

УДК 539.3

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ
 РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА
 Барсегян В. В., Геворкян Г. А.

Վ. Վ. Բարսեղյան, Գ. Ա. Գևորգյան

Պոտենցիալի տեսության երկափ խնդիրների լուծման վերաբերյալ
 տարրերի մեթոդի ձևափոխված տարբերակ

Առաջարկվում է բառակցվումաձև վերաբերյալ տարրերի մեթոդի ձևափոխված տարբերակ, որում
 պոտենցիալի տեսության երկափ խնդիրների լուծումը հանգեցվում է շատակոսային ծրագրավորման
 խնդրի:

V. V. Barsегyan, G. A. Gevorgyan

A Modified Finite-Element Method for Solving Two-Dimensional Potential Theory Problems

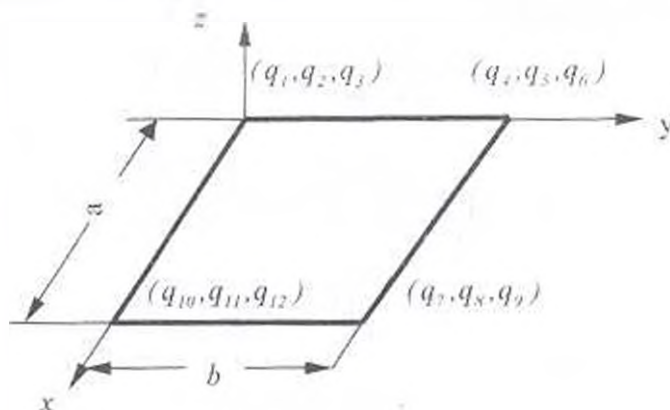
A modified finite-element method is proposed where two - dimensional potential theory problems solutions
 are reduced to quadratic programming

Предлагается модифициция метода конечных элементов четырехугольной формы, при котором
 решения двумерных задач теории потенциала сводятся к задаче квадратичного программирования

С помощью вариационного исчисления задачи теории потенциала
 сводятся к следующей задаче[3] - требуется найти неизвестную функцию
 Φ , для которой взятый по всей области двойной интеграл

$$\chi = \iint \left[\frac{1}{2} \left\{ h_x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + h_y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - \Omega \Phi \right] dx dy \quad (1)$$

принимает минимальное значение при условии, что Φ удовлетворяет
 граничным условиям рассматриваемой частной задачи. h_x , h_y и Ω -
 известные функции от x и y .



Փիգ. 1

Рассмотрим двумерную область, которая разделена на
 $s \in \bar{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ конечных элементов прямоугольной формы. Узловые

значения функции Φ для s -ого конечного элемента (фиг.1) зададим вектором $q_s = (q_s^1, q_s^2, \dots, q_s^{12})^T$. Значения функции Φ элемента аппроксимируем следующим многочленом четвертого порядка, содержащим 12 неизвестных параметров:

$$\Phi^s(x, y) = \sum_{i=1}^{12} q_i^s \Psi_i(x, y) \quad (2)$$

Тогда, при $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ для функции Эрмита $\Psi_i(x, y)$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi, \eta) &= 1 - 3\xi^2 - \xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 + 2\eta^3 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3 \\ \Psi_2(\xi, \eta) &= b(-\xi\eta^2 + \xi\eta^3); \Psi_3(\xi, \eta) = b(\eta - \xi\eta - 2\eta^2 + 2\xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3) \\ \Psi_4(\xi, \eta) &= a(\xi - \xi\eta - 2\xi^2 + 2\xi^2\eta + \xi^3 - \xi^3\eta) \\ \Psi_5(\xi, \eta) &= 3\eta^2 + \xi\eta - 2\eta^3 - 3\xi\eta^2 - 3\xi^2\eta + 2\xi\eta^3 + 2\xi^3\eta \\ \Psi_6(\xi, \eta) &= b(-\eta^3 + \eta^3 + \xi\eta^2 - \xi\eta^3) \\ \Psi_7(\xi, \eta) &= a(\xi\eta - 2\xi^2\eta + \xi^3\eta) \\ \Psi_8(\xi, \eta) &= -\xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3; \Psi_9(\xi, \eta) = a(-\xi^3\eta + \xi^3\eta) \\ \Psi_{10}(\xi, \eta) &= 3\xi^2 + \xi\eta - 2\xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3 - 3\xi^2\eta \\ \Psi_{11}(\xi, \eta) &= b(\xi\eta - 2\xi\eta^2 + \xi\eta^3); \Psi_{12}(\xi, \eta) = a(-\xi^2 + \xi^3 + \xi^3\eta - \xi^3\eta) \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты вектора $f_s = (\Phi^s, \frac{\partial \Phi^s}{\partial x}, \frac{\partial \Phi^s}{\partial y})^T$ внутри s -ого элемента соответственно определяются формулой (2) и формулами

$$\frac{\partial \Phi^s(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{12} q_i^s \frac{\partial \Psi_i(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi^s(x, y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{12} q_i^s \frac{\partial \Psi_i(x, y)}{\partial y} \quad (4)$$

Подставляя значения $\Phi^s(x, y)$ из выражения (3) в (1), функцию χ^s представим в виде

$$\chi^s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} k_{ij}^s q_i^s q_j^s - \sum_{i=1}^{12} q_i^s P_i^s \quad (5)$$

где

$$k_{ij}^s = \iint_{a,b} \left(h_x \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + h_y \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (6)$$

$$P_i^s = \iint_{a,b} \Omega(x, y) \Psi_i^s dx dy \quad (7)$$

Обозначим

$$k^s = h_x \|\tilde{k}_x^s\| + h_y \|\tilde{k}_y^s\| \quad (8)$$

тогда, с учетом соотношений (3) и принимая h_x, h_y за постоянные величины внутри элемента, исходя из [6] для ненулевых значений компонентов ~~матриц~~ матриц, имеем

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{44}^* &= \bar{k}_{77}^* = \bar{k}_{11}^* = \bar{k}_{10,10}^* = \frac{46}{105} \frac{b}{a}; & \bar{k}_{31}^* &= \bar{k}_{11,1}^* = \bar{k}_{44}^* = \bar{k}_{44}^* = \frac{1}{30} b; \\
\bar{k}_{12}^* &= \bar{k}_{11,1}^* = \frac{1}{45} ab; & \bar{k}_{31}^* &= \bar{k}_{31}^* = \bar{k}_{12,10}^* = \bar{k}_{38}^* = \frac{11}{210} \frac{b^2}{a}; & \bar{k}_{74}^* &= \bar{k}_{10,1}^* = -\frac{46}{105} \frac{b}{a} \\
\bar{k}_{41}^* &= \bar{k}_{10,2}^* = \frac{17}{105} \frac{b}{a}; & \bar{k}_{31}^* &= \bar{k}_{31}^* = \bar{k}_{42}^* = \bar{k}_{11,4}^* = \frac{1}{60} b; & \bar{k}_{71}^* &= \bar{k}_{10,4}^* = -\frac{17}{105} \frac{b}{a} \\
\bar{k}_{61}^* &= \bar{k}_{10,0}^* = \bar{k}_{31}^* = \bar{k}_{12,4}^* = -\frac{13}{420} \frac{b^2}{a}; & \bar{k}_{31}^* &= \bar{k}_{44}^* = \bar{k}_{10,6}^* = \bar{k}_{12,2}^* = \frac{13}{420} \frac{b^2}{a} \\
\bar{k}_{12,1}^* &= \bar{k}_{64}^* = \bar{k}_{10,1}^* = \bar{k}_{37}^* = -\frac{11}{210} \frac{b^2}{a}; & \bar{k}_{22}^* &= \bar{k}_{44}^* = \bar{k}_{38}^* = \bar{k}_{11,11}^* = \frac{2}{45} ab \\
\bar{k}_{32}^* &= \bar{k}_{11,3}^* = -\frac{1}{180} ab; & \bar{k}_{10,2}^* &= \bar{k}_{31}^* = \bar{k}_{31}^* = \bar{k}_{11,10}^* = -\frac{1}{30} b \\
\bar{k}_{11,2}^* &= \bar{k}_{85}^* = -\frac{1}{90} ab; & \bar{k}_{11}^* &= \bar{k}_{38}^* = \bar{k}_{38}^* = \bar{k}_{12,11}^* = \frac{1}{105} \frac{b^2}{a} \\
\bar{k}_{81}^* &= \bar{k}_{72,9}^* = -\frac{1}{140} \frac{b^2}{a}; & \bar{k}_{61}^* &= \bar{k}_{12,6}^* = \frac{1}{140} \frac{b^2}{a}; & \bar{k}_{12,1}^* &= \bar{k}_{36}^* = -\frac{1}{105} \frac{b^2}{a} \\
\bar{k}_{72}^* &= \bar{k}_{10,5}^* = \bar{k}_{10,8}^* = \bar{k}_{11,7}^* = -\frac{1}{60} b; & \bar{k}_{11}^* &= \bar{k}_{44}^* = \bar{k}_{77}^* = \bar{k}_{10,10}^* = \frac{46}{105} \frac{a}{b} \\
\bar{k}_{21}^* &= \bar{k}_{34}^* = \bar{k}_{10,3}^* = \bar{k}_{11,1}^* = \frac{11}{210} \frac{a^2}{b}; & \bar{k}_{12}^* &= \bar{k}_{11,3}^* = -\frac{1}{105} \frac{a^2}{b} \\
\bar{k}_{31}^* &= \bar{k}_{61}^* = \bar{k}_{10,9}^* = \bar{k}_{12,10}^* = \frac{1}{30} a; & \bar{k}_{41}^* &= \bar{k}_{42}^* = \bar{k}_{37}^* = \bar{k}_{11,10}^* = -\frac{11}{210} \frac{a^2}{b} \\
\bar{k}_{71}^* &= \bar{k}_{10,4}^* = -\frac{17}{105} \frac{a}{b}; & \bar{k}_{81}^* &= \bar{k}_{31}^* = \bar{k}_{11,4}^* = \bar{k}_{10,2}^* = \frac{13}{420} \frac{a^2}{b} \\
\bar{k}_{91}^* &= \bar{k}_{12,1}^* = \bar{k}_{10,3}^* = \bar{k}_{10,6}^* = \frac{1}{60} a; & \bar{k}_{10,1}^* &= \bar{k}_{74}^* = \frac{17}{105} \frac{a}{b} \\
\bar{k}_{11,1}^* &= \bar{k}_{34}^* = \bar{k}_{72}^* = \bar{k}_{10,5}^* = -\frac{13}{420} \frac{a^2}{b}; & \bar{k}_{12}^* &= \bar{k}_{31}^* = \bar{k}_{38}^* = \bar{k}_{11,11}^* = \frac{1}{105} \frac{a^2}{b} \\
\bar{k}_{32}^* &= \bar{k}_{11,3}^* = \frac{1}{140} \frac{a^2}{b}; & \bar{k}_{12,2}^* &= \bar{k}_{85}^* = -\frac{1}{140} \frac{a^2}{b}; & \bar{k}_{11}^* &= \bar{k}_{38}^* = \bar{k}_{38}^* = \bar{k}_{12,12}^* = \frac{2}{45} ab \\
\bar{k}_{41}^* &= \bar{k}_{44}^* = \bar{k}_{37}^* = \bar{k}_{12,7}^* = -\frac{1}{30} a; & \bar{k}_{61}^* &= \bar{k}_{12,9}^* = -\frac{1}{90} ab; & \bar{k}_{31}^* &= \bar{k}_{12,3}^* = -\frac{1}{180} ab \\
\bar{k}_{12,1}^* &= \bar{k}_{36}^* = \frac{1}{45} ab; & \bar{k}_{71}^* &= \bar{k}_{38}^* = \bar{k}_{38}^* = \bar{k}_{12,4}^* = -\frac{1}{60} a; & \bar{k}_{41}^* &= \bar{k}_{10,7}^* = -\frac{46}{105} \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

Обозначим через

$$P^* = (P_1^*, P_2^*, \dots, P_{12}^*)' \quad (9)$$

вектор узловых нагрузок и принимая Ω за постоянную величину внутри элемента, исходя из [7], имеем

$$P^i = \frac{\Omega ab}{4} \left(1, \frac{a}{6}, \frac{b}{6}, 1, \frac{a}{6}, -\frac{b}{6}, 1, -\frac{a}{6}, -\frac{b}{6}, 1, -\frac{a}{6}, \frac{b}{6} \right)^T$$

С учетом введенных обозначений [8] и [9] функцию (5) представим в виде

$$\chi^i = \frac{1}{2} (q^i)^T k^i q^i - (q^i)^T P^i \quad (10)$$

Учитывая, что рассматриваемая двумерная область представлена в виде совокупности n конечных элементов прямоугольной формы, для функционала (1) имеем

$$\chi = \sum_{i=1}^n \chi^i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} (q^i)^T k_i q_i - (q^i)^T P^i \right] \quad (11)$$

Пусть n — общее число узлов всей области, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ — вектор узловых функций, $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)^T$ — вектор внутренних распределенных нагрузок, связанных с заданной функцией Ω , $K = \|K_i\|$ — матрица жесткости для всей области. Тогда, как следует из соотношения (11)

$$\chi = \frac{1}{2} q^T K q - q^T P$$

Как известно [3], функция Φ^i , задаваемая формулой (2), обеспечивает непрерывность функции Φ , но не обеспечивает совместности наклона нормали вдоль границы разделов элементов. Для обеспечения непрерывности на границах разделов элементов введем дополнительные точки, на которых будет задано условие непрерывности. Возьмем эти точки в центре сторон конечных элементов. Тогда условия непрерывности в смежном сечении вдоль границы разделов s -го и $(s+1)$ -го конечных элементов задаются соотношениями

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(\frac{a}{2}, b \right) = \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial x} \left(\frac{a}{2}, 0 \right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left(a, \frac{b}{2} \right) = \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial y} \left(0, \frac{b}{2} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(a, \frac{b}{2} \right) = \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial x} \left(0, \frac{b}{2} \right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left(\frac{a}{2}, b \right) = \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial y} \left(\frac{a}{2}, 0 \right) \quad (13)$$

Используя формулы (4), найдем в центрах сторон смежных сечений вдоль границы разделов s -го и $(s+1)$ -го конечных элементов

значения $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}$ и, подставляя их в условие непрерывности (12), (13) для смежных сечений ij , параллельных осям x и y (фиг. 2 и 3), получим, что условия непрерывности (12) тождественно удовлетворяются. Условия (13) примут вид

$$\begin{aligned} -q_1^{s+1} + 2q_1^s - q_1^{s+1} + q_1^{s-1} - 2q_1^s + q_1^{s+1} &= 0 \\ -q_2^{s+1} + 2q_2^s - q_2^{s+1} + q_2^{s-1} - 2q_2^s + q_2^{s+1} &= 0 \end{aligned}$$

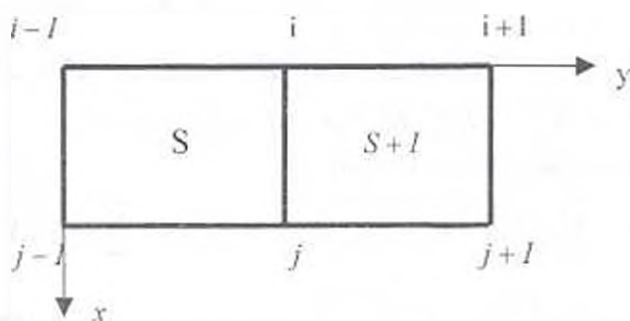
Обозначим через m и $\bar{m}$ соответственно, количество смежных сечений, параллельных осям x и y . Перепишем эти условия непрерывности в виде системы уравнений, имеем:

$$Hq = 0 \quad (14)$$

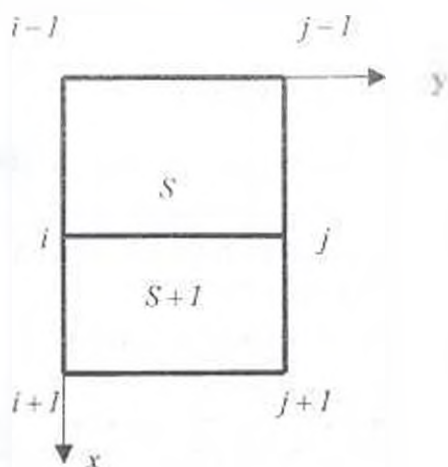
где H — матрица порядка $m \times 3n$, $m = \bar{m} - \bar{m}$.

Таким образом, сформулированная с помощью вариационного исчисления задача об определении минимального значения функционала (1) с учетом граничных условий сводится к следующей задаче квадратичного программирования:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} q^T K q - q^T P \mid Hq = 0, \text{ граничные условия} \right\} \quad (15)$$

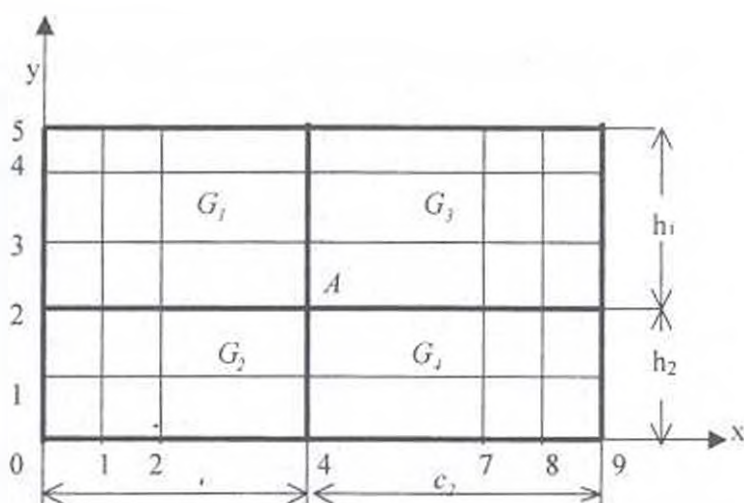


Фиг.2



Фиг.3

Введем обозначения



Фиг. 4

Учитывая, что функция напряжения $\Phi(x, y)$ и ее производные на границе области принимают нулевые значения, граничные условия принимают вид

$$\Phi(i, 0) = 0, \quad \Phi(i, 5) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(i, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(i, 0) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(i, 5) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(i, 5) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

$$\Phi(0, i) = 0, \quad \Phi(9, i) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(0, i) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(0, i) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(9, i) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(9, i) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, 5\}$$

Из остальных (ненулевых) узловых значений функции напряжения $\Phi(x, y)$ и ее производных составим искомый вектор

$$\Phi = (\Phi(1, 1), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(1, 1), \dots, \Phi(8, 1), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(8, 1), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(8, 1), \dots, \Phi(8, 5), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(8, 5), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(8, 5))'$$

порядка 96, в соответствии с которым сформируем матрицу жесткости K и вектор P для всей области (они имеют порядок 96). Используя формулы (14) и (15), составим матрицу H порядка 76×96 .

Для формирования матриц K и H , а также вектора P написана программа на языке C++. С использованием этой программы вычислены узловые значения функции напряжения $\Phi(x, y)$ и ее производные как без учета, так и с учетом условий непрерывности (14). Результаты вычисления приведены в таблице.

Таблица

Узло- вые точки	Без учета условий непрерывности			С учетом условия непрерывности		
	$\frac{1}{G\Omega} \Phi$	$\frac{1}{G\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$\frac{1}{G\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$\frac{1}{G\Omega} \Phi$	$\frac{1}{G\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$\frac{1}{G\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$
(1,1)	5,47138	-1,07288	1,53547	5,39658	-0,0014618	-0,00349697
(2,1)	8,45944	-2,98851	1,93878	8,19551	-0,00578593	-0,00219558
(3,1)	10,3409	-1,35945	-0,0488687	9,83763	-0,0082692	-0,00147366
(4,1)	12,1714	-3,71379	1,30935	11,5018	-0,00297101	-0,00130549
(5,1)	14,8915	-3,89793	0,518999	14,1383	0,00571915	-0,00057849
(6,1)	15,1935	-1,0365	0,350644	14,4425	0,0121126	0,000384003
(7,1)	13,4942	-3,38453	-1,27966	12,9212	0,0131587	0,00182721
(8,1)	9,15736	-1,8583	-2,04921	8,96637	0,00842532	0,00334576
(1,2)	8,56299	0,192798	2,06399	8,29507	-0,0209431	-0,00646522
(2,2)	12,4095	0,824383	1,57654	11,761	-0,0410703	-0,00452899
(3,2)	15,4306	-0,611287	1,51656	14,411	-0,0547577	-0,0032087
(4,2)	18,1188	-1,04225	1,93676	16,8288	-0,0563389	-0,00189062
(5,2)	21,7314	-0,907023	0,856662	20,1625	-0,0492724	0,00114435
(6,2)	22,0555	-0,906719	-0,5936	20,5169	-0,0380523	0,00450134
(7,2)	19,1384	-0,592981	-2,15786	17,9633	-0,0253794	0,00752448
(8,2)	12,1624	-0,0937138	-3,49364	11,7178	0,0126001	0,0081816
(1,3)	8,16861	0,380364	2,21983	7,94828	-0,068224	-0,0108953
(2,3)	12,1455	0,6608	1,72053	11,5848	-0,128795	-0,0127538
(3,3)	15,2051	0,780233	1,36031	14,3418	-0,171569	-0,0137733
(4,3)	17,9444	0,838222	1,57201	16,7248	-0,188656	-0,0138354
(5,3)	21,3571	1,02112	0,699133	19,0845	-0,181831	-0,00965259
(6,3)	21,5742	1,0662	-0,689929	20,164	-0,155245	-0,00346038
(7,3)	18,5577	0,929735	-2,28301	17,5117	-0,112927	0,00357048
(8,3)	11,6033	0,572016	-3,60309	11,2342	-0,0594204	0,00783021
(1,4)	5,65366	0,53424	1,1493	5,60782	-0,0873083	-0,00894384
(2,4)	9,27194	1,06486	1,31035	9,03533	-0,164215	-0,0115512
(3,4)	11,7022	1,34853	1,12701	11,2979	-0,219215	-0,0130801
(4,4)	13,8804	1,4458	2,4196	13,2062	-0,243649	-0,0136087
(5,4)	16,4382	1,67264	0,842973	15,7295	-0,237672	-0,010419
(6,4)	19,6152	1,7108	0,384169	15,921	-0,204917	-0,00550582
(7,4)	14,3336	1,4348	-1,45991	13,8345	-0,15098	0,00012946
(8,4)	9,97453	0,825803	-2,05552	8,94821	-0,074296	0,0003715

Составляя соответствующие значения, приведенные в таблице с учетом условий непрерывности и без ее учета, заметим, что различие значений функции напряжения не превышает 10 процентов, а различие в значениях касательных напряжений $\left\{ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right\}$ несопоставимо. Следовательно, определение значений касательных напряжений без учета условий непрерывности приводит к неверному результату.

Известно [1], что при $G_2 G_3 - G_1 G_4 = 0$ функция $\Phi(x, y)$ является аналитической по всей области, и напряжения не имеют особенностей. Вышеприведенный пример расчета относится к этому случаю. В дальнейшем в других работах нами будет рассмотрен случай

$$G_2 G_3 - G_1 G_4 \neq 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Баблоян А. А., Мкртчян А. М. Кручение стержня с поперечным сечением в виде соединений прямоугольников и кольцевых секторов // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1979. Т. 32. № 6. С. 3-16.
2. Геворкян Г.А. Об одном методе расчета усилий в элементах ферм. // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. №. 2. С. 56-62.
3. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра. 1974. 240 с.

Ереванский госуниверситет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
23.06.2005