ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №4, 2005 Механика

УДК 539.1

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН МОДУЛЯЦИИ В МАГНИТОУПРУГИХ ПЛАСТИНАХ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ПОДХОДЕ

Багдоев А. Г., Варданян А. В.

Ա. Գ. Բագդոև, Ա. Վ. Վարդանյան
Ոչ գծային ճկման մոդուլյացիայի ալիքների կայունությունը մագնիսաառաձգական սալերում տարածական մոտեցմամբ

Դիտարկված է տարածական մոտեցմամբ գծային հաճախությունների որոշումը մագնիսաառաձգական սալերում կամայական էլեկտրահաղորդականությունների համար. Դիտարկված է ինչպես փոքր մագնիսական դաշտերի դեպք, որոնց համար ստացված են պարզ արտահայտություններ, այնպես էլ կամայական մագնիսական դաշտերի համար, որոնց համար թվային եղանակով լուծված են երկու տրանսցենդենտ հավասարումներ, կառուցված են աղյուսակներ. Ուսումնասիրված է ոչ գծային մոդուլյացիայի ալիքների կայունությունը:

A. G. Bagdoev, A. V. Vardanyan
The stability of nonlinear modulation bending waves in magnetoelastic plates in space treatment

The problem of determination of frequencies of magnetoelastic plates vibrations for arbitrary electroconductivity value and general of connection between initial stresses is considered in space treatment.

Задача колебаний электропроводящих пластин в осредненном классическом подходе рассмотрена в [1-3]. Нелинейные волны модуляции в магнитоупругой пластине рассмотрены в [4]. Все эти исследования проводились в пределах осредненной теории. В [5] выведены уравнения и граничные условия для ферромагнитной как диэлектрической, так и проводящей пластины и получены дисперсионные соотношения по осредненной теории. В [6-8] рассмотрен пространственный подход получения дисперсионных соотношений для магнитоупругих пластин. Для ферромагнитных пластин эти исследования даны в [9].

В настоящей статье выводятся дисперсионные соотношения для магнитоупругих пластин для случая произвольной немалой электропроводности.

Вначале рассмотрена асимптотика для малых полей.

Построены графики для действительной частоты в зависимости от волнового числа. Рассмотрены случаи поперечного и продольного полей. В случае большой или конечной проводимости из полученных соотношений найдены результаты [6-8].

Исследована на основе линейных дисперсионных соотношений [6-8] устойчивость нелинейных волн.

Проведены расчеты частот для случая немалых магнитных полей.

§1. Пространственная задача для поперечного магнитного поля

В пространственной задаче выбираются оси Ox, Oy в средней плоскости невозмущенной пластины, ось z–по нормали к ней. В случае поперечного невозмущенного магнитного поля H_0 для изотропной пластины, если искать решение в виде монохроматической волны $e^{i(\alpha x+\beta y-\omega t)}$, можно убедиться [1-3,8], что частота ω будет функцией от $k=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, т. е. волновая задача будет изотропной. Поэтому при получении дисперсионного соотношения достаточно будет рассматривать плоскую задачу, разыскивая ее решение в виде $e^{i(kx-\omega t)}$, а в полученных для нее окончательных формулах для получения решения пространственной задачи делать указанную замену k на α, β. Пусть невозмущенное магнитное поле H_0 направлено по оси z, u_x, u_z – компоненты перемещения по осям x, z.

$\overline{H} = \overline{H}_0 + \overline{h}$ –вектор магнитного поля, причем для индуцированного поля считается $h_x = H_0 H_x'$, $h_z = H_0 H_z'$

Для квазимонохроматической волны можно написать

$$u_x = \frac{1}{2}U_x(z)e^{i\tau} + k.c.;\ u_z = \frac{1}{2}U_z(z)e^{i\tau} + k.c. \tag{1.1}$$

$$\tau = kx - \omega t;\ H_x' = \frac{1}{2}H_x(z)e^{i\tau} + k.c.;\ H_z' = \frac{1}{2}H_z(z)e^{i\tau} + k.c.$$

Уравнения движения магнитоупругой среды в линейной постановке имеют вид [1-3]

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi}(\mathrm{rot}\,\overline{h}\times\overline{H}_0)_x,\\ \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi}(\mathrm{rot}\,\overline{h}\times\overline{H}_0)_z\end{aligned} \tag{1.2}$$

где ρ –плотность.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad \sigma_z = \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z}\\ \sigma_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{1.3}$$

Уравнение электромагнитной индукции

$$\frac{\partial\overline{h}}{\partial t} = \mathrm{rot}\left[\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\times\overline{H}_0\right] + \nu_m\Delta\overline{h} \tag{1.4}$$

Здесь σ –электропроводность, $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ –магнитная вязкость, c –скорость света

В поперечном магнитном поле уравнения (1.2)–(1.4) в переменных (1.1) дают

$$\begin{aligned}&\zeta = 1 - \frac{b^2}{a^2}\\ &\frac{b^2}{a^2}\frac{d^2U_x}{dz^2} - k^2U_x + \frac{\omega^2}{a^2}U_x + ik\zeta\frac{dU_z}{dz} = -\frac{a_0^2}{a^2}\left(\frac{dH_x}{dz} - ikH_z\right)\\ &-i\omega H_x + \nu_m k^2 H_x - \nu_m\frac{d^2H_x}{dz^2} = -ik\frac{dU_x}{dz}\\ &ik\zeta\frac{dU_x}{dz} + \frac{d^2U_z}{dz^2} - \frac{b^2}{a^2}k^2U_z + \frac{\omega^2}{a^2}U_z = 0\\ &-i\omega H_z + \nu_m k^2 H_z - \nu_m\frac{d^2H_z}{dz^2} = -\omega kU_x\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $a_0^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}$, $a^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, $b^2 = \frac{\mu}{\rho}$

В пространственном подходе [6-8] решение можно искать в виде

$$U_x = A_i\,\mathrm{ch}\,\nu_i z,\ U_z = B_i\,\mathrm{sh}\,\nu_i z,\ H_x = C_i\,\mathrm{ch}\,\nu_i z,\ H_z = D_i\,\mathrm{sh}\,\nu_i z \tag{1.6}$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Из (1.5), (1.6) можно получить связь между всеми константами через $B_{i=1,3}$ в форме

$$C_{1,2,3} = -\frac{i\omega\nu_{1,2,3}B_{1,2,3}}{X_{1,2,3}}, D_{1,2,3} = -\frac{\omega k B_{1,2,3}}{X_{1,2,3}}, X_{1,2,3} = -i\omega + \nu_m k^2 - \nu_m \nu_{1,2,3}^2$$

$$ik\zeta B_{1,2,3}\nu_{1,2,3} + \left(\nu_{1,2,3}^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)A_{1,2,3} = 0 \tag{1.7}$$

$$\left(\frac{b^2}{a^2}\nu_{1,2,3}^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)B_{1,2,3} + ik\zeta A_{1,2,3}\nu_{1,2,3} = -\frac{a_1^2}{a^2}\left(C_{1,2,3}\nu_{1,2,3} - ikD_{1,2,3}\right)$$

Из (1.7) для $\bar{\nu} = \nu_{1,2,3}(\omega)$ можно найти уравнение

$$\frac{b^2}{a^2}\bar{\nu}^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} + \zeta^2\frac{\bar{\nu}^2k^2}{\bar{\nu}^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} = -\frac{a_1^2}{a^2}\frac{\bar{\nu}^2 - k^2}{1 + i\frac{k^2 - \bar{\nu}^2}{\omega}\nu_m} \tag{1.8}$$

(1.8) является кубичным уравнением для $\bar{\nu}^2$, решение которого достаточно громоздкое. Поэтому принимается $\frac{a_1^2}{b^2} << 1$ и раскладается решение по степеням $\frac{a_1^2}{b^2}$.

Тогда получится

$$\nu_1^{(0)2} = k^2 - \frac{\omega^2}{a^2},\ \nu_2^{(0)2} = k^2 - \frac{\omega^2}{b^2}$$

$$\nu_1^2 = \nu_1^{(0)2} + \frac{a_1^2k^2}{a^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2\theta}\right),\ \nu_2^2 = \nu_2^{(0)2} - \frac{a_1^2k^2}{a^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{b^2\theta}\right) + \frac{a_1^2\omega^2}{b^4} \tag{1.9}$$

$$1 - \frac{k^2 - \nu_3^2}{\theta} = \frac{a_1^2}{b^2}\frac{\zeta k^2 - \theta}{\theta},\ \theta = \frac{i\omega}{\nu_m},\ \nu_3^{(0)2} = k^2 - \theta$$

$\nu_1^{(0)}$ есть значение ν_1 при $a_1^2 = 0$.

Для того, чтобы вывести дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ для изгибных волн в пространственной постановке, нужно к (1.5) добавить граничные условия на поверхности пластины $z = \pm\frac{h}{2}$ с диэлектриком $\sigma_1 = \sigma_{1*} = 0$ и условия непрерывности $\tilde{h}$. Вне пластины в диэлектрике индуцированное магнитное поле записывается в виде

$$\tilde{h}_1 = \frac{1}{2}\left(C_1^1 e^{\theta_1} + kc\right),\ \tilde{h}_2 = \frac{1}{2}\left(C_2^1 e^{\theta_1} + kc\right),\ \theta_1 = i\tau + kz \tag{1.10}$$

Используя также уравнение $\frac{\partial\tilde{h}_1}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{h}_2}{\partial z} = 0$ и условия $z = \frac{h}{2},\ h_1 = \tilde{h}_1,\ h_2 = \tilde{h}_2,\ iC_1^1 = C_2^1,\ C_1^1 e^{-k\frac{h}{2}} = C_1 \operatorname{ch}\nu_1\frac{h}{2},\ C_2^1 e^{-k\frac{h}{2}} = D_1 \operatorname{sh}\nu_1\frac{h}{2}$ можно указанные граничные условия записать в виде

$$iC_1 \operatorname{ch}\nu_1\frac{h}{2} = D_1 \operatorname{sh}\nu_1\frac{h}{2},\ D_1 = -C_1\frac{k}{\nu_1}i$$

$$C_1 \operatorname{ch}\nu_1\frac{h}{2} = -kC_1\nu_1^{-1} \operatorname{sh}\nu_1\frac{h}{2},\ B_1\nu_1 \operatorname{ch}\nu_1\frac{h}{2} + ikA_1 \operatorname{ch}\nu_1\frac{h}{2} = 0 \tag{1.11}$$

$$A_j \nu_j \operatorname{sh} \nu_j \frac{h}{2} + \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} - ikB_j \operatorname{sh} \nu_j \frac{h}{2} = 0$$

где снова проведено суммирование по $j = 1,2,3$

В (1.11) нужно подставить (1.7). Уравнение, полученное приравниванием к нулю определителя системы (1.11), дает

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1+\dfrac{k}{\nu_1}\operatorname{th}\nu_1\dfrac{h}{2}}{X_1} & \dfrac{1+\dfrac{k}{\nu_2}\operatorname{th}\nu_2\dfrac{h}{2}}{X_2} & \dfrac{1+\dfrac{k}{\nu_3}\operatorname{th}\nu_3\dfrac{h}{2}}{X_3} \\ 1+\dfrac{\zeta}{\Delta_1}k^2 & 1+\dfrac{\zeta}{\Delta_2}k^2 & 1+\dfrac{\zeta}{\Delta_3}k^2 \\ \dfrac{\operatorname{th}\nu_1\dfrac{h}{2}}{\nu_1}\Gamma_1 & \dfrac{\operatorname{th}\nu_2\dfrac{h}{2}}{\nu_2}\Gamma_2 & \dfrac{\operatorname{th}\nu_3\dfrac{h}{2}}{\nu_3}\Gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.12)$$

где

$$\Delta_j = \nu_j^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{\omega^2}{a^2},\ X_j = 1 + i\frac{k^2 - \nu_j^2}{\omega}\nu_m,\ \Gamma_j = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} - \frac{\zeta\nu_j^2}{\Delta_j} \qquad (1.13)$$

Уравнение (1.12) дает

$$\frac{1+\dfrac{k}{\nu_3}\operatorname{th}\nu_3\dfrac{h}{2}}{X_3}\left(\operatorname{th}\nu_2\frac{h}{2}\Gamma_2\frac{1+\dfrac{\zeta}{\Delta_1}k^2}{\nu} - \operatorname{th}\nu_1\frac{h}{2}\Gamma_1\frac{1+\dfrac{\zeta}{\Delta_2}k^2}{\nu_1}\right) -$$

$$-\left(1+\frac{\zeta}{\Delta_3}k^2\right)\left(\frac{\operatorname{th}\nu_2\dfrac{h}{2}}{\nu_2}\Gamma_2\frac{1+\dfrac{k}{\nu_1}\operatorname{th}\nu_1\dfrac{h}{2}}{X_1} - \frac{\operatorname{th}\nu_1\dfrac{h}{2}}{\nu_1}\Gamma_1\frac{1+\dfrac{k}{\nu_2}\operatorname{th}\nu_2\dfrac{h}{2}}{X_2}\right) + \qquad (1.14)$$

$$+\frac{\operatorname{th}\nu_3\dfrac{h}{2}}{\nu_3}\Gamma_3\left\{\left(1+\frac{\zeta}{\Delta_2}k^2\right)\frac{1+\dfrac{k}{\nu_1}\operatorname{th}\nu_1\dfrac{h}{2}}{X_1} - \left(1+\frac{\zeta}{\Delta_1}k^2\right)\frac{1+\dfrac{k}{\nu_2}\operatorname{th}\nu_2\dfrac{h}{2}}{X_2}\right\} = 0$$

В силу (1.9)

$$X_j = \frac{a^2}{b^2}\frac{\zeta k^2 - \theta}{\theta} \qquad (1.15)$$

Тогда (1.14) примет вид

$$-\frac{1}{Ra_*^2}b^2\left\{\left(1+\frac{\zeta}{\Delta_3}k^2\right)\frac{\operatorname{th}\nu_2\dfrac{h}{2}}{\nu_2}\Gamma_2 - \left(1+\frac{\zeta}{\Delta_2}k^2\right)\frac{\operatorname{th}\nu_1\dfrac{h}{2}}{\nu_1}\Gamma_1\right\} - \left(1+\frac{\zeta}{\Delta_3}k^2\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{X_1}\frac{\operatorname{th}\nu_2\dfrac{h}{2}}{\nu_2}\Gamma_2 - \frac{1}{X_2}\frac{\operatorname{th}\nu_1\dfrac{h}{2}}{\nu_1}\Gamma_1\right) + \frac{\operatorname{th}\nu_3\dfrac{h}{2}}{\nu_3}\Gamma_3\left(\frac{1+\dfrac{\zeta}{\Delta_2}k^2}{X_1} - \frac{1+\dfrac{\zeta}{\Delta_1}k^2}{X_2}\right) = 0 \qquad (1.16)$$

$$R = -\frac{\zeta k^2 - \theta}{\theta}\left(1+\frac{k}{\nu_3}\operatorname{th}\nu_3\frac{h}{2}\right)$$

Разделим (1.16) на $\left(1+\frac{\zeta}{\Delta_2}k^2\right)\frac{\Gamma_1}{\nu_1}\operatorname{th}\nu_2\frac{h}{2}$, получим уравнение:

$$-\frac{\tau}{Ra_1^2}b^2\left(\frac{\operatorname{th}\nu_1\frac{h}{2}}{\operatorname{th}\nu_2\frac{h}{2}}-N\frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{1+\frac{\zeta}{\Delta_1}k^2}{1+\frac{\zeta}{\Delta_2}k^2}\right)+\left(1+\frac{\zeta}{\Delta_3}k^2\right)\left(\frac{1}{X_1}\frac{\nu_1}{\nu_2}N\frac{1}{1+\frac{\zeta}{\Delta_2}k^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{X_2}\frac{\operatorname{th}\nu_1\frac{h}{2}}{\operatorname{th}\nu_2\frac{h}{2}}\frac{1}{1+\frac{\zeta}{\Delta_2}k^2}\right)-\frac{\operatorname{th}\nu_2\frac{h}{2}}{\nu_2}\Gamma_2-\frac{\nu_1}{\operatorname{th}\nu_2\frac{h}{2}\Gamma_1}\left(\frac{1}{X_1}-\frac{1}{X_2}\frac{1+\frac{\zeta}{\Delta_1}k^2}{1+\frac{\zeta}{\Delta_2}k^2}\right)=0 \qquad (1.17)$$

$$N=\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$$

С учетом (1.13) в основных порядках получится

$$N\frac{1+\zeta k^2/\Delta_1}{1+\zeta k^2/\Delta_2}=1-\frac{\omega^4}{4b^4k^4}-\frac{\omega^2a_1^2}{4b^2a^2k^2\zeta}-\frac{\omega^2a_1^2}{4b^4k^2\zeta} \qquad (1.18)$$

Исследуем общий случай произвольной электропроводности и произвольных θ, когда $\nu_1 h$ конечное.

В уравнении (1.17) первое слагаемое после сокращения на $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ будет в основном порядке с учетом (1.18).

$$\frac{-b^2}{Ra_1^2}\left(1-\frac{1}{12}\omega^2b^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-1+\frac{\omega^4}{4b^4k^4}-\frac{\omega^2a_1^2}{4b^2a^2k^2\zeta}+\frac{\omega^2a_1^2}{4b^4k^2\zeta}\right) \qquad (1.19)$$

Второе слагаемое в (1.17) после сокращения на $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ с учетом

$$X_1\approx 1+\frac{i\omega}{a^2}\nu_m,\quad X_2\approx 1+\frac{i\omega}{b^2}\nu_m,\quad \nu_2^2\approx k^2-\theta,\quad 1+\frac{\zeta}{\Delta_3}k^2\approx 2,\quad 1+\frac{\zeta}{\Delta_2}k^2=1+\frac{k^2}{\frac{1}{\zeta}-\frac{\omega^2}{b^2}}$$

и (1.13), (1.15) будет

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{\zeta k^2}{\zeta k^2-\theta}\right)\left(\frac{\omega^2}{2b^2k^2}+i\omega\nu_m\frac{\zeta}{b^2}\right)=-\frac{\omega^2}{4b^2\theta k^2}\frac{(2\zeta k^2-\theta)^2}{\zeta k^2-\theta} \qquad (1.20)$$

Третье слагаемое в (1.17), поскольку

$$\Gamma_1\approx-\frac{b^2}{a^2}\frac{2\zeta k^2-\theta}{\zeta k^2-\theta},\quad \Gamma_1\approx-2\frac{b^2}{a^2} \qquad (1.21)$$

будет

$$-\frac{\operatorname{th}\nu_1\frac{h}{2}}{\nu_1}\frac{b^2}{a^2}\frac{2\zeta k^2-\theta}{\zeta k^2-\theta}\frac{2}{h}\frac{a^2}{2b^2}\left(\frac{\omega^2}{2b^2k^2}-\frac{\omega^2}{b^2\theta}\zeta\right) \qquad (1.22)$$

где $\nu_1=\sqrt{k^2-\theta}$. Тогда (1.17) примет вид

$$\left(1+\frac{k}{\nu_1}\operatorname{th}\nu_1\frac{h}{2}\right)\frac{\theta b^2}{a_1^2(\zeta k^2-\theta)}\left(-\frac{\omega^2}{4b^4k^4}-\frac{h^2\zeta}{12b^2}-\frac{a_1^2}{4b^2a^2k^2\zeta}+\frac{a_1^2}{4b^4k^2\zeta}\right)+$$

$$+\frac{(2\zeta k^2-\theta)(1-\frac{2k^2\zeta}{\theta})}{4b^2k^2}\frac{1}{\zeta k^2-\theta}-\frac{\operatorname{th}\nu_3\frac{h}{2}}{\nu_3}\frac{2\zeta k^2-\theta}{\zeta k^2-\theta}\frac{2}{4b^2k^2h}(1-\frac{2k^2\zeta}{\theta})=0$$

или

$$\omega^2=\frac{1}{3}\zeta k^2k^2b^2-\frac{a_1^2k^2}{\zeta}(\frac{b^2}{a^2}+1)+\frac{(2\zeta k^2-\theta)^2}{\theta^2(1+\frac{k}{\nu_3}\operatorname{th}\nu_3\frac{h}{2})}a_1^2k^2(1-\frac{\operatorname{th}\nu_3\frac{h}{2}}{\nu_3}\frac{2}{h}) \qquad (1.23)$$

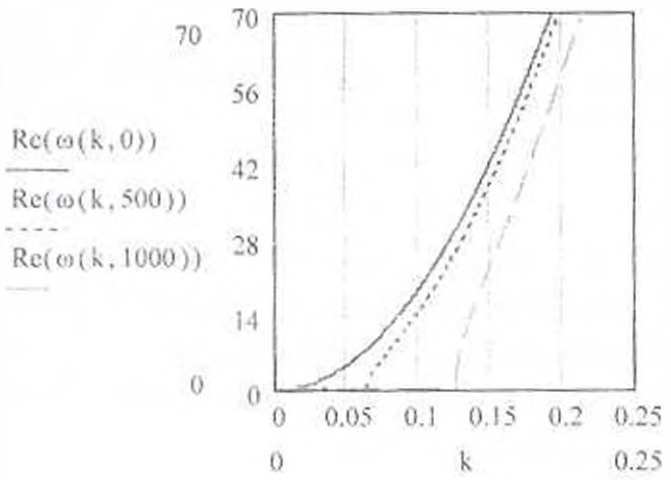
По формуле (1.23) проводятся вычисления на компьютере для типичных величин параметров

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3},\ h=\frac{1}{10}\text{ см},\ \nu_m=10^1\text{ см}^2/\text{сек},\ b=4\cdot10^5\text{ см/сек}.$$

Данные взяты для алюминия и $\rho=3$ г/см^3.

Расчеты проведены для полей $H_1=0$, $H_0=\frac{10^1}{2}$, $H_0=10^1$ гаусс.

Результаты приведены для действительной части ω_1^0 ω, $\omega=\omega_1^0-i\omega_2^0$, в функции k на фиг. 1.



Фиг. 1

Как видно из фиг. 1, наличие магнитного поля H_0 приводит к уменьшению частоты $\omega_1^0(k)$. Этот вывод следует также для предельных случаев идеально проводящих пластин, для которых $\sigma=\infty$, $\theta=\infty$ и можно считать $\operatorname{th}\nu_3^0\frac{h}{2}\approx1$, и конечно-проводящих пластин, для которых $\operatorname{th}\nu_3^0\frac{h}{2}\approx\nu_3^0\frac{h}{2}$. В этих случаях (1.23) дает

$$\omega_1^{0^2}=\omega_{00}^2-\frac{2a_1^2k^2b^2}{a^2\zeta} \qquad (1.24)$$

$$\omega_1^{02} = \omega_{10}^2 - \frac{a_1^2 k^2}{\zeta^2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \qquad (1.25)$$

соответственно.

Проведем теперь расчеты для поперечного поля по точным формулам. Удобно ввести следующие безразмерные переменные:

$$\frac{\omega}{\omega k} = \omega', \quad \frac{\nu_j}{k} = \nu_j', \quad j = 1,2,3, \quad \frac{\theta}{k^2} = \theta', \quad \theta' = i\omega' \frac{a}{k\nu_m} \qquad (1.26)$$

По формуле (1.23) для безразмерных величин $\mathrm{Re}\,\omega'$ проведены расчеты, результаты которых даны для $h = \frac{1}{10}$ см табл. 1, и для $h = \frac{1}{2}$ см табл. 2, где $\alpha = \frac{a_1}{a}$.

Таблица 1

α \ k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
1/1000	0.002345	0.005125	0.0056321	0.0068732	0.00742351
1/100	0.000012	0.000019	0.00002	0.00003	0.00004
1/10	0.00000187	0.000005	0.0000067	0.0000089	0.0000098

Таблица 2

α \ k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.0128756	0.0255674	0.0482346	0.0526457	0.0545768
1/1000	0.01277546	0.02025456	0.02581241	0.0313427	0.03634652
1/100	0.000054252	0.000102554	0.00011457	0.000157568	0.00028879
1/10	0.00000534	0.00002645	0.000036576	0.000049661	0.00005712

Из (1.8) получится уравнение для $\nu_j'(\omega')$

$$(\nu_j'^2 - \frac{b^2}{a^2} + \omega'^2)(\frac{b^2}{a^2}\nu_j'^2 - 1 + \omega'^2 + \frac{\nu_j'^2 - 1}{1 - \frac{\nu_j'^2}{\theta'}} \cdot \frac{a_1^2}{a^2}) + \zeta^2 \nu_j'^2 = 0 \qquad (1.27)$$

Для $z_j = \nu_j'^2$ получается кубичное уравнение.

При $a_1 = 0$ в силу (1.23), (1.8) можно получить для частоты изгибных колебаний упругой пластины

$$\omega_0' = \frac{\omega_{10}}{ak}, \quad \omega_0' = \sqrt{\frac{\zeta}{3}}\frac{h}{a}kh \qquad (1.28)$$

После нахождения ν_j' можно решить уравнение для $\omega' = \omega'(k)$ согласно (1.12).

$$\begin{vmatrix} 1+\dfrac{1}{\nu_1'}\operatorname{th}\nu_1'\dfrac{kh}{2} & 1+\dfrac{1}{\nu_2'}\operatorname{th}\nu_2'\dfrac{kh}{2} & 1+\dfrac{1}{\nu_3'}\operatorname{th}\nu_3'\dfrac{kh}{2} \\ X_1' & X_2' & X_3' \\ 1+\dfrac{\zeta}{\Delta_1'} & 1+\dfrac{\zeta}{\Delta_2'} & 1+\dfrac{\zeta}{\Delta_3'} \\ \dfrac{\operatorname{th}\nu_1'\dfrac{kh}{2}}{\nu_1'}\Gamma_1' & \dfrac{\operatorname{th}\nu_2'\dfrac{kh}{2}}{\nu_2'}\Gamma_2' & \dfrac{\operatorname{th}\nu_3'\dfrac{kh}{2}}{\nu_3'}\Gamma_3' \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.29)$$

где $X_i' = 1-\dfrac{1-\nu_i'^2}{\theta}$, $\Delta_i' = \nu_i'^2 - \dfrac{h^2}{a^2}+\omega'^2$, $\Gamma_i' = 1-2\dfrac{h^2}{a^2}-\zeta\dfrac{\nu_i'^2}{\Delta_i'}$.

Результаты расчетов по (1.27), (1.29) для тех же параметров, что и выше, кроме Π_{00} для действительной части $\omega'(k)$ для $h=\dfrac{1}{10}$ см приведены в табл. 3, и для $h=\dfrac{1}{2}$ см табл. 4.

Таблица 3

a \ k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ω_0'	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
1/1000	0.00242809	0.00539412	0.00804649	0.0099884	0.0116025
1/100	0.000374367	0.00069921	0.0009127559	0.001076537	0.0012512
1/10	0.000233338	0.00030162	0.00084999	0.00096664	0.00099582

Таблица 4

a \ k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ω_0'	0.0128756	0.0255674	0.0482346	0.0526457	0.0545768
1/1000	0.0124451	0.02336412	0.04612432	0.0499253	0.0524355
1/100	0.0016744	0.00309798	0.00462425	0.00551142	0.00582452
1/10	0.0011342	0.00155421	0.00417541	0.00490024	0.0050142

В качестве нулевого приближения использованы значения ω' при $a=\dfrac{1}{1000}$ из табл. 1 и 2, а далее процесс повторяется.

Результаты расчетов по (1.27), (1.29) приведены в табл. 3 и 4.

В работах [6-8] формулы (1.9) и далее настоящей статьи записаны с учетом слагаемых с множителем a_1^4, причем из них следует вместо (1.24) дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 - 2a_1^2k^2\frac{h^2}{a^2\xi}+\frac{a_1^4k^4}{\xi\omega_{00}^2}\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right) \qquad (1.30)$$

Отсюда видно, что $\omega^2>0$. Но для сравнительно небольших полей по-прежнему $\omega^2<\omega_{00}^2$. Последнее неравенство, как видно из табл. 3, 4, имеет

место для действительной части частоты для произвольных полей.

По осредненной теории [8] имеет место

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 - \frac{2a_1^2 k^2}{h}\frac{\omega^2}{\nu_\omega^2 \lambda_1^2}\frac{\lambda_1 \frac{h}{2}\operatorname{ch}\lambda_1\frac{h}{2} - \operatorname{sh}\lambda_1\frac{h}{2}}{\operatorname{ch}\lambda_1\frac{h}{2} + \frac{k}{\lambda_1}\operatorname{sh}\lambda_1\frac{h}{2}}, \quad \lambda_1 = \sqrt{k^2 - \frac{i\omega}{\nu_m}} \tag{1.31}$$

по которой проведены расчеты для $h = 1/10,\ 1/2$.

Таблица 5

α \ k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ω	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
1/1000	0.0027214	0.00544308	0.0081643	0.0108858	0.0136081
1/100	0.0027212	0.0054426	0.0081631	0.0108848	0.013604
1/10	0.0026662	0.0053324	0.0080011	0.0106684	0.013335

Таблица 6

α \ k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ω	0.0128756	0.0255674	0.0482346	0.0526457	0.0545768
1/1000	0.0125827	0.025245	0.0408219	0.0523123	0.0482345
1/100	0.0123158	0.025045	0.0402312	0.0521673	0.0475867
1/10	0.0011267	0.0049653	0.0098721	0.0154326	0.0223457

Сравнение показывает, что табл. 5 и 6 дают очень малый эффект, в то время как табл. 3 и 4, полученные по точной теории, дают сильное уменьшение частот за счет магнитного поля.

§2. Случай продольного поля

Пусть начальное магнитное поле H_0 направлено по оси x.

Повторяя выкладки, можно получить для произвольных σ

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 + a_1^2 k^2 \left(3 + 2\frac{b^4}{a^4\zeta}\right) - \left(1 + 2\zeta\frac{k^2}{\theta}\right)\frac{k^3 a_1^2}{k + \nu_3^0 \operatorname{th}\nu_3^0\frac{h}{2}}\left(1 + \frac{\zeta}{\theta b^2}a^2 k^2\right)\times$$

$$\times\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2\nu_3^0 \operatorname{th}\nu_3^0\frac{h}{2}}{k^2 h} + \zeta\frac{\nu_3^{02}\frac{b^2}{a^2} + 2\nu_3^0 \operatorname{th}\nu_3^0\frac{h}{2}\frac{1 - 2b^2/a^2}{h}}{\zeta k^2 + \theta b^2/a^2}\right) \tag{2.1}$$

Результаты вычисления $\omega_1^0 = \operatorname{Re}(\omega(k, H_0))$ для данных §1 даны в табл. 7.

Таблица 7

k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\operatorname{Re}(\omega(k,0))$	19	75	170	302	471
$\operatorname{Re}(\omega(k,500))$	22	79	174	306	475
$\operatorname{Re}(\omega(k,1000))$	311	90	185	317	487

В случае $\sigma = \infty$ из (2.1) получится в основном порядке

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 + \frac{2a_1^2 k}{h} \tag{2.2}$$

В этом случае решение по точному пространственному подходу совпадает с полученным по осредненному подходу на основе гипотезы Кирхгофа значением частоты [8].

В случае конечных σ, когда $|\nu_1|\frac{h}{2} << 1$, (2.1) дает

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 + a_1^2 k^2 \left(1 + 2\frac{h^2}{a^2\zeta} - \frac{\theta}{k^2}\right) \tag{2.3}$$

Полученные дисперсионные соотношения позволяют рассмотреть вопрос устойчивости нелинейных волн модуляций в пластине.

§3. Нелинейные волны модуляций

В нелинейном приближении можно записать нелинейное дисперсионное соотношение в виде [4]

$$\omega = \omega_1^0 + i\omega_2^0 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial A^2}\right)_{A_0} A^2 \tag{3.1}$$

где A есть амплитуда перемещения u_* для нелинейной упругой пластины [4]

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial A^2}\right)_0 = D_2 + iD_4,\quad D_2 = \frac{DD_1 e^{\omega_2^0 t} k^8}{8\rho h\omega_1^0},\quad D_4 = -D_2\frac{\omega_2^0}{\omega_1^0}$$
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad D_1 = \frac{4h^2}{45}\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^3}\gamma_2 \tag{3.2}$$

γ_2 есть нелинейный коэффициент, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона [4].

Используя (3.1), можно получить методом медленно меняющейся амплитуды [4] уравнение модуляции и исследовать его на устойчивость. Для частоты волны модуляций Ω имеем [4]

$$i\Omega + iK\frac{d\omega_1^0}{dk} = \frac{3}{2}D_4\Psi_0^2 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}D_4\Psi_0^2\right)^2 - \Delta_0} \tag{3.3}$$

где K есть волновой вектор модуляционной волны, через Ψ_0 обозначено начальное значение амплитуды A_0

$$\Delta_0 = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega_1^0}{dk^2}K^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_1^0}{dk^2}K^2 + 2D_2\Psi_0^2\right) \tag{3.4}$$

Условие модуляционной устойчивости

$$\Omega = \Omega' + i\Omega'',\quad \Omega'' < 0 \tag{3.5}$$

Для идеально проводящей пластины $\sigma = \infty$, $D_4 = 0$ и условие устойчивости будет

$$\Delta_0 \geq 0 \tag{3.6}$$

В присутствии диссипации в случае $\gamma_2 < 0$ решение устойчиво, а для $\gamma_2 > 0$ неустойчиво. В случае $\Delta_0 < 0$ будет неустойчивость обоих решений.

Модуляционная устойчивость в адиабатическом приближении согласно (3.3) будет

$$\gamma_2 \frac{d^2\omega_1^0}{dk^2} > 0 \tag{3.7}$$

Для случая магнитоупругой идеально проводящей пластины в продольном магнитном поле согласно (3.7), (2.2)

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\omega_1^0}{dk^2} < 0, \quad \frac{H_0^2}{4\pi} > Dk^3(4+3\sqrt{2}) \\ &\frac{d^2\omega_1^0}{dk^2} > 0, \quad \frac{H_0^2}{4\pi} < Dk^3(4+3\sqrt{2}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

В нижней строке магнитное поле не влияет на устойчивость, а для верхнего знака оно меняет устойчивость на неустойчивость и наоборот.

Для поперечного магнитного поля в случае идеальной проводимости согласно (1.24) вместо (3.8) получится

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\omega_1^0}{dk^2} < 0, \quad h^2k^2\zeta^2 < \zeta\frac{\omega_1^2}{a^2} \\ &\frac{d^2\omega_1^0}{dk^2} > 0, \quad h^2k^2\zeta^2 > \zeta\frac{\omega_1^2}{a^2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

И снова, так же, как и в (3.8), сильное магнитное поле меняет условие устойчивости на обратное.

Авторы благодарят Ю. Г. Санояна за помощь в проведении вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука. 1997. 272 с.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматлит. 1996. 286с.
3. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ереван: Изд. НАН Армении. 1992. 124 с.
4. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Модуляция термомагнитоупругих волн в нелинейной пластине//Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. №1. С. 25-30.
5. Багдасарян Г. Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. ЕГУ. Изд. "Тигран Мец". 1999. 439 с.
6. Багдоев А. Г., Саакян С. Г. Устойчивость нелинейных волн модуляции в магнитном поле для пространственной и осредненной задачи//Изв. РАН. МТТ. 2001. №5. С. 35-42.
7. Bagdoev A. G., Vantsyan A. A. Theoretical and experimental investigations of waves in plate in magnetic field for space and averaged problems//Int. J. of Solids and Structures. 2002. V. 39. P.251-259.
8. Сафарян Ю. С. Исследование колебаний магнитоупругих пластин в пространственной и осредненной постановке//Информационные технологии и управление. 2001. №2. С. 17-49.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.02.2005