

УДК539.3

**ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ  
ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ БЕСКОНЕЧНЫМ КУСОЧНО-  
ОДНОРОДНЫМ СТРИНГЕРОМ**  
Багдасарян Р.А.

Ռ.Ա. Բագդասարյան

Կտոր առ կտոր համասեռ վերադիրով ունեցազված կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ սալի խնդիր

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու կիսասանվերջ սալերից կազմված կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ սալի խնդիր, որը ունեցազված է սալի երկրերի բաժանման գծին փոփոխվող կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ վերադիրով:

Վերադիրը կազմված է երկու միասեռակ կիսասանվերջ մասերից և ուսումնականության ուրիշ հաստատուն ունեցող սեկ վերջավոր մասից:

Սալը դեֆորմացվում է անվերջում կիրառված հորիզոնական ծգող լարմաների ազդեցության տակ: Խնդիրը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեպի լինակերալ խափասարման բոժմանը և գոյա է տրվում, որ սալը կազմասարմուր բոլի է տալիս լուծում կապորբական մուտավորությունների սերտվում:

Իտաազված է նաև ափժալտոտիկ բաժանակ անվերջ հեռու կետերի կոնտակտային լարմանների համար:

R.A. Bagdasaryan

**Problem for Piece-homogeneous Infinite Plate, Reinforced by  
Infinite Piece-homogeneous Stringer**

In the paper a problem of piece-homogeneous plate is considered, when the plate consists from two infinite plates, reinforced by infinite piece-homogeneous stringer, which is parallel to separation line of plate's material. Stringer consists from two same half infinite parts and one finite part with other elasticity modulus.

The plate is deformed under action of horizontal stretched stresses applied at infinity.

The problem is reduced to Fredholm's singular integral equation of second kind, which permit the solution by means of step-by-step approximation method.

The asymptotic formula is also obtained for contact stresses in infinite points.

В работе рассматривается задача для кусочно-однородной пластины, состоящая из двух полубесконечных пластин, усиленной бесконечным, кусочно-однородным стрингером, параллельным параллельно линии раздела материалов пластины.

Стрингер состоит из двух одинаковых полубесконечных частей и одной конечной части с другим модулем упругости.

Пластина деформируется под действием горизонтальных растягивающих напряжений приложенных на бесконечности.

Задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, допускающее решение методом шаг за шагов приближений.

Получена также асимптотическая формула для контактных напряжений бесконечности удаленных точек.

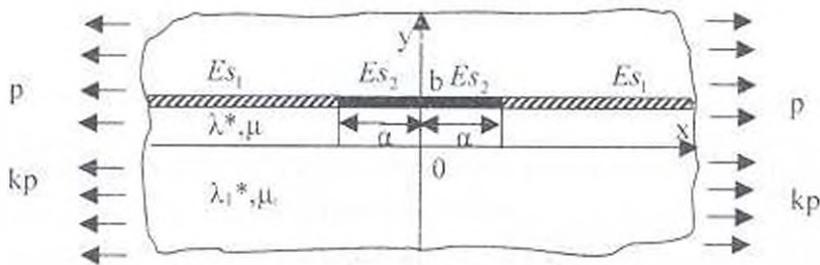
Пусть бесконечная кусочно-однородная пластина, состоящая из двух полубесконечных пластин с различными упругими постоянными, усилена бесконечным, кусочно-однородным стрингером, параллельным линии разнородности материалов пластины (фиг. 1).

Ось абсцисс совпадает с линией разнородности материалов. Стрингер, который состоит из двух одинаковых полубесконечных частей и одной конечной части с другим модулем упругости, находится на расстоянии  $b$  от оси абсцисс. Концы конечной части стрингера находятся на расстоянии  $a$  от оси ординат.

Пластина деформируется под действием растягивающих напряжений  $\sigma_x = p$ , приложенных на бесконечности  $|x| \rightarrow \infty$  при  $y > 0$ , а при  $y < 0$  — под действием напряжений  $k\rho$ , где

$$k = \frac{\mu_1 \lambda^* + 2\mu \lambda_1^* + \mu_1}{\mu \lambda_1^* + 2\mu_1 \lambda^* + \mu}$$

$$\lambda^* = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \lambda_1^* = \frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \mu_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$$



Фиг.1

$E, \nu$  и  $E_1, \nu_1$  — модули упругости и коэффициенты Пуассона пластины соответственно при  $\nu > 0$  и при  $\nu < 0$ .

Здесь, как и в [1], относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактных участков, а для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины справедлива модель обобщенного плоского напряженного состояния.

Задача заключается в определении контактных напряжений, действующих на контактных участках между стрингером и пластиной.

Поставленная задача решается методом, изложенным в [2], где рассматривается задача для упругой однородной плоскости с бесконечным включением, состоящим из трех различных кусков.

В силу вышесказанного, дифференциальные уравнения равновесия стрингера запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dx^2} &= \frac{\tau(x)}{E_s F_s} \quad \text{при } |x| > a \\ \frac{d^2 u_2}{dx^2} &= \frac{\tau(x)}{E_s F_s} \quad \text{при } |x| < a \end{aligned} \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \left. \frac{du_1}{dx} \right|_{x=a+0} &= \frac{X}{E_s F_s}, & \left. \frac{du_2}{dx} \right|_{x=a+0} &= \frac{X}{E_s F_s} \\ \left. \frac{du_1}{dx} \right|_{x=-a-0} &= \frac{X}{E_s F_s}, & \left. \frac{du_2}{dx} \right|_{x=-a-0} &= \frac{X}{E_s F_s} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{du_x}{dx} \rightarrow \frac{p}{E_x} \text{ при } |x| \rightarrow \infty \quad (2')$$

где  $E_x$  и  $E_y$  — модули упругости стрингера соответственно при  $|x| > a$  и при  $|x| < a$ ,  $F_x$  — площадь поперечного сечения стрингера,  $\tau(x) = d \cdot q(x)$ ,  $d$  — ширина стрингера,  $q(x)$  — контактные касательные напряжения под стрингером,  $u_x(x)$  — горизонтальные перемещения точек стрингера,  $X$  — нормальная сила поперечного сечения стрингера при  $x = \pm a$ .

Отметим, что  $\tau(x)$  удовлетворяет условию

$$X = - \int_{-a}^a \tau(s) ds = \frac{E_y F_y}{E_x} P \quad (3)$$

Чтобы уравнения (1) и граничные условия (2) записать одним уравнением на всей оси  $Ox$  ( $-\infty < x < \infty$ ), введем функцию

$$U_x(x) = [\theta(-x-a) + \theta(x-a)] \frac{du_x}{dx} + [\theta(x+a) - \theta(x-a)] \frac{du_x}{dx}$$

где  $\theta(x)$  — функция Хевисайда.

Из (1) и (2) для  $U_x(x)$  получим

$$\frac{dU_x(x)}{dx} = \frac{X}{F_x} \frac{E_y - E_x}{E_x E_y} [\delta(x-a) - \delta(x+a)] + \frac{\tau_1(x)}{E_x F_x} + \frac{\tau_2(x)}{E_y F_y}, \quad (-\infty < x < \infty),$$

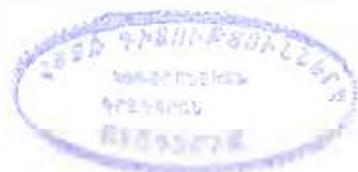
где  $\delta(x)$  — функция Дирака.

$$\tau_1(x) = [\theta(-x-a) + \theta(x-a)] \tau(x), \quad \tau_2(x) = [\theta(x+a) - \theta(x-a)] \tau(x)$$

С другой стороны, для перемещения точек пластины имеем [3]

$$u^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_1 \ln \frac{1}{[(x-s)^2 + (y+b)^2]^{1/2}} + A_2 \frac{(y+b)^2}{(x-s)^2 + (y+b)^2} + \right. \\ \left. + A_3 \frac{yb[(y+b)^2 - (x-s)^2]}{[(x-s)^2 + (y+b)^2]^2} + A_4 \ln \frac{1}{[(x-s)^2 + (y-b)^2]^{1/2}} - \right. \\ \left. - A_5 \frac{(y-b)^2}{(x-s)^2 + (y-b)^2} \right\} \tau(s) ds + \frac{\lambda^* + 2\mu}{4\mu(\lambda^* + \mu)} px \quad (5)$$

$$v^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ B_1 \operatorname{arctg} \frac{x-s}{y+b} + B_2 \frac{(x-s)(y-b)}{(x-s)^2 + (y+b)^2} + \right. \\ \left. + B_3 \frac{yb(x-s)(y+b)}{[(x-s)^2 + (y+b)^2]^2} + B_4 \frac{(x-s)(y-b)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} \right\} \tau(s) ds - \frac{\lambda^*}{4\mu(\lambda^* + \mu)} py \\ (-\infty < x < \infty; 0 \leq y < \infty; b > 0) \quad (6)$$



$$u^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_0^y \left[ C_1 \ln \frac{1}{[(x-s)^2 + (y-b)^2]^2} + C_2 \frac{b(y-b)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} - C_3 \frac{y(y-b)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} \right] \tau(s) ds + \frac{\lambda_1^2 + 2\mu_1}{4\mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)} \lambda_1 \rho x \quad (7)$$

$$v^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_0^y \left[ D_1 \operatorname{arctg} \frac{x-s}{y-b} + D_2 \frac{b(x-s)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} + D_3 \frac{y(x-s)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} \right] \tau(s) ds - \frac{\lambda_1^2}{4\mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)} k \rho y \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty; -\infty < y \leq 0; h > 0)$$

где  $h$  — толщина пластины,  $u^{(1)}(x, y)$ ,  $v^{(1)}(x, y)$  и  $u^{(2)}(x, y)$ ,  $v^{(2)}(x, y)$  — перемещения точек пластины при  $y \geq 0$  и при  $y \leq 0$  соответственно.

Для коэффициентов из (5) — (8) имеем

$$A_1 = \frac{\mu^2(\lambda_1^2 + 3\mu_1)[(\lambda^2 + 2\mu)^2 + \mu^2] - \mu_1^2(\lambda^2 + 3\mu)[2\mu^2 + (\lambda_1^2 + \mu_1)(\lambda^2 + 3\mu)]}{4\mu(\lambda^2 + 2\mu)[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)] [\mu(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)]}$$

$$A_2 = \frac{(\mu_1 - \mu)(\lambda^2 + \mu)(\lambda^2 + 3\mu)}{4\mu(\lambda^2 + 2\mu)[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}, \quad A_3 = \frac{\lambda^2 + 3\mu}{4\mu(\lambda^2 + 2\mu)}$$

$$A_4 = \frac{(\mu - \mu_1)(\lambda^2 + \mu)^2}{2\mu(\lambda^2 + 2\mu)[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}, \quad A_5 = \frac{\lambda^2 + \mu}{4\mu(\lambda^2 + 2\mu)}$$

$$B_1 = \frac{\mu^2(\lambda_1^2 + 3\mu_1) - \mu_1^2(\lambda^2 + 3\mu)}{2[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)] [\mu(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)]}$$

$$B_2 = \frac{(\mu - \mu_1)(\lambda^2 + \mu)(\lambda^2 + 3\mu)}{4\mu(\lambda^2 + 2\mu)[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}$$

$$B_3 = \frac{(\mu_1 - \mu)(\lambda^2 + \mu)^2}{\mu(\lambda^2 + 2\mu)[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}, \quad B_4 = \frac{\lambda^2 + \mu}{4\mu(\lambda^2 + 2\mu)}$$

$$C_1 = \frac{\mu(\lambda^2 + 2\mu)(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^2 + 2\mu_1)(\lambda^2 + 3\mu)}{2[\mu(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)] [\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda_1^2 + \mu_1)]}$$

$$C_2 = \frac{\lambda^2 + \mu}{2[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}, \quad C_3 = \frac{\lambda_1^2 + \mu_1}{2[\mu(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)]}$$

$$D_1 = \frac{\mu^2(\lambda^2 + 3\mu) - \mu_1^2(\lambda_1^2 + 3\mu_1)}{2[\mu(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda^2 + \mu)] [\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}$$

$$D_2 = \frac{\lambda^2 + \mu}{2[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}, \quad D_3 = \frac{\lambda_1^2 + \mu_1}{2[\mu(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)]}$$

Из (5) определим  $\frac{\partial u^{(1)}(x, b)}{\partial x}$

$$\frac{\partial u^{(1)}(x, b)}{\partial x} = U^{(1)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x-s)\tau(s)ds + \frac{\lambda^2 + 2\mu}{4\mu(\lambda^2 + \mu)} p. \quad (-\infty < x < \infty) \quad (9)$$

где

$$r(x) = -\frac{1}{\pi h} \left[ A_1 \frac{x}{x^2 + 4b^2} + 8b^2 A_2 \frac{x}{(x^2 + 4b^2)^2} + 2b^2 A_3 \frac{x(12b^2 - x^2)}{(x^2 + 4b^2)^3} + A_4 \frac{1}{x} \right] \quad (10)$$

Учитывая также условия контакта

$$U_1(x) = \bar{U}^{(1)}(x), \quad (-\infty < x < \infty) \quad (11)$$

и применив к (4), (9) и (11) преобразование Фурье, соответственно получим

$$-i\sigma \bar{U}_1(\sigma) = \frac{X}{F_s} \frac{E_{v_1} - E_{v_2}}{E_s E_{v_1}} (e^{i\sigma a} - e^{-i\sigma a}) + \frac{\bar{\tau}_1(\sigma)}{E_s F_s} + \frac{\bar{\tau}_2(\sigma)}{E_s F_s} \quad (12)$$

$$\bar{U}^{(1)}(\sigma) = r(\sigma)\tau(\sigma) + \frac{\lambda^2 + 2\mu}{4\mu(\lambda^2 + \mu)} p\delta(\sigma), \quad U_1(\sigma) = \bar{U}^{(1)}(\sigma) \quad (13)$$

где

$$\bar{r}(\sigma) = \frac{1}{ih} \left[ A_1 \operatorname{sgn} \sigma \cdot (A_1 \operatorname{sgn} \sigma + 2bA_2\sigma + b^2 A_3 \sigma^3 \operatorname{sgn} \sigma) e^{-2i\sigma b} \right] \quad (14)$$

при этом

$$\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\sigma x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

Сопоставлением формул (12) и (13) получим

$$\bar{\tau}_1(\sigma) = \frac{\Lambda(E_{v_1} - E_{v_2})}{E_s} \frac{\bar{\tau}_2(\sigma)}{\Lambda + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} + g(\sigma) \quad (15)$$

где

$$\bar{q}(\sigma) = (C_1 |\sigma| + 2bC_2 \sigma^2 + b^2 C_3 |\sigma|^3) e^{-2i\sigma b} \quad (16)$$

$$\Lambda = \frac{h}{E_s F_s A_1}, \quad C_1 = \frac{A_1}{A_1}, \quad C_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad C_3 = \frac{A_3}{A_1}$$

$$\bar{g}(\sigma) = -2i \frac{\Lambda X(E_{v_1} - E_{v_2})}{E_s} \frac{\sin(a\sigma)}{\Lambda + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} \quad (17)$$

Применив к (15) обратное преобразование Фурье, получим

$$\tau(x) = \frac{\Lambda(E_{v_1} - E_{v_2})}{E_s} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\tau}_2(\sigma) e^{-i\sigma x}}{\Lambda + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} d\sigma + g(x) \quad (18)$$

где

$$g(x) = \frac{i}{\pi} \frac{\Lambda X(E_{v_1} - E_{v_2})}{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\sigma) e^{-i\sigma x}}{\Lambda + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} d\sigma \quad (19)$$

Теперь покажем, что в точках  $x = \pm a$  контактные напряжения имеют логарифмическую особенность [4].

Действительно, поскольку  $\bar{\tau}(0) = 0$ , следовательно,

$$\bar{\tau}_2(\sigma) = o\left[\frac{\sin(a\sigma)}{\sigma}\right] \text{ при } |\sigma| \rightarrow \infty$$

Учитывая также следующее соотношение:

$$A + |\sigma| + \bar{q}(\sigma) = O(|\sigma|) \text{ при } |\sigma| \rightarrow \infty$$

из свойств интеграла Фурье получим, что первый член в выражении  $\tau(x)$  — непрерывная функция, а  $g(x)$  имеет логарифмическую особенность при  $x \rightarrow \pm a$ .

Далее, применяя теорему о свертке и полагая  $|x| < a$ , из соотношения (18) для определения  $\tau(x)$  получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau(x) = \frac{A(E_{v_1} - E_{v_2})}{E_{v_1}} \int_{-a}^a k(x-s)\tau(s)ds + g(x), \quad |x| < a \quad (20)$$

где 
$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma x}}{A + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} d\sigma \quad (21)$$

Отметим, что при  $|x| \rightarrow 0$   $k(x)$  имеет логарифмическую особенность, поскольку знаменатель подынтегрального выражения в (21) имеет порядок  $|\sigma|$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ .

Рассматривая уравнение (20) в пространстве суммируемых функций  $L(-a, a)$  ее решение можно получить методом последовательных приближений при

$$\frac{A|E_{v_1} - E_{v_2}|}{E_{v_1}} \sup_{|x| < a} \int_{-a}^a k(x-s) dx < 1$$

Имея значения  $\tau(x)$  при  $|x| < a$ , остальные ее значения получатся из соотношения (18).

Что касается постоянной  $X$ , то она определяется из условия (31).

Получим также асимптотическую формулу для  $\tau(x)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Имея в виду разложение  $\bar{\tau}(\sigma)$  при  $|\sigma| \rightarrow 0$

$$\bar{\tau}(\sigma) = a_0\sigma + a_1\sigma|\sigma| + a_2\sigma^2 + a_3i\sigma^2|\sigma| + a_4\sigma^3 + o(\sigma^4)$$

где

$$a_0 = \frac{E_{v_1} - E_{v_2}}{E_{v_1}} [\bar{\tau}'_2(0) - 2iaX], \quad a_1 = -\frac{E_{v_1} - E_{v_2}}{E_{v_1}} (1 + c_1) [\bar{\tau}'_2(0) - 2iaX]$$

$$a_1 = \frac{E_2 - E_1}{AE_2} \left[ \frac{4b}{A} (1+c_1)(c_2 - c_1) - b^2 (c_1 + 2c_2 - 4c_3) - \frac{(1+c_1)^2}{A^2} \left[ \tau_2(0) - 2\lambda aX \right] - \frac{1+c_1}{A} \left[ \tau_1(0) + \frac{2}{3} a^2 X \right] \right]$$

$a_0, a_2$  и  $a_4$  – некоторые постоянные, в силу свойств интеграла Фурье [5] имеем

$$r(x) = \frac{2a_1}{\pi x} + \frac{24a_3}{\pi x^3} + O(|x|^{-5}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (22)$$

Автор выражает благодарность профессору Э.Х. Григоряну за ценные советы в ходе решения задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стериберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. П.М. Тр. Амер. общ. инж. механики. 1966. Сер. Е. №4 С.124-135
2. Григорян Э.Х. Об одном подходе решения задач для упругой плоскости с бесконечным кусочно-однородным включением // Уч. записки ЕГУ, естеств. науки 1985. №2 С.35-40.
3. Багдасарян Р.А., Гукасян Г.О. Об одной задаче для кусочно-однородной пластины, усиленной бесконечным стрингером. // Межвуз. сб. научных трудов. 1991. Вып.8. С.316-321
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки и упругой полуплоскости. // Уч. записки. ЕГУ, естеств. науки. 1979. №3. С.29-34.
5. Lighthill M.J. An Introduction to Fourier analysis and generalized functions. Cambridge Univ. Press. 1959. P.87.

Государственный инженерный университет Армении

Поступила в редакцию  
8.07.2005