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} + O\left((k_1 r_1)^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$r_1 \rightarrow \infty, y > h$$

$$W_1(x, y) = (A_1 + A_2)|_{\theta=0} \frac{e^{i\left(k_1 r_1 - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_1 r_1}} + O\left((k_1 r_1)^{-\frac{3}{2}}\right), r_1 \rightarrow \infty, y < -h$$

где

$$A_1 = \frac{Pk_1 \sin \theta e^{-ik_1(h-y_0)\sin \theta}}{\sqrt{2\pi} \left( ik_1 \sin \theta + \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \cos^2 \theta \right)} \\ A_2 = \frac{Pk_1 \sin \theta e^{-ik_1(h-y_0)\sin \theta}}{\sqrt{2\pi} \left( ik_1 \sin \theta + \frac{\mu_2}{\mu_1 h} \right)}, \quad A_3 = \frac{iP e^{-ik_1(h-y_0)\sin \theta}}{\sqrt{2\pi}} \\ W_2(x, y) = -\frac{iP e^{-|h-y_0|\sqrt{\sigma_1^{(1)2} - k_1^2}} \sqrt{\sigma_1^{(1)2} - k_1^2} e^{i\sigma_1^{(1)}|x|}}{\sigma_1^{(1)} \left( 1 + 2\frac{\mu_2}{\mu_1} h\sqrt{\sigma_1^{(1)2} - k_1^2} \right)} - \frac{iPk_1^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{\pi}} (A_1 + A_2) |k_1 x|^{-\frac{3}{2}} e^{i\left(k_1|x| + \frac{\pi}{4}\right)} +$$

$$+O\left(|k_1 x|^{\frac{5}{2}}\right) \quad |x| \rightarrow \infty, \quad |y| < h$$

где

$$A_1 = \sqrt{2k_1} \frac{1 - (y_0 - h)\sqrt{k_2^2 - k_1^2} h}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} h\right)^2 (k_2^2 - k_1^2)^2}$$

$$A_2 = \sqrt{2k_1} \frac{h\sqrt{k_2^2 - k_1^2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} h(y_0 - h)\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} h\right)^2 (k_2^2 - k_1^2)^2} \sqrt{k_2^2 - k_1^2} y$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В.К. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир. 1962, 279с.
3. Агаян К., Григорян Э.Х. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого слоя в составное упругое пространство // Материалы науч. конф. "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Изд. "Гитутюн" НАН РА. Ереван, 2005. С.19-23.
4. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 335с.
5. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в системе с пьезоэлектрической подложкой и диэлектрическим слоем. // Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т.56. №4. С.46-55.
6. Справочник по спец. функциям под ред. Абрамовица. М.: Физматгиз, 1979. 832с.
7. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. // Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.

Ереванский  
государственный университет

Поступила в редакцию  
31.03.2006