ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №4, 2005 Механика

УДК 539.3

# ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Мелкумян А. С.

**Ա. Ս. Մելքումյան**

**Պիեզոէլեկտրական միջավայրում կիսաանվերջ ճաքի դինամիկական տարածումը հաստատուն արագությամբ**

Քվազիհիպերբոլական մոտավորությամբ ուսումնասիրված է պիեզոէլեկտրական միջավայրում կիսաանվերջ ճաքի հաստատուն արագությամբ դինամիկական տարածման խնդիրը։ Վիներ-Հոպֆի մեթոդի կիրառմամբ խնդիրը լուծված է փակ ձևով։ Ուսումնասիրված են լարումների և էլեկտրական զույգ ինդուկցիայի ինտենսիվության գործակիցների կախվածությունները ճաքի տարածման արագությունից և էլեկտրաքիմիական կապի գործակցից։ Ապացուցված է, որ երբ ճաքի տարածման արագությունը ձգտում է Բլյոստեյն-Գուլյաևի մակերևույթային ալիքի տարածման արագությանը, լարումների ինտենսիվության գործակիցը ձգտում է զրոյի։ Ցույց է տրված նաև էլեկտրաքիմիական կապի գործակցի կարևոր ազդեցությունը մեխանիկական էներգիան էլեկտրականի փոխակերպման վրա։ Բերված են թվային հաշվարկներ։

**A. S. Melkumyan**

**Dynamic propagation of a semi-infinite crack with constant speed in piezoelectric medium**

In quasi-hyperbolic approximation the problem of dynamic propagation of a semi-infinite crack with constant speed in piezoelectric medium is investigated. Adopting the Wiener-Hopf method the problem is solved in closed form. Dependences of the dynamic stress intensity factor and the dynamic electric displacement intensity factor on crack propagation speed and on electromechanical coupling coefficient are investigated. It is proved that when the crack propagation speed tends to the Bleustein-Gulyayev surface wave speed, the dynamic stress intensity factor tends to zero. The important impact of the electromechanical coupling coefficient on the transformation of mechanical energy to electrical one is also shown. Numerical analysis is presented.

В квазигиперболическом приближении исследована задача динамического распространения полубесконечной трещины с постоянной скоростью в пьезоэлектрическом пространстве. Применением метода Винера-Хопфа задача решена в замкнутом виде. Изучены зависимости коэффициентов интенсивности напряжения и электрической индукции от скорости распространения трещины и от коэффициента электромеханической связи. Доказано, что когда скорость распространения трещины стремится к скорости распространения поверхностной волны Блюстейна-Гуляева, коэффициент интенсивности напряжений стремится к нулю. Показано также важное влияние коэффициента электромеханической связи на преобразование механической энергии в электрическую. Приведены численные исследования.

1. Задачи динамического распространения трещин представляют особый интерес. Плоские и антиплоские задачи о распространении трещин в разных структурах, в том числе при наличии внешних полей, анизотропии и неоднородности, были рассмотрены в работах [1]-[6]. В данной работе рассматривается задача динамического распространения полубесконечной трещины в пьезоэлектрическом пространстве с постоянной скоростью в квазигиперболическом приближении.

Рассмотрим пьезоэлектрическое пространство класса 6mm гексагональной симметрии с осью симметрии кристалла $OZ$ в декартовой

системе координат $OXYZ$. В пьезоэлектрическом пространстве имеется полубесконечная трещина, расположенная в полуплоскости $y=0,\ x<0,\ -\infty<z<\infty$, которая в момент времени $t=0$ начинает распространяться с постоянной скоростью $v$. Причиной для начала распространения трещины могут служить как волны, дифрагируемые вершиной трещины, так и разные статические силовые воздействия.

Скорость распространения трещины будем считать меньшим скорости распространения поверхностной волны Блюстейна-Гуляева.

Воспользуемся квазигиперболическим приближением для антиплоской задачи пьезоэлектрического материала класса 6mm, при котором имеем представления [7]

$$\vec{u}=\left(0,0,w\left(x,y,t\right)\right) \tag{1}$$

$$\vec{E}=\left(-\frac{\partial\varphi\left(x,y,t\right)}{\partial x},-\frac{\partial\varphi\left(x,y,t\right)}{\partial y},0\right) \tag{2}$$

следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}=0 \tag{4}$$

а также соотношения:

$$\sigma_{xz}=\tilde{c}_{44}\frac{\partial w}{\partial x}+e_{15}\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5}$$

$$\sigma_{yz}=\tilde{c}_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{6}$$

$$D_x=e_{15}\left(1-C_*\right)\frac{\partial w}{\partial x}-\varepsilon_{11}\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{7}$$

$$D_y=e_{15}\left(1-C_*\right)\frac{\partial w}{\partial y}-\varepsilon_{11}\frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{8}$$

где

$c_2=s_2^{-1}=1/\sqrt{\varepsilon_{11}\mu_{11}}$ – скорость распространения акустической волны,

$c_1=s_1^{-1}=\sqrt{c_{44}/\rho}$ – скорость распространения электрической волны,

$k_*=e_{15}\sqrt{C_*/\left(\varepsilon_{11}\tilde{c}_{44}\right)}$ – коэффициент электромеханической связи при квазигиперболическом приближении.

далее

$C_*=c^2/\left(c^2-c_1^2\right)$, $\tilde{c}_{44}=c_{44}+\left(e_{15}^2/\varepsilon_{11}\right)$, $\tilde{\tilde{c}}_{44}=\tilde{c}_{44}\left[1-\left(1-C_*\right)e_{15}^2/\left(\tilde{c}_{44}\varepsilon_{11}\right)\right]$

и введена функция

$$\psi\left(x,y,t\right)=\varphi\left(x,y,t\right)-e_{15}C_*\varepsilon_{11}^{-1}w\left(x,y,t\right) \tag{9}$$

которая распространяет известное обозначение Блюстейна на случай квазигиперболического приближения.

Исходя из линейности задачи и считая, что соответствующая задача для нераспространяющейся трещины уже решена, имеем, что достаточно решить задачу динамического распространения трещины, на берегах которой в каждый момент времени $t>0$ на открывшийся участок трещины $y=0,\ x\in[0,vt]$ действуют заданные напряжения $\Lambda(x)$, как показано на фиг. 1.

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (3)-(4) со следующими граничными условиями:

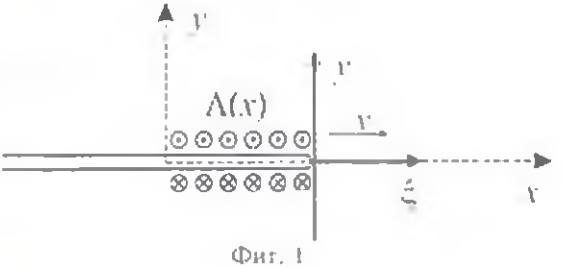
$$\sigma_{yy}(x,+0,t)=\sigma_{yy}(x,-0,t)=-\Lambda(x)H(x)H(vt-x) \text{ при } x<vt \tag{10}$$

$$w(x,+0,t)-w(x,-0,t)=0 \text{ при } x>vt \tag{11}$$

$$D_y(x,+0,t)=D_y(x,-0,t) \tag{12}$$

$$\varphi(x,+0,t)=\varphi(x,-0,t) \tag{13}$$

где $H(t)$ – известная функция Хевисайда.




Фиг. 1

С целью работать с функциями, которые равны нулю в положительной или отрицательной полуосях (для того, чтобы в дальнейшем была применим метод Винера-Хопфа), в (3)-(13) сделаем замену переменной по закону

$$\xi=x-vt \tag{14}$$

в результате чего система уравнений (3)-(14) преобразуется к виду

$$b_s^2(v)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2vs_s^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial t}-s_s^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{15}$$

$$b_l^2(v)\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+2vs_l^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial t}-s_l^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \tag{16}$$

где введены функции

$$u(\xi,y,t)\equiv w(\xi+vt,y,t)=w(x,y,t) \tag{17}$$

$$\phi(\xi,y,t)\equiv\psi(\xi+vt,y,t)=\psi(x,y,t) \tag{18}$$

$$b_s(v)=\sqrt{1-v^2s_s^2} \tag{19}$$

$$b_l(v)=\sqrt{1-v^2s_l^2} \tag{20}$$

Производя замену переменной по закону (14) в соотношениях (5)-(9) и в условиях контакта (10)-(13), после чего производя одностороннее преобразование Лапласа по времени и двухстороннее преобразование Лапласа по координате $x$ согласно формулам

$$f^*(\xi,p)=\int_0^\infty f(\xi,t)\,e^{-pt}\,dt \tag{21}$$

$$f(\xi,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(\xi,p)\,e^{pt}\,dp \tag{22}$$

$$\hat{f}^*(\zeta,p)=\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi,p)\,e^{-p\zeta\xi}\,dx \tag{23}$$

$$f^*(\xi,p)=\frac{p}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\hat{f}^*(\zeta,p)\,e^{p\zeta\xi}\,d\zeta \tag{24}$$

после некоторых упрощений будем иметь следующую систему преобразованных уравнений:

$$\frac{\partial^2\hat{u}^*}{\partial y^2}-p^2\left|s_1^2-2vs_2^2\zeta-b_2^2(v)\zeta^2\right|\hat{u}^*=0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}^*}{\partial y^2}-p^2\left|s_1^2-2vs_2^2\zeta-b_2^2(v)\zeta^2\right|\hat{\phi}^*=0 \tag{26}$$

со следующими условиями контакта на плоскости $y=0$:

$$c_{11}\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial y}\bigg|_{y=+0}+e_{15}\frac{\partial\hat{\phi}^*}{\partial y}\bigg|_{y=+0}=-\frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{pv}\frac{1}{\zeta-v^{-1}}+\hat{\sigma}_{-}^*(\zeta,p) \tag{27}$$

$$\hat{u}^*(\zeta,+0,p)-\hat{u}^*(\zeta,-0,p)=\hat{u}_{-}^*(\zeta,p) \tag{28}$$

$$\hat{\phi}^*(\zeta,+0,p)-\hat{\phi}^*(\zeta,-0,p)=-\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\hat{u}_{-}^*(\zeta,p) \tag{29}$$

$$\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial y}\bigg|_{y=+0}=\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial y}\bigg|_{y=-0} \tag{30}$$

$$\frac{\partial\hat{\phi}^*}{\partial y}\bigg|_{y=+0}=\frac{\partial\hat{\phi}^*}{\partial y}\bigg|_{y=-0} \tag{31}$$

где введена функция

$$\tilde{\Lambda}(z)=\int_0^\infty \Lambda(u)e^{-zu}\,du \tag{32}$$

являющаяся преобразованием Лапласа функции $\Lambda(x)$, представляющая напряжения, действующие на берегах распространяющейся трещины.

Решая уравнения (25) – (26), удовлетворяя условиям уходящей волны и пользуясь симметрией задачи, получаем

$$\hat{u}^*(\zeta,y,p)=\operatorname{sgn}(y)A(\zeta)e^{-p\alpha(\zeta)|y|} \tag{33}$$

$$\hat{\phi}^*(\zeta,y,p)=\operatorname{sgn}(y)B(\zeta)e^{-p\alpha(\zeta)|y|} \tag{34}$$

где введены следующие функции:

$$\alpha(\zeta)=\sqrt{s_1^2-2vs_2^2\zeta-b_2^2(v)\zeta^2} \tag{35}$$

$$e(\zeta)=\sqrt{s_1^2-2vs_2^2\zeta-b_2^2(v)\zeta^2} \tag{36}$$

Однозначная ветвь функции $a(\zeta)$ определяется разрезами $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$, $\mathrm{Re}\,\zeta \geq \dfrac{1}{c_s + v}$ и $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$, $\mathrm{Re}\,\zeta \leq -\dfrac{1}{c_s - v}$ и значением $a(0) = s$.

Аналогично, однозначная ветвь функции $e(\zeta)$ определяется разрезами $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$, $\mathrm{Re}\,\zeta \geq \dfrac{1}{c_s + v}$ и $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$, $\mathrm{Re}\,\zeta \leq -\dfrac{1}{c_s - v}$ и значением $e(0) = s$ (фиг. 2). При данных определениях выполняются условия

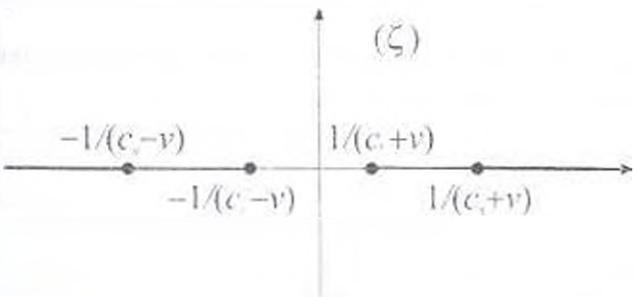
$$\mathrm{Re}\left[a(\zeta)\right] \geq 0 \tag{37}$$

$$\mathrm{Re}\left[e(\zeta)\right] \geq 0 \tag{38}$$

Из (35) и (36) также следует, что

$$a(-\zeta) = a\left(\zeta - \frac{2v}{c_s^2 - v^2}\right) \neq a(\zeta) \tag{39}$$

$$e(-\zeta) = e\left(\zeta - \frac{2v}{c_s^2 - v^2}\right) \neq e(\zeta) \tag{40}$$




Фиг. 2. Точки ветвления и разрезы в комплексной плоскости $\zeta$

Подставляя выражения (33), (34) в преобразованные граничные условия (27)-(31), получаем выражения

$$A(\zeta) = \frac{\hat{\tilde{u}}_1^*(\zeta, p)}{2} \tag{41}$$

$$B(\zeta) = -\frac{e_{31}}{\varepsilon_{11}} C_s \frac{\hat{\tilde{u}}_1^*(\zeta, p)}{2} \tag{42}$$

а также следующее уравнение Винера-Хопфа [8]

$$-\tilde{c}_M \left[1 - k_e^2 h_1 h_1^{-1}\right] K(\zeta) a(\zeta) \frac{\hat{\tilde{u}}_1^*(\zeta, p)}{2} p = \frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{pv} \frac{1}{\zeta - v^{-1}} + \hat{\tilde{\sigma}}_1^*(\zeta, p) \tag{43}$$

где обозначено

$$K(\zeta)=\frac{1}{1-k_s^2h_1b_1^{-1}}\,\frac{a(\zeta)-k_s^2c(\zeta)}{a(\zeta)} \tag{44}$$

Для того, чтобы с помощью интегралов типа Коши факторизовать функцию (44), перейдем от функции $K(\zeta)$ к новой функции $I(\zeta)$ согласно следующему равенству

$$K(\zeta)=\left[\frac{(c_{sp}+v)^{-1}-\zeta}{(c_s+v)^{-1}-\zeta}\right]\left[\frac{(c_{sp}-v)^{-1}+\zeta}{(c_s-v)^{-1}+\zeta}\right]I(\zeta) \tag{45}$$

где

$$c_{sp}=\sqrt{\frac{1-k_s^4}{s_l^2-k_s^4s_t^2}}<c_s \tag{46}$$

представляет собой скорость распространения поверхностной волны Блюстейна-Гуляева в квазигиперболическом приближении.

Важно отметить, что новая функция $I(\zeta)$, в отличие от функции $K(\zeta)$, в комплексной плоскости $\zeta$ разрезами $\operatorname{Im}\zeta=0$, $\operatorname{Re}\zeta\in\left[-\frac{1}{c_s-v},-\frac{1}{c_s-v}\right]$ и $\operatorname{Im}\zeta=0$, $\operatorname{Re}\zeta\in\left[\frac{1}{c_s+v},\frac{1}{c_s+v}\right]$ нули не имеет.

С помощью интегралов типа Коши [9] факторизуя функцию $I(\zeta)$, которая согласно (44) и (45) имеет вид

$$I(\zeta)=\frac{1-k_s^2h_1b_1^{-1}}{a(\zeta)+k_s^2c(\zeta)}\,a(\zeta) \tag{47}$$

получаем следующие выражения для $I_+(\zeta)$ и $I_-(\zeta)$

$$I_+(\zeta;v)=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{c_s+v}}^{\frac{1}{c_{sp}+v}}\arctan\left[k_s^2\frac{b_1(v)\sqrt{\sigma-(c_s-v)^{-1}}\sqrt{\sigma+(c_s+v)^{-1}}}{b_2(v)\sqrt{(c_s-v)^{-1}-\sigma}\sqrt{(c_s+v)^{-1}+\sigma}}\right]\frac{d\sigma}{\sigma+\zeta}\right) \tag{48}$$

$$I_-(\zeta;v)=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{c_s-v}}^{\frac{1}{c_{sp}-v}}\arctan\left[k_s^2\frac{b_1(v)\sqrt{\sigma+(c_s-v)^{-1}}\sqrt{\sigma-(c_s+v)^{-1}}}{b_2(v)\sqrt{(c_s-v)^{-1}+\sigma}\sqrt{(c_s+v)^{-1}-\sigma}}\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\right) \tag{49}$$

где скорость распространения трещины $v$ является параметром.

Из равенств (45), (48) и (49) получаем следующую факторизацию функции $K(\zeta)$

$$K(\zeta)=K_+(\zeta)K_-(\zeta) \tag{50}$$

где

$$K_+(\zeta)=\frac{(c_{sp}-v)^{-1}+\zeta}{(c_s-v)^{-1}+\zeta}I_+(\zeta) \tag{51}$$

$$K_-(\zeta)=\frac{\left(c_{bge}+v\right)^{-1}-\zeta}{\left(c_s+v\right)^{-1}-\zeta}I_-(\zeta) \tag{52}$$

Производя замену переменных интегрирования в выражениях (48) и (49) по формулам

$$\sigma=\frac{\eta}{1-v\eta} \text{ и } \sigma=\frac{\eta}{1+v\eta} \tag{53}$$

соответственно, после некоторых преобразований получаем следующие более простые выражения для $I_+(\zeta;v)$ и $I_-(\zeta;v)$:

$$I_+(\zeta;v)=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{s_e}^{s_s}\arctan\left[k_e^2\frac{\sqrt{\eta^2-s_e^2}}{\sqrt{s_s^2-\eta^2}}\right]\frac{1}{1-v\eta}\frac{d\eta}{(1-\zeta v)\eta+\zeta}\right) \tag{54}$$

$$I_-(\zeta;v)=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{s_e}^{s_s}\arctan\left[k_e^2\frac{\sqrt{\eta^2-s_e^2}}{\sqrt{s_s^2-\eta^2}}\right]\frac{1}{1+v\eta}\frac{d\eta}{(1-\zeta v)\eta-\zeta}\right) \tag{55}$$

Подставляя результат факторизации (50), (51)-(52), (54)-(55) в уравнение Винера-Хопфа (43) и устраняя простой полюс в правой части уравнения, приходим к уравнению

$$-\bar{c}_{44}\left[b_s-k_e^2b_e\right]K_-(\zeta)a_-(\zeta)\frac{\hat{u}_-^*(\zeta,p)}{2}p-\frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{pv}\frac{1}{\left(\zeta-v^{-1}\right)}\frac{1}{K_-\left(v^{-1}\right)a_-\left(v^{-1}\right)}=$$

$$=\frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{pv}\frac{1}{\left(\zeta-v^{-1}\right)}\left(\frac{1}{K_+(\zeta)a_+(\zeta)}-\frac{1}{K_+\left(v^{-1}\right)a_+\left(v^{-1}\right)}\right)+\frac{\hat{\sigma}_-^*(\zeta,p)}{K_+(\zeta)a_+(\zeta)} \tag{56}$$

из которого следует, что

$$\frac{\hat{u}^*(\zeta,p)}{2}=-\frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{p}\sqrt{\frac{v}{1-vs_s}}\frac{1-vs_{bge}}{I_+\left(v^{-1}\right)}\frac{1}{\bar{c}_{44}\left[b_s-k_e^2b_e\right]}\frac{1}{v\left(\zeta-v^{-1}\right)K_-(\zeta)a_-(\zeta)} \tag{57}$$

$$\hat{\sigma}_+^*(\zeta,p)=-\frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{p}\frac{1}{v\left(\zeta-v^{-1}\right)}\left[1-\frac{K_+(\zeta)a_+(\zeta)}{K_+\left(v^{-1}\right)a_+\left(v^{-1}\right)}\right] \tag{58}$$

Подставляя (57) в (41)-(42), (33)-(34) и обращая двухстороннее преобразование Лапласа по $\xi$ согласно формуле обращения (24), получим

$$u^*(\xi,y,p)=-\frac{k(v)\operatorname{sgn}(y)}{\bar{c}_{44}\left(b_s-k_e^2b_e\right)\sqrt{v}}\frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{p}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{\ldots}d\zeta}{\left(\zeta-v^{-1}\right)K_-(\zeta)a_-(\zeta)} \tag{59}$$

$$\phi^*(\xi,y,p)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{k(v)C_f\operatorname{sgn}(y)}{\bar{c}_{44}\left(b_s-k_e^2b_e\right)\sqrt{v}}\frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{p}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{\ldots}d\zeta}{\left(\zeta-v^{-1}\right)K_-(\zeta)a_-(\zeta)} \tag{60}$$

где введена функция

$$k(v)=\frac{1-vs_{bge}}{\sqrt{1-vs_s}}\frac{1}{I_+\left(v^{-1}\right)} \tag{61}$$

После обращения преобразований Лапласа по времени в полученных выражениях (59) и (60) окончательно имеем

$$w(x,y,t) = -\frac{k(v)}{\bar{c}_{44}\left(b_s - k_e^2 b_t\right)\sqrt{v}} \int_0 F(v\eta)\Omega_w\left(x - vt, y, t-\eta; v\right)d\eta \qquad (62)$$

$$\psi(x,y,t) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{k(v)C_f}{\bar{c}_{44}\left(b_s - k_e^2 b_t\right)\sqrt{v}} \int_0 F(v\eta)\Omega_\psi\left(x - vt, y, t-\eta; v\right)d\eta \qquad (63)$$

где введены следующие функции:

$$\Omega_w\left(\xi, y, \tau; v\right) = \mathrm{L}^{-1}_{p\to\tau}\left[\frac{\operatorname{sgn}(y)}{2\pi i}\int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty}\frac{e^{-p[a(\zeta)|y| - \zeta\xi]}d\zeta}{\left(\zeta - v^{-1}\right)K_-(\zeta)a_-(\zeta)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty}\left[\frac{\operatorname{sgn}(y)}{2\pi i}\int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty}\frac{e^{-p[a(\zeta)|y| - \zeta\xi]}d\zeta}{\left(\zeta - v^{-1}\right)K_-(\zeta)a_-(\zeta)}\right]e^{p\tau}dp \qquad (64)$$

$$\Omega_\psi\left(\xi, y, \tau; v\right) = \mathrm{L}^{-1}_{p\to\tau}\left[\frac{\operatorname{sgn}(y)}{2\pi i}\int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty}\frac{e^{-p[a(\zeta)|y| - \zeta\xi]}d\zeta}{\left(\zeta - v^{-1}\right)K_-(\zeta)a_-(\zeta)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty}\left[\frac{\operatorname{sgn}(y)}{2\pi i}\int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty}\frac{e^{-p[a(\zeta)|y| - \zeta\xi]}d\zeta}{\left(\zeta - v^{-1}\right)K_-(\zeta)a_-(\zeta)}\right]e^{p\tau}dp \qquad (65)$$

$$F(l) = \int_0^l \Lambda(x)dx \qquad (66)$$

В выражениях (64) и (65) $\mathrm{L}^{-1}_{p\to\tau}[\cdot]$ – оператор обратного преобразования Лапласа по $t$, определенный выражением (22).

2. Перейдем к исследованию коэффициентов интенсивности напряжений и электрической индукции. Из полученных представлений (59) и (60) для функций $u^*(\xi, y, p)$ и $\phi^*(\xi, y, p)$ после соответствующих вычислений получаем следующее выражение для интенсивности напряжений:

$$K_\sigma(t,v) = F_\sigma(v)S(vt) \qquad (67)$$

и следующее выражение для интенсивности электрической индукции:

$$K_D(t,v) = \frac{e_{15}}{\bar{c}_{44}\left(1 - k_e^2\right)}F_D(v)S(vt) \qquad (68)$$

где

$$F_\sigma(v) = \frac{1 - vs_{bc}}{\sqrt{1 - vs_t}}\frac{1}{I_+\left(v^{-1}\right)} \qquad (69)$$

$$F_D(v)=\left(1-k_e^2\right)\frac{\left(1-C_f\right)b_s(v)+C_f b_r(v)}{I_+\left(v^{-1}\right)\sqrt{1-vs_s}}\frac{1-vs_{bgr}}{b_s(v)-k_e^2 b_r(v)}=$$

$$=\frac{1}{1+k_e^2}\frac{\left(1-C_f\right)b_s(v)+C_f b_r(v)}{I_+\left(v^{-1}\right)\sqrt{1-vs_s}}\frac{b_s(v)+k_e^2 b_r(v)}{1+vs_{bgr}} \tag{70}$$

$$S(h)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^h\frac{\Lambda(x)}{\sqrt{h-x}}dx \tag{71}$$

Обозначая отношение скоростей акустической и электрической волн в пьезоэлектрике через $\rho$,

$$\rho=c_s/c_r \tag{72}$$

после соответствующих вычислений получаем, что

$$\frac{c_{bgr}}{c_s}=\sqrt{\frac{1-k_e^4}{1-k_e^4\rho^2}} \tag{73}$$

$$b_r(v)=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c_{bgr}}\right)^2\frac{1-k_e^4}{1-k_e^4\rho^2}\rho^2} \tag{74}$$

$$b_s(v)=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c_{bgr}}\right)^2\frac{1-k_e^4}{1-k_e^4\rho^2}} \tag{75}$$

Далее из (72) – (75), (54) – (55) и (69) – (70) приходим к заключению, что величины $F_m$ и $F_D$, определенные выше, зависят от трех основных безразмерных величин данной задачи

- отношение скорости распространения трещины к одному из скоростей распространения волн в пьезоэлектрическом пространстве (то есть отношение скорости распространения трещины к скорости распространения акустической, электрической или поверхностной волны).
- коэффициент электромеханической связи,
- отношение скоростей распространения двух волн в пьезоэлектрическом пространстве.

то есть

$$F_\sigma = F_\sigma\left(\frac{v}{c_{bgc}}, k_c, \frac{c_s}{c_l}\right) \tag{76}$$

$$F_D = F_D\left(\frac{v}{c_{bgc}}, k_c, \frac{c_s}{c_l}\right) \tag{77}$$

Из (67), (68) и (76), (77) следует, что как интенсивность напряжений, так и интенсивность электрической индукции, имеют следующую структуру: каждый из них является произведением двух функций, первая из которых зависит от скорости распространения трещины и от свойств пьезоэлектрика и не зависит от сил, действующих на берегах трещины и от расстояния $vt$, пройденного вершиной трещины, а вторая функция, наоборот, зависит только от расстояния $vt$, пройденного вершиной трещины, и от сил $\Lambda(x)$, действующих на берегах трещины.

Далее, из выражений (67)-(71) получаются следующие предельные равенства, характеризующие интенсивность напряжений

$$\lim_{k_c \to 0} F_\sigma(v) = \sqrt{1 - vs_t} \tag{78}$$

$$\lim_{v \to 0} F_\sigma(v) = 1 \tag{79}$$

$$\lim_{v \to c_{bgc}} F_\sigma(v) = 0 \tag{80}$$

и следующие предельные равенства, характеризующие интенсивность электрической индукции.

$$\lim_{k_c \to 0} \frac{e_{15}}{\bar{c}_{44}\left(1 - k_c^2\right)} F_D(v) = 0 \tag{81}$$

$$\lim_{v \to 0} F_D(v) = 1 \tag{82}$$

$$\lim_{v \to c_{bgc}} F_D(v) = \frac{(1 - C_f) h_s\left(c_{bgc}\right) + C_f h_l\left(c_{bgc}\right)}{I_s\left(s_{bgc}\right)\sqrt{1 - c_{bgc} s_t}} \frac{b_s\left(c_{bgc}\right) + k_c^2 b_l\left(c_{bgc}\right)}{2\left(1 + k_c^2\right)} \neq 0 \tag{83}$$

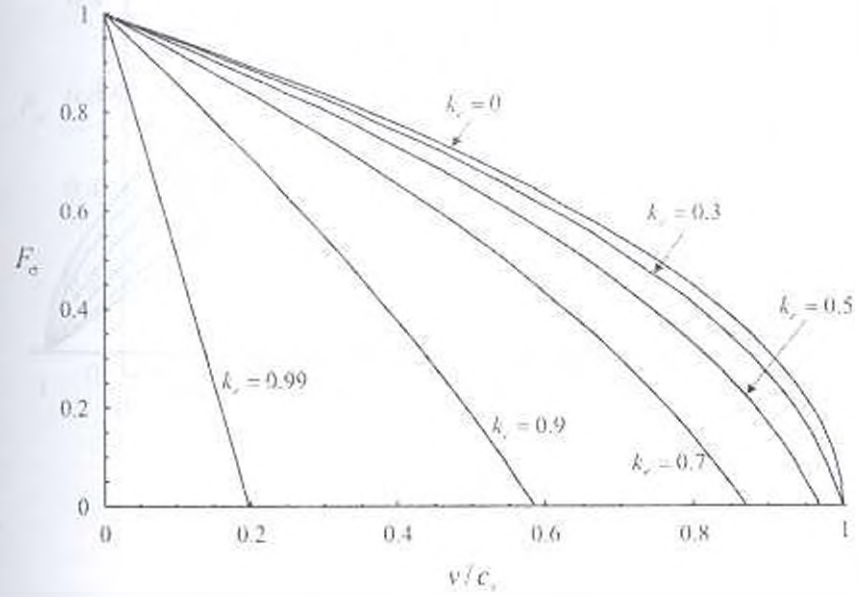
Равенства (78), (81), представляющие случай, когда коэффициент электромеханической связи стремится к нулю, и выражения (67), (68), восстанавливают результат, полученный ранее Костровым [5] для динамического распространения трещины в чисто упругом теле.

Равенства (79) и (82), полученные, когда $v \to 0$, представляют случай, когда трещина распространяется с бесконечно малой скоростью. В этом случае как вся задача, так и выражения коэффициентов интенсивности напряжений и электрической индукции намного упрощаются.

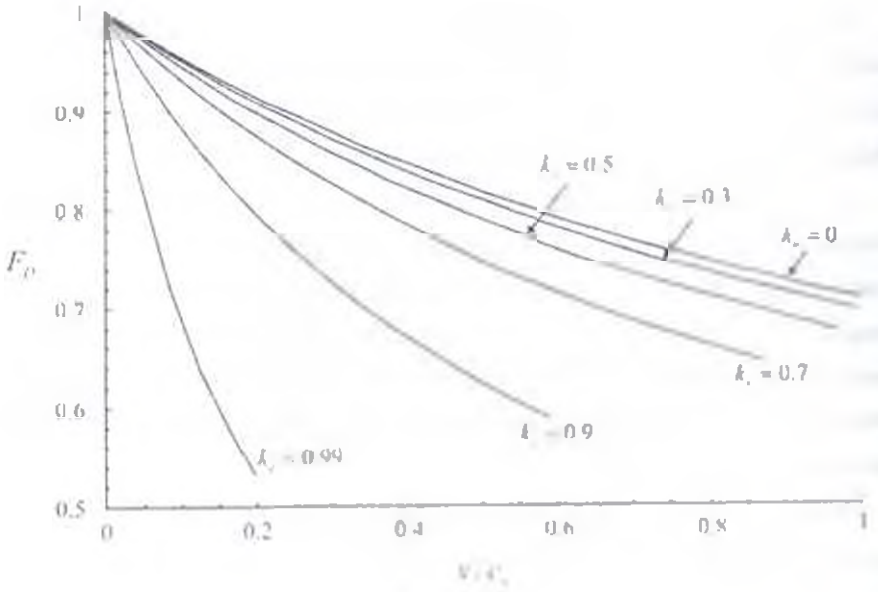
Последние предельные равенства (80) и (83) показывают, что когда скорость распространения трещины приближается к скорости поверхностной волны Блюстейна-Гуляева, коэффициент интенсивности напряжений стремится к нулю, а коэффициент интенсивности электрической индукции имеет конечный предел, отличный от нуля. Это обстоятельство можно объяснить трансформацией акустической энергии в электрическую энергию.

Приведем теперь численные расчеты, показывающие зависимости коэффициентов интенсивностей от отношений $v/c_s$, $v/c_{BG}$ и от коэффициента электромеханической связи $k_e$ (фиг. 3 – фиг. 9).

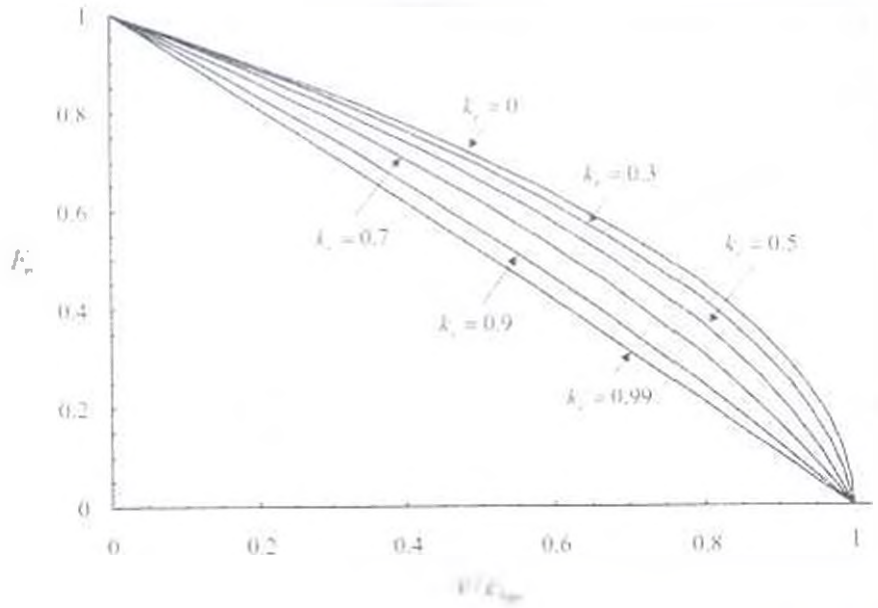
Во время численных расчетов, следуя [1, 10], принималось $\frac{s_1}{s_4} = 0.0001$.



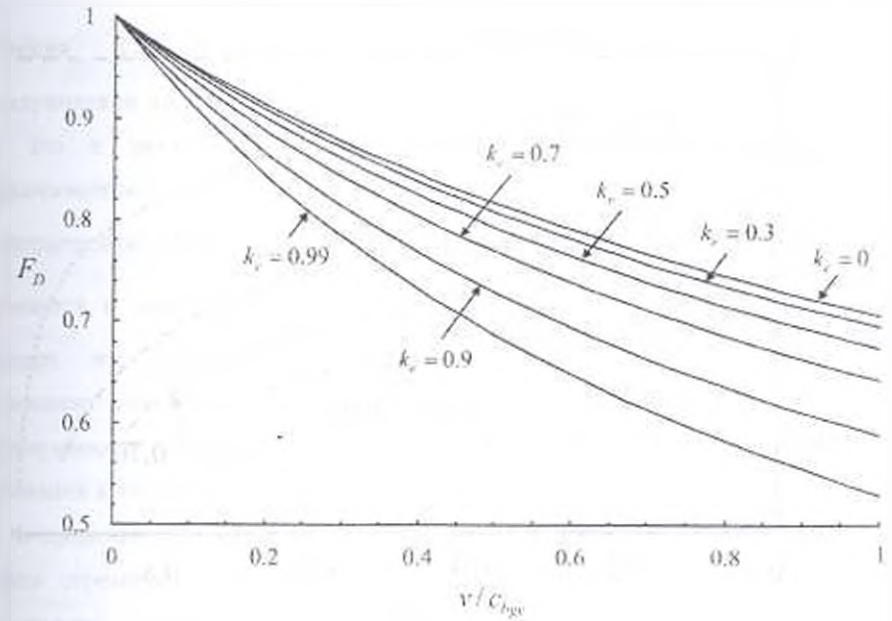

Фиг. 3



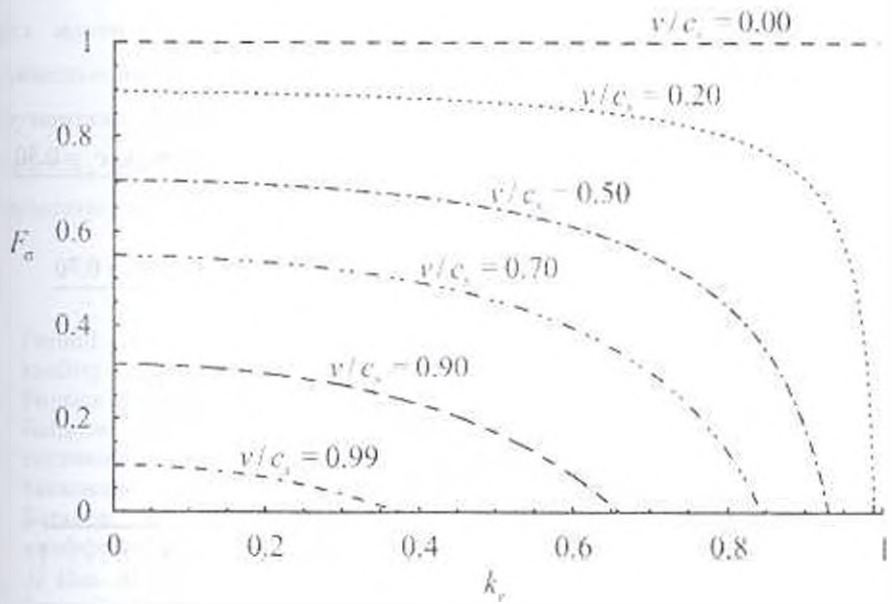
Фиг. 4



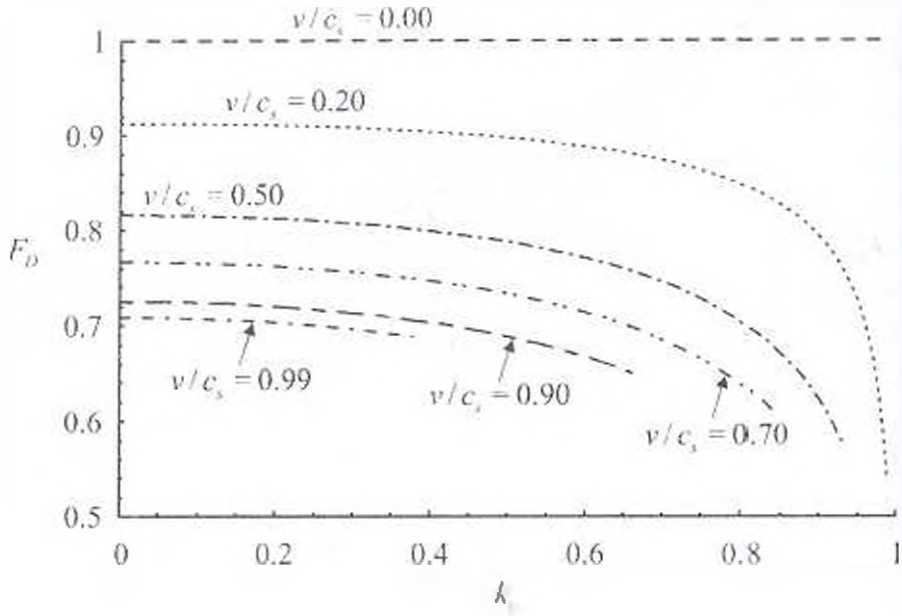
Фиг. 5


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
$F_D$
$k_v = 0.7$
$k_v = 0.5$
$k_v = 0.3$
$k_v = 0$
$k_v = 0.99$
$k_v = 0.9$
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$v/c_{bg}$

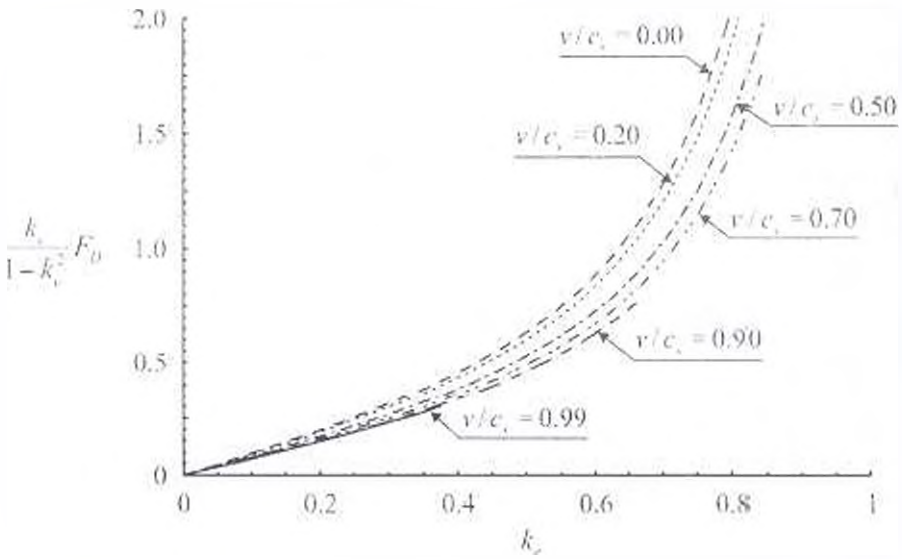
Фиг. 6


$v/c_s = 0.00$
$v/c_s = 0.20$
$v/c_s = 0.50$
$v/c_s = 0.70$
$v/c_s = 0.90$
$v/c_s = 0.99$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
$F_a$
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$k_v$

Фиг. 7




Фиг. 8




Фиг. 9

Из графиков на фиг. 7 и фиг. 9 следует, что с увеличением коэффициента электромеханической связи $k_s$ функция $K_{-}/S(vt)$, определяющая коэффициент интенсивности напряжений, уменьшается, а

функция $K_{II}/S(v)$, определяющая коэффициент интенсивности электрической индукции, увеличивается. Это обстоятельство указывает на то, что с увеличением коэффициента электромеханической связи увеличивается преобразование энергии из механической в электрическую. Заметим также, что когда $k_e$, монотонно увеличиваясь, стремится к значению, при котором $c_{44}(k_e)=v$, из фиг. 7 и фиг. 9 следует, что функция, определяющая интенсивность напряжений, монотонно уменьшаясь стремится к нулю, а функция, определяющая интенсивность электрической индукции, монотонно увеличиваясь, стремится к некоторому конечному значению.

В предельном случае, когда скорость распространения электрической волны стремится к бесконечности, из приведенных здесь результатов получаются соответствующие результаты для квазистатической постановки задачи. Частный квазистатический случай исследованной здесь задачи был рассмотрен Ан и Матага в работе [11], где имеются количественные и качественные противоречия с приведенными здесь результатами. Доказательство того, что результаты Ан и Матага [11] являются неправильными, а также соответствующие правильные результаты, опубликованы в работе [12].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Freund L.B. Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading – I. Constant rate of extension. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. № 20. 1972. pp. 129-140.
2. Багдоев А.Г., Мовсисян А.А. К распространению трещины в составном анизотропном пространстве. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1991. Т. 44. № 5. С. 3 – 7.
3. Багдоев А.Г., Мовсисян А.А. О влиянии магнитного поля на коэффициент интенсивности напряжений для движущейся трещины. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1991. Т. 44. № 3. С. 3 – 6.
4. Leise, T., Walton, J. A general method for solving dynamically accelerating multiple co-linear cracks. // International Journal of Fracture, N 111, 2001, pp. 1 – 16.
5. Kostrov B.V. Unsteady propagation of longitudinal shear cracks. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, N 30, 1966, pp. 1241-1248.
6. Leise, T.L. A general solution method for an anti-plane shear crack dynamically accelerating along a bimaterial interface. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, N 53, 2005, pp. 639 – 653.

7. Li, S. Transient wave propagation in piezoelectric hall space. // Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Physik (ZAMP), N 51, 2000, pp. 236–266.
8. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Изд. иностранной литературы. 1962. 280 с.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. 640 с.
10. Li S. The Electromagneto–acoustic surface wave in a piezoelectric medium: the Bleustein–Gulyaev mode. // Journal of Applied Physics, 1996, N 80(9), pp. 5264–5269.
11. Li S., Mataga P.A. Dynamic Crack Propagation in Piezoelectric Materials – Part I. Electrode Solution. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, N 44, 1996, pp. 1799–1830.
12. Melkumyan A. Comments on "Dynamic crack propagation in piezoelectric materials –Part I. Electrode solution" by Shaofan Li, Peter A. Mataga [J. Mech. Phys. Solids 44 (1996) 1799–1830]. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 53, Issue 8, 2005, pp. 1918-1925.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
7.07.2005