ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №4, 2005 Механика

УДК 531.36

СВЯЗЬ K_{Δ}^{ω}- УСТОЙЧИВОСТИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

Аванян В.Т., Аванян М. В.

Վ.Տ. Ավանյան, Մ. Վ. Ավանյան

K_{Δ}^{ω} կայունության և էքսպոնենցիալ կայունության փոխադարձ կապը

Աշխատանքում դիտարկված է էքսպոնենցիալ կայունության և K_{Δ}^{ω} կայունության միջև կապը: Ստացված է, որ ա) գծային համասեռ ավտոնոմ համակարգի տրիվիալ լուծման ասիմպտոտիկ K_{Δ}^{ω} կայունությունից հետևում է նրա էքսպոնենցիալ կայունությունը, բ) երբ ոչ ավտոնոմ համակարգի տրիվիալ լուծումն ասիմպտոտիկ K_{Δ}^{ω} կայուն է, և գոյություն ունի ասիմպտոտիկ K_{Δ}^{ω} կայունության մասին թեորեմի [1] պայմաններին բավարարող հերմիտյան ձև, ապա այդ համակարգի տրիվիալ լուծումն էքսպոնենցիալ կայուն է:

V.T. Avanyan, M. V. Avanyan

The connection between the K_{Δ}^{ω} - stability and the exponential stability

There was considered the connection between the K_{Δ}^{ω} - stability and the exponential stability in this work. There were received, that a) the exponential stability of the trivial solution of the linear homogeneous autonomous system followed from it's asymptotic K_{Δ}^{ω} - stability, b) the trivial solution of the non-homogeneous system was exponentially stable, if the solution of the non-homogeneous system was asymptotically K_{Δ}^{ω} - stable and if it had the hermitian form, which satisfied to the conditions of the theorem of the asymptotic K_{Δ}^{ω} - stability.

В работе рассматривается связь экспоненциальной устойчивости с K_{Δ}^{ω} устойчивостью. Получено: а) из асимптотической K_{Δ}^{ω} устойчивости тривиального решения линейной однородной автономной системы следует ее экспоненциальная устойчивость, б) если тривиальное решение неавтономной системы асимптотически K_{Δ}^{ω} устойчиво и существует эрмитова форма, удовлетворяющая условиям теоремы об асимптотической K_{Δ}^{ω}-устойчивости, то тривиальное решение этой системы экспоненциально устойчиво.

Пусть тривиальное решение однородной линейной системы

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

с постоянной матрицей A асимптотически K_{Δ}^{ω}–устойчиво при $t \to +\infty$, тогда эта система экспоненциально устойчива, т. е. каждое ее решение экспоненциально устойчиво.

Действительно, как известно [3], для асимптотической K_{Δ}^{ω}-устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову тривиального решения уравнения (1), необходимые и достаточные условия совпадают. Этим условием является отрицательность всех действительных частей характеристических корней матрицы A. Но при этих условиях [4] тривиальное решение уравнения (1) экспоненциально устойчиво при $t \to +\infty$.

Таким образом, при асимптотической K_λ^ω-устойчивости тривиального решения уравнения (1) существуют две положительные постоянные Q и p, не зависящие от выбора решения $x(t) = x(t;t_0,x_0) \neq 0$ этого уравнения и такие, что для любого решения $x(t) = x(t;t_0,x_0)$ выполняется неравенство

$$\|x(t)\| \leq Q\|x(t_0)\|\exp(-p(t-t_0)) \quad (t > t_0) \tag{2}$$

где начальный момент t_0 произволен.

А для любого другого решения $\xi(t)$ линейной однородной системы (1) в силу того, что разность $x(t) - \xi(t)$ также является решением этой системы, будет выполняться неравенство

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq Q\|x(t_0) - \xi(t_0)\|\exp(-p(t-t_0)) \tag{3}$$

Таким образом, получили, что если линейная однородная система (1) асимптотически K_λ^ω-устойчива, то каждое ее решение экспоненциально устойчиво.

Для линейной системы с переменными коэффициентами из асимптотической устойчивости по Ляпунову ее тривиального решения, вообще говоря, не следует экспоненциальная устойчивость. Так как из K_λ^ω-устойчивости невозмущенного процесса всегда следует ее устойчивость по Ляпунову [3], поэтому для линейной системы с переменными коэффициентами из асимптотической K_λ^ω-устойчивости ее тривиального решения также, вообще говоря, не следует ее экспоненциальная устойчивость.

Пусть уравнение возмущенного процесса имеет вид

$$\dot{x} = X(t,x), \quad X(t,0) = 0 \tag{4}$$

где

$$X(t,x) \in C_{t,x}^{(0,1)}\left(\Im_t^\alpha \times \Re_x^n\right) \text{ и } \Im_t^\alpha = \{\alpha < t < \infty\} \tag{5}$$

Рассмотрим теперь случай, когда для тривиального решения неавтономной системы (4) одновременно имеет место и асимптотическая K_λ^ω-устойчивость, и экспоненциальная устойчивость при $t \to +\infty$.

Для этого докажем следующее утверждение при $\omega(t) \geq 1$, $t \in [t_0, \infty)$.

Теорема 1. Если в области (5) существует положительно определенная эрмитова форма

$$V(x) = (Bx, x) \tag{6}$$

с постоянной матрицей B, производная которой $\dot{V}(x)$ по времени t в силу системы (4) в области (5) является отрицательно определенной эрмитовой формой

$$\dot{V}(x) \le -(Mx, x) = W(x) < 0, \ \|x\| \ne 0 \tag{7}$$

с постоянной матрицей M, то тривиальное решение системы (4) (т. е. невозмущенный процесс) одновременно и асимптотически K_Δ^ω-устойчиво, и экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Пусть существует форма (6) со свойством (7) и $\omega(t) \ge 1$ на $[t_0, \infty)$. Тогда по лемме в [1] положительно определенную матрицу B представим в виде

$$B = K^{-1*}K^{-1} \ \ (K = K_1 \cdots K_n)$$

где K_j $(j = 1, \ldots, n)$- столбцы матрицы K имеют одинаковую эрмитову норму

$$\|K_j\| = \sqrt{n^{-1} SpB^{-1}} = \alpha > 0 \ \ (j = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

При этом матрица $G = \alpha^{-1} K$ принадлежит классу K_Δ^1- $n \times n$-матриц над полем комплексных чисел, а функция

$$V_1(x) = (G^{-1}x, G^{-1}x) = \alpha^2 (K^{-1}x, K^{-1}x) = \alpha^2 V(x) \tag{9}$$

будет удовлетворять всем условиям теоремы об асимптотической K_Δ^1-устойчивости [1] (из $\alpha(t) = \mathrm{const}$, $\omega(t) \equiv 1$ следует $\alpha(t)/\alpha(t_0) = \omega(t)/\omega(t_0)$).

Но так как при $\omega(t) \ge 1$ из асимптотической K_Δ^1-устойчивости всегда следует асимптотическая K_Δ^ω-устойчивость, то тривиальное решение системы (4) асимптотически K_Δ^ω-устойчиво при $t \to +\infty$

При данных условиях экспоненциальную устойчивость при $t \to +\infty$ тривиального решения системы (4) доказал Красовский Н. Н. [4]. Не будет лишним, если мы это сделаем, используя при этом результаты, полученные в [2].

Так как матрица M положительно определенная, то по лемме [1], аналогично формуле (8), будем иметь

$$\sqrt{n^{-1} SpM^{-1}} = \beta \tag{10}$$

С учетом (8) и (10) для собственных значений матриц B и M по формуле (1.13) в [2] будем иметь

$$n^{-1}\alpha^{-2} \le \lambda_i(B) \le n\alpha^{-2} m_1^{-2} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

$$n^{-1}\beta^{-2} \le \lambda_i(M) \le n\beta^{-2} m_2^{-2} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

где положительные числа m_1 и m_2 определяются по формуле (1.19) в [2] следующим образом:

$$m_1 = (\sqrt{n}\alpha)^{\frac{n}{n-1}}, \ \ m_2 = (\sqrt{n}\beta)^{\frac{n}{n-1}}$$

В силу неравенств (11) и (12) соответственно имеем

$$n^{-1}\alpha^{-2}\|x\|^2 \le V(x) \le n\alpha^{-2} m_1^{-2} \ \|x\|^2 \tag{13}$$

$$n^{-1}\beta^{-2}\|x\|^2 \le -W(x) \le n\beta^2 m_2^{-2}\|x\|^2 \tag{14}$$

С учетом (7) из неравенства (14) имеем

$$n^{-1}\beta^{-2}\|x\|^2 \le -\frac{dV}{dt} \le n\beta^2 m_2^{-2}\|x\|^2 \tag{15}$$

Из (13) имеем неравенство

$$m_1^2 n^{-1}\alpha^{-2}V(x) \le \|x\|^2 \le n\alpha^2 V(x) \tag{16}$$

в силу которого следует неравенство

$$-n\alpha^2 V(x) \le -\|x\|^2 \le -m_1^2 n^{-1}\alpha^{-2}V(x)$$

Учитывая это, из (15) получим

$$\frac{dV}{V} \le -\frac{m_1^2}{n^2\alpha^2\beta^2}dt \tag{17}$$

Интегрируя неравенство (17), при $t \ge t_0$ будем иметь

$$V(x(t)) \le V(x(t_0))\exp\left[-n^{-2}\alpha^{-2}\beta^{-2}m_1^2(t-t_0)\right]$$

С учетом последнего неравенства из (16) получаем

$$\|x(t)\|^2 \le n\alpha^2 V(x(t_0))\exp\left[-n^{-2}\alpha^{-2}\beta^{-2}m_1^2(t-t_0)\right] \text{ при } t \ge t_0$$

или так как из (13) следует

$$V(x(t_0)) \le n\alpha^2 m_1^{-2}\|x_0\|^2$$

то можем записать

$$\|x(t)\|^2 \le n^2\alpha^4 m_1^{-2}\|x(t_0)\|^2\exp\left[-n^{-2}\alpha^{-2}\beta^{-2}m_1^2(t-t_0)\right]$$

Откуда при $t \ge t_0$ имеем

$$\|x(t)\| \le Q\|x(t_0)\|\exp[-p(t-t_0)] \tag{18}$$

где $Q = \dfrac{n\alpha^2}{m_1}$, $p = \dfrac{m_1^2}{2n^2\alpha^2\beta^2}$, а $\|x(t_0)\|$ — достаточно мала.

Выполнение неравенства (18) означает экспоненциальная устойчивость тривиального решения системы (4).

Теорема доказана.

Таким образом, когда $\omega(t) \ge 1$ на $[t_0,\infty)$ при выполнении условий (6) и (7) тривиальное решение неавтономной системы (4) (т. е. невозмущенный процесс) одновременно и асимптотически K_Δ^ω-устойчиво, и экспоненциально устойчиво при $t \to +\infty$.

Следующая теорема показывает, когда из асимптотической K_Δ^ω-устойчивости тривиального решения неавтономной системы (4) следует ее экспоненциальная устойчивость.

Теорема 2. Если в области (5) функция $X(t,x)$ обладает ограниченными частными производными по координатам вектора x, тривиальное решение уравнения (4) асимптотически K_λ^∞-устойчиво при $t \to +\infty$ и существует функция Ляпунова $V(t,x)$, удовлетворяющая всем условиям теоремы об асимптотической K_λ^∞-устойчивости [1], то тривиальное решение этого уравнения экспоненциально устойчиво при $t \to +\infty$.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены, т. е. в уравнении (4) функция $X(t,x)$ обладает ограниченным частным производным по координатам вектора x в области (5) и существует положительно определенная эрмитова форма

$$V(t,x) = (B(t)x, x) \quad \left(B(t) = G^{-1*}(t)G^{-1}(t)\right) \tag{19}$$

где

$$n^{-1} SpB^{-1}(t) = \omega^2(t) \le \omega_0^2 < \infty \text{ на } [t_0, \infty)$$

полная производная которой по времени t, составленная в силу уравнения (4), является отрицательно определенной эрмитовой формой в области (5)

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(3.2.1)} = (\dot{B}(t)x, x) + (\operatorname{grad} V, X) \tag{20}$$

В [2] при $t \in [t_0, \infty)$ доказаны неравенства

$$n^{-1}\omega_0^{-2}\|x\|^2 \le V(t,x) \le n\,\omega_0^2 m^{-2}\|x\|^2 \tag{21}$$

$$\|B(t)\| \le n\,\omega_0^2 m^{-2} \tag{22}$$

Так как $\operatorname{grad} V = 2B(t)x$, то в силу (22) имеем

$$\|\operatorname{grad} V\| \le 2n\,\omega_0^2 m^{-2}\|x\|, \quad t \in [t_0, \infty) \tag{23}$$

Поскольку из ограниченности частных производных функции $X(t,x)$ по координатам вектора x в $\Re_\lambda^n$ следует выполнение условия Липшица

$$\|X(t,x) - X(t,y)\| \le M\|x - y\|, \quad x, y \in \Re_\lambda^n$$

то при $y = 0$ с учетом $X(t,0) = 0$ имеем на $[t_0, \infty)$

$$\|X(t,x)\| \le M\|x\| \tag{24}$$

Из неравенств (23) и (24) соответственно следует, что на $[t_0, \infty)$ выполняются неравенства

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} \le \frac{2n\omega_0^2}{m^2}\|x\|, \quad X_i(t,x) \le M\|x\| \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

Для первого слагаемого в правой части (20) имеем на $[t_0, \infty)$ неравенство

$$\lambda_{\min}(\dot{B}(t))\|x\|^2 \le (\dot{B}(t)x, x) \le \lambda_{\max}(\dot{B}(t))\|x\|^2 \tag{26}$$

где $\lambda_{\min}\left(\dot{B}(t)\right)$ и $\lambda_{\max}\left(\dot{B}(t)\right)$ – соответственно минимальные и максимальные характеристические корни матрицы $\dot{B}(t)$ в точке $t \in \left[t_0, \infty\right)$. С учетом неравенства (25) и (26), из (20) в области (5) получаем неравенство

$$\dot{V}(t,x)_{(3.2.1)} \le \left[\lambda_{\max}\left(\dot{B}(t)\right) + 2n^2\omega_0^2 m^{-2} M\right]\|x\|^2 \tag{27}$$

Так как функция $V(t,x)$ в области (5) удовлетворяет всем условиям теоремы об асимптотической K_Δ^ω-устойчивости, а именно – функция $\dot{V}(t,x)_{(3.2.1)}$ отрицательно определенная, то из (27) в области (5) следует неравенство

$$\dot{V}(t,x)_{(3.2.1)} \le -c\|x\|^2 \quad (0 < c = \text{const}\ ) \tag{28}$$

т. е.

$$\lambda_{\max}\left(\dot{B}(t)\right) + 2n^2\omega_0^2 m^{-2} M \le -c$$

или

$$\lambda_{\max}\left(\dot{B}(t)\right) \le -\left(c + 2n^2\omega_0^2 m^{-2} M\right)\ t \in \left[t_0, \infty\right) \tag{29}$$

В силу неравенств (21), (23) и (28) тривиальное решение уравнения (4) (невозмущенный процесс) экспоненциально устойчиво при $t \to +\infty$, потому что, как известно [4], если функция $X(t,x)$ непрерывна по t и x, имеет непрерывные и ограниченные частные производные по координатам вектора x, то для существования функции $V(t,x)$, удовлетворяющей условиям (21), (23), (28), необходимо и достаточно, чтобы тривиальное решение уравнения (4) (т. е. невозмущенный процесс) было экспоненциально устойчиво. Теорема доказана.

Заметим, что для выполнения неравенства (28) на $\left[t_0, \infty\right)$ достаточно, чтобы на $\left[t_0, \infty\right)$ выполнялось неравенство (29), т. е. все собственные значения матрицы $\dot{B}(t)$ были меньше некоторого отрицательного числа на $\left[t_0, \infty\right)$, т. е.

$$\lambda_i\left(\dot{B}(t)\right) < -\left(c + 2n^2\omega_0^2 m^{-2} M\right)\ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{30}$$

Из (30) следует, что на $\left[t_0, \infty\right)$ выполняется неравенство

$$Sp\dot{B}(t) \le -n\left(c + 2n^2\omega_0^2 m^{-2} M\right) \tag{31}$$

хотя из (31), вообще говоря, не следует (30). Интегрируя неравенство (31) в пределах $\left[t_0, t\right]$ $\left(t \in \left[t_0, \infty\right)\right)$, получим

$$\frac{SpB(t) - SpB(t_0)}{t - t_0} \le -n\left(c + \frac{2n^2\omega_0^2}{m^2} M\right) \tag{32}$$

Таким образом, получили, что если от асимптотической K_Δ^ω-устойчивости тривиального решения уравнения (4) следует его экспоненциальная устойчивость при $t \to +\infty$, то след матрицы $B(t)$ функции Ляпунова этого уравнения на $[t_0, \infty)$ удовлетворяет соотношению (32). Этот факт можно считать свойством матрицы функции Ляпунова в данном случае.

Затем неравенство (32) можем записать в форме

$$\frac{\frac{1}{n} SpB(t) - \frac{1}{n} SpB(t_0)}{t - t_0} \le -\left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right)$$

или

$$\frac{\omega^2(t) - \omega^2(t_0)}{t - t_0} \le -\left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right)$$

Если функция $\omega(t)$ дифференцируема на $[t_0, \infty)$, то по теореме Лагранжа:

$$\frac{\omega^2(t) - \omega^2(t_0)}{t - t_0} = 2\omega(t_1)\omega'(t_1), \quad t_0 < t_1 < t$$

с учетом которого имеем

$$2\omega(t_1)\omega'(t_1) \le -\left(c + 2n^2 m^{-2} \omega_0^2 M\right)$$

В силу произвольности интервала $[t_0, t)$ на $[t_0, \infty)$ имеем

$$\omega'(t) \le -\frac{1}{2\omega(t)} \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right)$$

Из неравенства $0 < \omega(t) \le \omega_0 < \infty$ на $[t_0, \infty)$ имеем

$$\frac{1}{2\omega_0} \le \frac{1}{2\omega(t)}$$

откуда

$$-\frac{1}{2\omega(t)} \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right) \le -\frac{1}{2\omega_0} \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right)$$

С учетом последнего неравенства можем записать

$$\omega'(t) \le -\frac{1}{2\omega_0} \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right) < 0 \text{ на } [t_0, \infty) \quad (33)$$

Из (33) следует, что положительная функция $\omega(t)$ на $[t_0, \infty)$ монотонно убывает.

Таким образом, получили, что если из асимптотической K_S^m-устойчивости невозмущенного процесса следует его экспоненциальная устойчивость, то положительная функция $\omega(t)$ убывает на $[t_0, \infty)$, т.е. монотонное убывание функции $\omega(t)$ на $[t_0, \infty)$ необходимо, но не достаточно, чтобы из асимптотической K_{Δ}^{μ}-устойчивости невозущенного процесса следовала его экспоненциальная устойчивость

ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К. А., Аванян В. Т. К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. Методы теории дифференциальных уравнений и их приложение. // Тематический сб. науч. трудов МАИ 1975. Вып. 339. С. 5-11.
2. Аванян В. Т., Аванян М. В. Об обратимости основных теорем о K_{Δ}^{μ}-устойчивости. // Вестник "МАНЕБ" 2004. Т. 9. № 8. С. 237-240.
3. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости на заданном интервале времени.// ПММ. 1977. Т. 41. № 5. С. 844-849.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 232 с.

Ереванский Госуниверситет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
14.11.2003