ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №3, 2005 Механика

УДК 629.7.052

МИНИМАКСНЫЕ АЛГОРИТМЫ КОРРЕКЦИИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ ПО ИНФОРМАЦИИ О ВЫСОТЕ ПРИ НАЛИЧИИ НЕМОДЕЛИРУЕМЫХ УСКОРЕНИЙ

Мартиросян С. Р.

Ս. Ռ. Մարտիրոսյան

Իներցիալ նավիգացիոն համակարգերի պարամետրերի գնահատման խնդրի մասին չմոդելավորված արագացումների առկայության դեպքում

Դիտարկված է դինամիկ համակարգերի փազային վիճակի մինիմաքսային գնահատման խնդիր՝ չմոդելավորված արագացումների առկայության դեպքում: Ստացված են օպտիմալացման բավարար պայմանները անալիտիկ եղանակով: Առաջարկված է այդպիսի խնդիրների լուծման ալգորիթմ, որի օգնությամբ գտնված է իներցիալ նավիգացիոն համակարգերի պարամետրերի մինիմաքսային գնահատականները:

S. R. Martirosyan

Minimax algorithms of correction of inertial navigation systems under the information on height at presence unmodelled acceleration

Estimation problem is considered for the case in wich stochastic description of disturbances in the system and the random measurement errors is not available, but only a bound of them is known. It is being cast into parameter estimation problem under uncertain conditions. One way of solution of such problems is suggested by the methods of guaranteed (minimax) estimation theory. Hence the methods of optimal guaranteed parameter estimation theory are used for solving problems connected with spacecraft and aircraft guidame and control such as the trajectory correction problem or the problem on evaluation of motion parameters of means of measurements. In this paper the additional analysis of this problem has allowed to formulate analytical criteria of an optimality, based on construction generalized Chebyshevs polynoms. The algorithm of the solution of such problems is suggested convenient for analytical investigations of linear dynamic systems and estimators. The new algorithm is tested on a problem of correction inertial navigation system under the information on height at presense unmodelled disturbances. The optimum moments of measurements are found and aprioristic estimations of accuracy of determination of parameters of the navigation system are received.

Задача минимаксного оценивания с немоделируемыми ускорениями рассматривалась в работах [1-4]. В предлагаемой статье дополнительный анализ этой проблемы позволил сформулировать аналитические критерии оптимальности. Предложен аналитический алгоритм решения таких задач, основанный на построении обобщенных чебышевских полиномов. Алгоритм опробован на задаче коррекции инерциальной навигационной системы по информации о высоте при наличии немоделируемых ускорений. Найдены оптимальные моменты измерений и получены априорные оценки точности определения параметров навигационной системы.

1. **Постановка задачи.** Пусть изменение состояния системы $x(t)$ на интервале времени $t \in [0,T]$ описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [0,T] \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$; $A(t) \in R^{n \times n}$, $B(t) \in R^{n \times r}$ – кусочно-непрерывные матричные функции; $u(t) \in R^r$ – вектор немоделируемых ускорений, компоненты которого являются кусочно-непрерывными функциями на $[0,T]$.
Предполагается, что выполнено ограничение

$$\|u(t)\| \le \gamma(t), \quad t \in [0,T] \tag{1.2}$$

где $\gamma(t)$–заданная неотрицательная кусочно-непрерывная функция; $\|\bullet\|$ – евклидова норма вектора.

Пусть на интервале времени $[0,T]$ проводятся измерения

$$z(t) = H^T x(t) + \rho(t)\,,\ t \in [0,T] \tag{1.3}$$

где $H(t)\in R^m$ – известная кусочно-непрерывная вектор-функция; $z(t)$ – измеренное значение; $\rho(t)$ – ошибка измерений; $z(t)$, $\rho(t)\in R^1$.

Будем предполагать, что ошибка измерений $\rho(t)$ удовлетворяет ограничению

$$|\rho(t)| \le \sigma(t),\ t \in [0,T] \tag{1.4}$$

где $\sigma(t)$ – заданная неотрицательная функция на $[0,T]$.

Предполагается также, что система (1.1), (1.3) при $u(t) = 0$, $\rho(t) = 0$ вполне наблюдаема.

Требуется построить оценку параметра

$$l = a^T x_0 \tag{1.5}$$

$a\in R^m$ – заданный вектор, $x_0 = x(0)$;

на классе линейных оценок $\hat{l}$ параметра l, определяемых в виде

$$\hat{l} = \int\limits_0^T \Phi(t) z(t) dt \tag{1.6}$$

где

$$\Phi(t) = \Phi_n(t) + \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \delta(t - t_j) \tag{1.7}$$

$\Phi_n(t)$–кусочно-непрерывная функция; Φ_j, $j = 1,2,...,n$ –числа (n– произвольно).

Функцию $\Phi(t)$ будем называть оценивателем.

Ошибка оценки $\hat{l} - l$, очевидно, задается выражением

$$\hat{l} - l = (\int\limits_0^T \Phi(t) h^T(t) dt - a^T) x_0 + \int\limits_0^T \Phi(t) h^T(t) g(t) dt + \int\limits_0^T \Phi(t) \rho(t) dt \tag{1.8}$$

где

$$h(t) = X^T(t) H(t) \tag{1.9}$$

$$b(t) = X^{-1}(t) B(t) \tag{1.10}$$

$$g(t) = \int\limits_0^T b(s) u(s) ds \tag{1.11}$$

$X(t)\in R^{m\times m}$ – матрица фундаментальной системы решений (1.1):

$$\frac{dX}{dt} = A(t) X\,,\ X(0) = E_m \tag{1.12}$$

E_m – m -мерная единичная матрица.

Из соотношения (1.8), очевидно, следует, что $|\hat{l}-l|$ зависит от $\rho(t)$, $u(t)$ и $\Phi(t)$:

$$|\hat{l}-l| = D(\Phi(t),u(t),\rho(t)) \tag{1.13}$$

Гарантированное значение ошибки оценки $\hat{l}-l$

$$D_{gar}(\Phi(t)) = \max_{u,\rho} D(\Phi(t),u(t),\rho(t)) \tag{1.14}$$

зависит только от выбранного оценивателя $\Phi(t)$.

Для того, чтобы величина $D_{gar}(\Phi(t))$ была бы конечной, необходимо выполнение условия несмещенности оценивателя $\Phi(t)$:

$$D(\Phi(t),0,0) = 0 \text{ для любых } x_0 \in R^m \tag{1.15}$$

Если $\Phi(t)$ удовлетворяет условию (1.15), то будем это отмечать $\Phi \in N$. Из соотношения (1.8) следует, что требование несмещенности оценивателя (1.15) приводит к условию

$$\int_0^T \Phi(t)h(t)dt = a \tag{1.16}$$

Тогда соотношение (1.8) можно написать в виде

$$\hat{l}-l = \int_0^T \Phi(t)\rho(t)dt + \int_0^T \Phi(t)h^T(t)g(t)dt \tag{1.17}$$

Естественно среди всех алгоритмов оценивания $\Phi(t) \in N$ найти такой, при котором величина $D_{gar}(\Phi(t))$ минимальна.

Стремление минимизировать $D_{gar}(\Phi(t))$ в рассматриваемой постановке порождает следующую минимаксную задачу [3]:

$$\min_{\Phi \in N} \max_{u,\rho} D(\Phi(t),u(t),\rho(t)) \tag{1.18}$$

Подсчитаем гарантированное значение ошибки оценки (1.14).

Согласно (1.17) и (1.4)

$$J(\Phi,u) = \max_{\rho} D(\Phi(t),u(t),\rho(t)) = \int_0^T |\Phi(t)|\sigma(t)dt + \int_0^T \Phi(t)h^T(t)g(t)dt \tag{1.19}$$

Тогда, в соответствии с (1.3), при любом $\Phi(t) \in N$ гарантированное значение ошибки оценки (1.14) будет

$$J^*(\Phi) = \max_u J(\Phi,u) = \int_0^T |\Phi(t)|\sigma(t)dt + \int_0^T |\Phi(t)| \max |h^T(t)g(t)| dt \tag{1.20}$$

Нетрудно для каждого $t \in [0,T]$ получить оценку сверху для функции $|h^T(t)g(t)|$ в следующем виде [3]: $\max |h^T(t)g(t)| = C_{max}(t)$, $t \in [0,T]$.

В самом деле, так как согласно (1.11)

$$h^T(t)g(t) = \int_0^t h^T(t)b(s)u(s)|ds \tag{1.21}$$

то, очевидно, $\max |h^T(t)g(t)|$ достигается при

$$u(s) = \frac{\gamma(s)b^T(s)h(t)}{\| b^T(s)h(t) \|} \tag{1.22}$$

Тем самым

$$C_{\max}(t) = \int_0^t \| b^T(s)h(s) \| \gamma(s)ds \tag{1.23}$$

Отсюда следует при любом $\Phi(t) \in N$ оценка сверху функционала $J(\Phi,u)$ (1.19):

$$J(\Phi,u) \le J^*(\Phi) = \int_0^T (\sigma(t) + C_{\max}(t)) | \Phi(t) | dt \tag{1.24}$$

Отметим, что если t не фиксировано, то верно лишь неравенство $| h^T(t)g(t) | \le C_{\max}(t)$ на $[0,T]$.

Задача определения

$$\min_{\Phi \in N} J^*(\Phi) \tag{1.25}$$

при условии несмещенности (1.16) сводится к следующей задаче вариационного исчисления. Необходимо определить оцениватель $\Phi(t) \in N$ из условий

$$J^* = \min_{\Phi \in N} \int_0^T (\sigma(t) + C_{\max}(t)) | \Phi(t) | dt \tag{1.26}$$

$$\int_0^T \Phi(t)h(t)dt = a \tag{1.27}$$

Задача (1.26), (1.27) может быть эффективно решена симплекс-методом [3,4]. Аналитическое решение этой задачи можно получить путем сведения ее к задаче построения обобщенного чебышевского полинома [7].

Таким образом, путем сведения задачи (1.26), (1.27) к задаче линейного программирования, легко решаемой симплекс-методом, или к задаче построения обобщенного чебышевского полинома, нетрудно получить оценки сверху для искомого функционала $J(\Phi,u)$ (1.19) и определить программу измерений, минимизирующую эти оценки. При этом программа измерений, минимизирующая функционал $J^*(\Phi,u)$ (1.25), будет содержать не более чем m измерений, где m – размерность пространства состояний системы, т. е. столько же, сколько в проблеме при отсутствии немоделируемых ускорений [3].

Однако следует подчеркнуть, что решение задачи (1.26), (1.27) не обязано совпадать с решением исходной проблемы (1.18), хотя в некоторых случаях такое совпадение возможно.

Рассматриваемую минимаксную задачу (1.18) можно сводить к дифференциальной игре с терминальным функционалом

$$\tilde{J} = \min_{\Phi \in N} \max_{u} \int_0^T (|\Phi(t)|\sigma(t) + \Phi(t) h^T(t) g(t)) dt \tag{1.28}$$

подробный анализ которой проведен в работе [3]. Сформулированы достаточные условия, включающие все необходимые, которые гарантируют выполнение неравенств седловой точки

$$J(\tilde{\Phi}, u) \le J(\tilde{\Phi}, \tilde{u}) \le J(\Phi, \tilde{u}) \tag{1.29}$$

где $\tilde{u}$ и $\tilde{\Phi}$ – решение задачи (1.28).

Пусть $\tilde{\Phi}^*$ – решение задачи (1.25), а $\tilde{\Phi}^0$ – решение задачи

$$\min_{\Phi \in N} J^0(\Phi) \tag{1.30}$$

в которой не учитываются немоделируемые ускорения $u(t) = 0$, $t \in [0,T]$.

Справедливы неравенства [3]:

$$J^*(\tilde{\Phi}^*) \ge J_*(\tilde{\Phi}^*) \ge J(\tilde{\Phi}) \ge J^0(\tilde{\Phi}^0) \tag{1.31}$$

где $\tilde{\Phi}$ – минимизирующий оцениватель минимаксной задачи (1.28); $J_*(\Phi)$ – решение задачи (1.28) при фиксированном оценивателе $\Phi(t) \in N$:

$$J_*(\Phi) = \max_{u} J(\Phi, u) \tag{1.32}$$

Если величина

$$\alpha_0 = \frac{J_*(\tilde{\Phi}^*) - J^0(\tilde{\Phi}^0)}{J^0(\tilde{\Phi}^0)} \tag{1.33}$$

достаточно мала, то точное решение минимаксной задачи (1.28) не может существенно уменьшить гарантированную ошибку оценки [3].

2. Сведение проблемы к задаче построения обобщенного чебышевского полинома. Нетрудно получить при умеренной размерности m системы аналитическое решение задачи (1.26), (1.27), сводя ее к задаче построения обобщенного чебышевского полинома. Для этого сформулируем некоторые результаты теории задач математического программирования указанного вида [5,6] и воспользуемся алгоритмом решения этих задач, предложенным в [7].

Можно упростить запись задачи (1.26), (1.27) в предположении

$$\sigma(t) \succ 0, \quad \gamma(t) \succ 0, \ t \in [0,T] \tag{2.1}$$

если обозначить

$$\Phi'(t) = \Phi(t)\vartheta(t) \tag{2.2}$$

$$h'(t) = \frac{h(t)}{\vartheta(t)} \tag{2.3}$$

$$\vartheta(t) = \sigma(t)(1 + \alpha(t)) \tag{2.4}$$

$$\alpha(t) = \frac{C_{\max}(t)}{\sigma(t)} \tag{2.5}$$

Замечания. 2.1. Можно считать, что $\sigma(t) \succ 0$, $\gamma(t) \succ 0$, или $\sigma(t) + C_{\max}(t) \succ 0$, $t \in [0,T]$, иначе из условия $\sigma(t) + C_{\max}(t) = 0$ на некоторых подмножествах $F \subset \{0,T]$ в соответствии с (1.2), (1.4) имеем

$\sigma(t) = 0$, $C_{max}(t) = 0$. А тогда, $u(t) = 0$, $\rho(t) = 0$ на $F = [t', t'']$, в силу чего решение рассматриваемой минимаксной задачи, как задачи восстановления компонент вектора состояний системы будет иметь вид

$$l = a^T x_0 = a^T [\int_{t'}^{t''} X^T(t) H(t) H^T(t) X(t) dt]^{-1} \int_{t'}^{t''} X^T(t) H(t) z(t) dt,\ t \in [t', t'']$$

2.2. Заведомое отсутствие немоделируемых ускорений на некоторых подмножествах $W \subset \{0, T]$ просто описывается условием $\gamma(t) = 0$, или, в соответствии с (1.23), $C_{max}(t) = 0$.

2.3. Можно считать, что заданный целевой вектор $a = (1,0,...,0)^T$. Иначе, если $a = (a_1, a_2, ..., a_s, ..., a_m)^T$ и $a_s \neq 0$, то с помощью замены

$$\tilde{h}(t) = Ch'(t),\ \tilde{a} = Ca \tag{2.6}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_s^{-1} & 0 \\ a_s I_{s-1} & -a_1 & 0 \\ & \cdot & \\ & -a_{s-1} & \\ 0 & -a_{s+1}\, a_s I_{m-s} & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & -a_m & \end{pmatrix}$$

в задаче (1.26), (127) пара векторов $h'(t)$, $a = (a_1, a_2, ..., a_s, ..., a_m)^T$ заменится парой

$$\tilde{h}(t) \in R^m,\ \tilde{a} = (1,0,...,0)^T \in R^m \tag{2.7}$$

Итак, будем считать, что

$$\vartheta(t) \succ 0,\ t \in [0, T] \tag{2.8}$$

Замена $\Phi(t)$, $h(t)$, a, соответственно, на $\Phi'(t)$, $\tilde{h}(t)$, $\tilde{a}$ в соотношениях (1.26), (1.27) приводит к записи

$$J^* = \min_{\Phi \in V} \int_0^T |\Phi(t)|\, dt \tag{2.9}$$

$$\int_0^T \Phi(t) h(t) dt = a \tag{2.10}$$

где $a = (1,0,...,0)^T \in R^m$. Здесь знаки волны и штриха опущены.

Сформулируем двойственную к (2.9), (2.10) задачу:

на множестве векторов $Y \in R^m$ найти вектор, максимизирующий функционал [5-7]

$$Y^T a \xrightarrow{\hspace{1cm}} \max_{Y} \qquad (2.11)$$

при условии

$$|Y^T h(t)| \le 1,\ t \in [0,T] \qquad (2.12)$$

$h(t) \in R^m$ – заданный вектор, $a = (1,0,\dots,0)^T \in R^m$.

Пусть $Y^0 = (y_1^0,\dots,y_m^0)^T$ – решение задачи (2.11), (2.12), а $t_1,\dots,t_l$, $l \le m$ – такие моменты времени, в которых $|Y^T h(t_j)| = 1$, $j = 1,\dots,l$.

Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$N\Phi = a \qquad (2.13)$$

$$N = (h(t_1),\dots,h(t_l)) \in R^{m \times l},\ \Phi = (\Phi_1,\dots,\Phi_l)^T \in R^l$$

Справедливы утверждения [5-7]: система (2.13) совместна; $\Phi^0(t) = \sum_{j=1}^{l} \Phi_j^0 \delta(t - t_j)$ –решение задачи математического программирования (2.9), (2.10); оптимальные значения функционалов обеих задач совпадают, т. е. $\int_0^T |\Phi^0(t)|\, dt = Y^{0T} a$.

Таким образом, найдя решение двойственной задачи (2.11), (2.12), получим решение задачи математического программирования (2.9), (2.10).

Сведем двойственную задачу к задаче построения обобщенного чебышевского полинома

$$L = \min_{z_j, j=2,\dots,m} \max_{t \in [0,T]} |S(t)| \qquad (2.14)$$

где $S(t)$ – обобщенный полином, определяемый выражением

$$S(t) = h_1(t) + z_2 h_2(t) + \dots + z_m h_m(t) \qquad (2.15)$$

$h_i(t)$, $i = 1,\dots,m$ – компоненты вектора $h(t) \in R^m$; z_j, $j = 2,\dots,m$ – числа.

Показано [5,6], что если решение двойственной задачи (2.11), (2.12) $Y^0 = (y_1^0,\dots,y_m^0)^T$ существует, то существует также и решение задачи построения обобщенного чебышевского полинома (2.14), достигающегося на наборе $\{z_j\}$, $j = 2,\dots,m$; при этом $L \succ 0$ и

$$y_1^0 = L^{-1},\ y_j^0 = L^{-1} z_j^0,\ j = 2,\dots,m \qquad (2.16)$$

Справедливо и обратное утверждение: если решение задачи (2.15) достигается на наборе $\{z_j\}$, $j = 2,\dots,m$ и $L \succ 0$, то существует решение двойственной задачи (2.11), (2.12) и выполняется (2.16).

Для решения задачи математического программирования (2.9), (2.10) предлагается следующий алгоритм, удобный для аналитического исследования [7].

1. Строится обобщенный чебышевский полином (2.14); пусть в моменты времени $t_1,\dots,t_l$, $l \le m$ значения обобщенного чебышевского полинома равны $\pm L$, т.е. полином принимает при этих значениях t_i, $i = 1,\dots,l$, $l \le m$ наибольшие по абсолютной величине значения.

2. Решается система алгебраических уравнений (2.13); пусть $\Phi^0 = (\Phi_1^0,...,\Phi_l^0)^T \in R^l$ – решение (2.13).

3. Строится решение задачи математического программирования (2.9), (2.10) в виде

$$\Phi^0(t) = \sum_{j=1}^{l} \Phi_j^0 \delta(t - t_j), \; l \leq m \tag{2.17}$$

и определяется минимальное значение функционала (2.9)

$$I^* = \int_0^T \left|\Phi^0(t)\right| dt = \sum_{j=1}^{l} \left|\Phi_j^0\right|, \; l \leq m \tag{2.18}$$

Отметим, что

$$I^* = \int_0^T \left|\Phi^0(t)\right| dt = Y^{0T} a = L^{-1} \tag{2.19}$$

Моменты времени $t_1,...,t_l$, $l \leq m$ называются оптимальными моментами измерений.

В работе [7] сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности, единственности решения задачи построения обобщенного чебышевского полинома (2.14), которые позволяют находить обобщенный чебышевский полином, лишь установив существование полинома с нужными свойствами; а, следовательно, решение задачи (2.9), (2.10)–в аналитической форме.

Сформулируем и докажем утверждение, позволяющее определить условие, при котором оптимальные моменты измерений одни и те же, как в задаче (2.9), (2.10) при наличии немоделируемых ускорений $(\gamma(t) \neq 0)$, так и в задаче (2.9), (2.10), в которой они не учитываются $(\gamma(t) = 0)$.

Рассмотрим обобщенные полиномы

$$S(t) = h_1'(t) + \sum_{j=2}^{m} z_j h_j'(t) \tag{2.20}$$

$$U(t) = h_1'(t) + \sum_{j=2}^{m} u_j h_j'(t) \tag{2.21}$$

в которых z_j, u_j, $j = 2,...,m$ – числа; $h'(t) \in R^m$, $h(t) \in R^m$ – дифференцируемые на $[0,T]$ вектор-функции:

$$h'(t) = \frac{h(t)}{\vartheta(t)} \tag{2.22}$$

в предположении

$$\vartheta(t) \succ 0, \; t \in [0,T] \tag{2.23}$$

Справедливо следующее

Утверждение 2.1. Пусть $u_j^0 \in R^1$, $j = 2,...,m$ таковы, что

$$U^0(t) = h_1(t) + \sum_{j=2}^{m} u_j^0 h_j(t), \; t \in [0,T] \tag{2.24}$$

–обобщенный чебышевский полином, достигающий наибольших по абсолютной величине значений в точках

$$t_1 = 0, t_2, ..., t_{m-1}, t_m = T \qquad (2.25)$$

Тогда среди обобщенных полиномов вида $S(t) = h_1'(t) + \sum_{j=2}^{m} z_j h_j'(t)$ полином

$$S^0(t) = h_1'(t) + \sum_{j=2}^{m} z_j^0 h_j'(t) \qquad (2.26)$$

удовлетворяющий условиям

$$S^0(t_1) = -S^0(t_2) = ... = (-1)^{m-1} S^0(T)$$

$$\frac{dS^0(t)}{dt} = 0,\ t = t_i;\ \frac{dS^0(t)}{dt} \neq 0,\ t \neq t_i,\ i = 1,...,m \qquad (2.27)$$

является обобщенным чебышевским полиномом.

Доказательство. В соответствии с леммой о достаточных условиях оптимальности обобщенного полинома [7] из условия оптимальности $U^0(t)$ имеем, что уравнение $\sum_{j=2}^{m} \alpha_j h_j(t) = 0$ для любых α_j, $j = 2,...,m$, $\sum_{j=2}^{m} \alpha_j^2 \neq 0$ имеет не более $(m-2)$ корней внутри отрезка $[0,T]$. А тогда, согласно (2.22), (2.23) уравнение $\sum_{j=2}^{m} \alpha_j' h_j'(t) = 0$ для любых α_j', $j = 2,...,m$, $\sum_{j=2}^{m} (\alpha_j')^2 \neq 0$, также имеет не более $(m-2)$ корней внутри отрезка $[0,T]$. Следовательно, при выполнении условий (2.26), (2.27) полином $S^0(t)$ является обобщенным чебышевским полиномом. Утверждение доказано.

Утверждение позволяет найти решение задачи математического программирования (2.9), (2.10) при наличии немоделируемых ускорений $(\gamma(t) \neq 0)$ в аналитической форме, имея решение задачи (2.9), (2.10), в которой немоделируемые ускорения не учитываются $(\gamma(t) = 0)$. А также сформулированы критерии, при которых оптимальные моменты измерений обеих задач совпадают.

3. Задача коррекции инерциальной навигационной системы по информации о высоте при наличии немоделируемых ускорений. Пусть объект, на борту которого установлена инерциальная навигационная система, движется по траекториям, близким к ортодромии. Коррекция инерциальной навигационной системы с помощью дополнительной информации различной природы является основным источником повышения точности ее функционирования.

Особое положение в инерциальной навигации занимает информация о высоте. Она используется практически во всех инерциальных навигационных системах, применяемых в авиации и судовождении. В бортовой вычислитель навигационной системы она вводится либо априорно, либо поставляется высотомерами.

В зависимости от рода корректируемых инерциальных навигационных систем информация о высоте в совокупности с инерциальной информацией используется либо для однозначного определения местоположения объекта, либо только для формирования модельного силового поля, отличного по своей структуре от поля тяготения Земли. Примером модельных уравнений одной из таких систем, в которых информация о высоте используется только для формирования модельного поля тяготения, служат модельные уравнения трехкомпонентной навигационной системы. В результате динамические свойства системы улучшаются, а именно: динамические уравнения ошибок приобретают свойства неасимптотической устойчивости [8].

Рассмотрим задачу коррекции вертикального канала трехкомпонентной инерциальной навигационной системы с азимутально свободной ориентацией приборного трехгранника, установленной на борту летательного аппарата, движущегося по траекториям, близким к ортодромии.

Пусть помимо инерциальной информации в качестве дополнительной привлекается информация о высоте, поставляемая высотомером на фоне помехи измерений.

Уравнения динамических ошибок корректируемой по информации о высоте инерциальной навигационной системы, записанные в безразмерном времени и в безразмерных переменных в предположении, что характерные значения наблюдаемых переменных имеют один и тот же порядок, в интервалах времени коррекции $[0,T]$ описываются соотношениями [8]

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = -y_1 + y_3 + u,\ \dot{y}_3 = 0 \tag{3.1}$$

$$z(t) = y_1(t) + \rho(t),\ t \in [0,T] \tag{3.2}$$

где $\dot{(\ )} = \dfrac{d}{dt}$; t–безразмерное время; y_1–приведенная ошибка в определении высоты; y_2–ошибка в определении скорости в вертикальном направлении; y_3–постоянная приведенная погрешность вертикального ньютонометра; $u(t)$–немоделируемое ускорение; $z(t)$–непосредственно измеряемая величина; $\rho(t)$ – ошибка измерений.

Будем считать, что $T \le \pi/2$; реальные интервалы коррекции удовлетворяют этому условию (в размерном времени $\pi/2$ соответствует приблизительно 20 мин.).

Предполагается, что

$$|u(t)| \le \gamma,\ \gamma \ge 0,\ t \in [0,T] \tag{3.3}$$

$$|\rho(t)| \le \sigma,\ \sigma \succ 0,\ t \in [0,T] \tag{3.4}$$

где γ и σ – заданные постоянные.

Задача коррекции инерциальной навигационной системы при помощи дополнительной информации неинерциальной природы, в частности, по информации о высоте, состоит в построении значений фазовых переменных системы (3.1) в конечный момент времени коррекции $t = T$ по измерениям (3.2).

Будем строить линейные несмещенные оценки фазовых переменных системы (3.1) в момент времени $t = T$: $y_1(T)$, $y_2(T)$, $y_3(T)$.

Проведем преобразование независимой переменной в соотношениях (3.1)-(3.4): $t = T - \tau$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,T]$.

Тогда соотношения (3.1)-(3.4) перепишутся в виде

$$\dot{x}(\tau) = A\,x(t) + B\,u'(t) \tag{3.5}$$

$$z(\tau) = H^T x(\tau) + \rho'(\tau),\ \tau \in [0,T] \tag{3.6}$$

$$\left|u'(t)\right| \le \gamma,\ \left|\rho'(t)\right| \le \sigma,\ \tau \in [0,T] \tag{3.7}$$

где $x_i(\tau) = y_i(t)$, $i = 1,2,3$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ B = (0,1,0)^T;\ H = (1,0,0)^T \tag{3.8}$$

Представим измерения (3.6) в виде

$$z(\tau) = H^T(\tau)\mathrm{X}(\tau)x_0 + \int_0^{\tau} H^T(\tau)\mathrm{X}(\tau)\mathrm{X}^{-1}(s)B(s)u'(s)ds + \rho'(\tau)$$

или

$$z(\tau) = h^T(\tau)(x_0 + g(\tau)) + \rho'(\tau) \tag{3.9}$$

где $\mathrm{X}(\tau)$ – матрица фундаментальной системы решений системы (3.5):

$$\mathrm{X}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau & 1-\cos\tau \\ \sin\tau & \cos\tau & -\sin\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

$$h(\tau) = \mathrm{X}^T(\tau)H(\tau) = (\cos(\tau), -\sin(\tau), 1-\cos(\tau))^T \tag{3.11}$$

$$b(\tau) = \mathrm{X}^{-1}(\tau)B(\tau) = (\sin(\tau), \cos(\tau), 0)^T \tag{3.12}$$

$$g(\tau) = \int_0^{\tau} b(s)u'(s)ds = \int_0^{\tau} (\sin(\tau), \cos(\tau), 0)^T u(s)ds \tag{3.13}$$

Подставляя (3.11), (3.12) в соотношения (1.22), (1.23) и учитывая, что γ – постоянная величина (3.3), получаем

$$\overline{u}(s) = \gamma \frac{\sin(s-\tau)}{|\sin(s-\tau)|} \tag{3.14}$$

$$C_{max}(\tau) = \gamma \int_0^{\tau} \left|\sin(s-\tau)\right| ds,\ \tau \in [0,T],\ s \in [0,T],\ s \le \tau,\ T \le \pi/2$$

или

$$C_{max}(\tau) = \gamma(1-\cos\tau),\ \tau \in [0,T],\ T \le \pi/2 \tag{3.15}$$

Итак, требуется построить несмещенную оценку компонент вектора $x_0 = x(0)$, или параметров

$$l_i = a_i^T x_0, \; i = 1,2,3 \tag{3.16}$$

$$a_1 = (1, 0, 0)^T; \; a_2 = (0, 1, 0)^T, \; a_3 = (0, 0, 1)^T \tag{3.17}$$

по измерениям (3.9) на классе линейных оценок вида (1.6).

В соответствии с (2.2), (2.3), (3.11), (3.16), (3.17) задача математического программирования (2.9), (2.10), соответствующая оцениванию параметров $l_1 = x_1(0)$, $l_2 = x_2(0)$, $l_3 = x_3(0)$, соответственно, эквивалентна задаче (2.9), (2.10) с парами: $a_1 = (1, 0, 0)^T$, $h_1(\tau) = h'(\tau)$; $a_2 = (0, 1, 0)^T$, $h_2(\tau) = h'(\tau)$; $a_3 = (0, 0, 1)^T$, $h_3(\tau) = h'(\tau)$, где

$$h'(\tau) = \vartheta^{-1}(\tau)(\cos(\tau), -\sin(\tau), 1-\cos(\tau))^T \tag{3.18}$$

а

$$\vartheta(\tau) = \sigma(1+\alpha(1-\cos(\tau))), \; \alpha = \frac{\gamma}{\sigma} \tag{3.19}$$

в соответствии с (2.4), (2.5), (3.4), (3.5), (3.15). Ясно, что $\vartheta(\tau) \succ 0$, $\tau \in [0,T]$.

Согласно замечанию 2.3 указанные задачи можно сводить к задаче (2.9), (2.10) с $a = (1, 0, 0)^T$ и с

$$\begin{aligned} h_1(\tau) &= \vartheta^{-1}(\tau)(\cos(\tau), -\sin(\tau), 1-\cos(\tau))^T \\ h_2(\tau) &= \vartheta^{-1}(\tau)(-\sin(\tau), \cos(\tau), 1-\cos(\tau))^T \\ h_3(\tau) &= \vartheta^{-1}(\tau)(1-\cos(\tau), -\sin(\tau), \cos(\tau))^T \end{aligned} \tag{3.20}$$

соответственно. Тогда, согласно п.2, задача оценивания параметров $l_1 = x_1(0)$, $l_2 = x_2(0)$, $l_3 = x_3(0)$ сводится к задаче построения соответствующих обобщенных чебышевских полиномов, а именно:

$$L_1 = \min_{z_{1,j}} \max_{\tau \in [0,T]} |S_1(\tau,\alpha)| \tag{3.21}$$

$$S_1(\tau,\alpha) = \sigma^{-1}(1+\alpha(1-\cos\tau))^{-1}(\cos\tau - z_{1,2}\sin\tau + z_{1,3}(1-\cos\tau)) \tag{3.22}$$

$$L_2 = \min_{z_{2,j}} \max_{\tau \in [0,T]} |S_2(\tau,\alpha)| \tag{3.23}$$

$$S_2(\tau,\alpha) = \sigma^{-1}(1+\alpha(1-\cos\tau))^{-1}(-\sin\tau + z_{2,2}\cos\tau + z_{2,3}(1-\cos\tau)) \tag{3.24}$$

$$L_3 = \min_{z_{3,j}} \max_{\tau \in [0,T]} |S_3(\tau,\alpha)| \tag{3.25}$$

$$S_3(\tau,\alpha) = \sigma^{-1}(1+\alpha(1-\cos\tau))^{-1}(1-\cos\tau - z_{3,2}\sin\tau + z_{3,3}(1-\cos\tau)) \tag{3.26}$$

Отсюда, очевидно, следует, что при отсутствии немоделируемых ускорений, т.е. при $\gamma = 0$, или согласно (3.19) при $\alpha = 0$

$$S_i(\tau,0) = U_i(\tau), \; i = 1,2,3 \tag{3.27}$$

где $U_i(\tau)$, $i = 1,2,3$ – соответствующие обобщенные полиномы в задаче оценивания параметров $l_1 = x_1(0)$, $l_2 = x_2(0)$, $l_3 = x_3(0)$ при отсутствии немоделируемых ускорений.

Сначала исследуем полином

$$U_2(\tau) = \sigma^{-1}(-\sin\tau + u_{2,2}\cos\tau + u_{2,3}(1-\cos\tau)) \qquad (3.28)$$

соответствующий оцениванию $l_2 = x_2(0)$ при $\gamma = 0$.

С помощью геометрических построений и несложных аналитических исследований легко показать, что среди обобщенных полиномов вида (3.28) обобщенный чебышевский полином определяется выражением

$$U_2^0(\tau) = \sigma^{-1}(-\sin\tau + u_{2,2}^0\cos\tau + u_{2,3}^0(1-\cos\tau)) \qquad (3.29)$$

$$u_{2,2}^0 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{T}{4};\ u_{2,3}^0 = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{T}{4}$$

максимальное по абсолютной величине значение

$$L_2^0 = \sigma^{-1}\left|u_{2,2}^0\right| = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{T}{4}\sigma^{-1},\ T \le \pi/2 \qquad (3.30)$$

достигает в точках

$$\tau_1 = 0,\ \tau_2 = \frac{T}{2},\ \tau_3 = T \qquad (3.31)$$

оптимальных моментов измерений.

Легко показать, что согласно утверждению 2.1, в силу условия $\vartheta(\tau) > 0$, $\tau \in [0,T]$, обобщенный чебышевский полином, соответствующий оцениванию $l_2 = x_2(0)$ при $\gamma \ne 0$, достигает максимального по абсолютной величине значения в тех же самых точках (3.31), что и полином (3.29), и определяется выражением

$$S_2^0(\tau,\alpha) = \sigma^{-1}(1+\alpha(1-\cos\tau))^{-1}(-\sin\tau + z_{2,2}^0\cos\tau + z_{2,3}^0(1-\cos\tau)) \qquad (3.32)$$

$$z_{2,2}^0 = \frac{(2\sin(T/2) - \sin T) + \alpha(\sin(T/2)(1-\cos T) - 3\sin T(1-\cos(T/2)))}{2(1+\alpha)(1+\alpha(1-\cos(T/2)))(1-\cos T)}$$

$$z_{2,3}^0 = \frac{(2\sin(T/2) + \sin T) + \alpha(\sin(T/2)(1-\cos T) + \sin T(1-\cos(T/2)))}{2(1+\alpha)(1+\alpha(1-\cos(T/2)))(1-\cos T)}$$

максимальное по абсолютной величине значение равно

$$L_2 = \frac{2\sin(T/2) - \sin T}{2(1-\cos T)(1+\alpha(1-\cos(T/2)))}\sigma^{-1} \qquad (3.33)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что полиномы (3.29) и (3.32) удовлетворяют условиям основной леммы об оптимальности обобщенных полиномов [7].

Так как уравнения вида $\alpha_1\sin\tau + \alpha_2(1-\cos\tau) = 0$ и $\alpha_1\sin\tau + \alpha_2\cos\tau = 0$ при любых α_1, α_2, таких, что $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \ne 0$ имеют внутри отрезка $[0,T]$ только один корень, то согласно следствию к основной лемме [7] оптимальные моменты измерений при оценивании всех параметров (3.16) определяются равенствами (3.31) как при наличии немоделируемых ускорений, так и при их отсутствии.

Весовые коэффициенты соответствующих алгоритмов оценивания подсчитываются из условия несмещенности (2.10) или определяются из соотношения (2.13):

$$N\Phi_i^* = a_i,\ i = 1,2,3$$

или

$$\Phi_i^* = N^{-1}a_i \tag{3.34}$$

где a_i определяются выражениями (3.17).

Подсчитаем матрицу $N \in R^{3\times3}$. Подставляя (3.18), (3.31) в (2.13), получаем

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos(T/2)}{1+\alpha(1-\cos(T/2))} & \dfrac{\cos T}{1+\alpha(1-\cos T)} \\ 0 & \dfrac{-\sin(T/2)}{1+\alpha(1-\cos(T/2))} & \dfrac{-\sin T}{1+\alpha(1-\cos T)} \\ 0 & \dfrac{1-\cos(T/2)}{1+\alpha(1-\cos(T/2))} & \dfrac{1-\cos T}{1+\alpha(1-\cos T)} \end{pmatrix} \cdot \sigma \tag{3.35}$$

откуда, очевидно, следует, что

$$\det N = \frac{\sin T - 2\sin(T/2)}{(1+\alpha(1-\cos T))(1+\alpha(1-\cos(T/2)))}\sigma \neq 0 \text{ для всех } T \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

Следовательно, задача оценивания параметров (3.16) системы имеет единственное решение. Обращая матрицу (3.35) и подставляя в (3.34), получаем весовые коэффициенты минимаксных алгоритмов оценивания параметров системы (3.1) $y_i(T) = x_i(0)$, $i = 1,2,3$:

$$\Phi_{1,1}^* = \Phi_{1,2}^* = 0; \quad \Phi_{1,3}^* = \sigma$$

$$\Phi_{2,1}^* = \frac{-(1-\cos(T/2))(1+\alpha(1-\cos T))}{\sin T - 2\sin(T/2)}\sigma$$

$$\Phi_{2,2}^* = \frac{(1-\cos T)(1+\alpha(1-\cos(T/2)))}{\sin T - 2\sin(T/2)}\sigma$$

$$\Phi_{2,3}^* = \frac{(\cos T - \cos(T/2))}{\sin T - 2\sin(T/2)}\sigma$$

$$\Phi_{3,1}^* = \frac{-\sin(T/2)(1+\alpha(1-\cos T))}{\sin T - 2\sin(T/2)}\sigma;\ \Phi_{3,2}^* = \frac{\sin T(1+\alpha(1-\cos(T/2)))}{\sin T - 2\sin(T/2)}\sigma$$

$$\Phi_{3,3}^* = \frac{-\sin(T/2)}{\sin T - 2\sin(T/2)}\sigma.$$

Оптимальные гарантированные (минимаксные) среднеквадратические значения ошибок оценок параметров $y_1(T)$, $y_2(T)$, $y_3(T)$ в соответстнии с (2.17) равны, соответственно, величинам

$$J_1^* = \sigma(1+\alpha(1-\cos\tau))$$

$$J_2^* = \frac{2(1-\cos T)(1+\alpha(1-\cos(T/2)))}{2\sin(T/2) - \sin T}\sigma \tag{3.36}$$

$$J_3^* = \frac{2\sin(T/2) + \sin T + \alpha(\sin T(1-\cos(T/2)) + \sin(T/2)(1-\cos T))}{2\sin(T/2) - \sin T}\sigma$$

Оптимальные гарантированные оценки параметров $y_1(T)$, $y_2(T)$, $y_3(T)$, определяемые задачей (2.9), (2.10) при наличии немоделируемых ускорений и обозначаемые дополнительной звездочкой, имеют вид

$$y_1^*(T) = \Phi_{1,3}^* \; z(T)$$
$$y_2^*(T) = \Phi_{2,1}^* z(0) + \Phi_{2,2}^* z(T/2) + \Phi_{2,3}^* \; z(T) \qquad (3.37)$$
$$y_3^*(T) = \Phi_{3,1}^* z(0) + \Phi_{3,2}^* z(T/2) + \Phi_{3,3}^* \; z(T)$$

Оценки (3.37), очевидно, могут быть легко реализуемы. Подставляя значение $\alpha = 0$ в соотношения (3.36), (3.37), получаем оценки и точности оценивания параметров $y_1(T)$, $y_2(T)$, $y_3(T)$, определяемые задачей (2.9), (2.10) при отсутствии немоделируемых ускорений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский В. А., Белоусов Л.Ю. Минимаксная оценка точности определения орбиты космического аппарата при учете немоделируемых ускорений.// Космич. исслед. 1979. Т. 17. № 3. С. 342.
2. Белоусов Л. Ю., Кузьмин Е. А. Применение теории двойственности к задачам оценки точности параметров орбит космических аппаратов. // Космич. Исслед.1985. Т. 23. № 6. . С. 849.
3. Лидов М. Л. Игровая задача оценивания с немоделируемыми ускорениями и алгоритм ее решения. // Космич. исслед. 1986. Т.24. № 2. С.247.
4. Лидов М.Л., Бакума Л.М. Экспериментальная проверка эффективности нового алгоритма для задачи оценивания с немоделируемыми возмущениями. // Космич. исслед. 1991. Т.29. № 1. С.115.
5. Белоусов Л. Ю., Крупень В. Я. О некоторых асимптотических оценках начальных параметров при измерении дальности. // Космич. исслед. 1974. Т. 12. № 2. С. 191-196.
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука. 1968. 475 с.
7. Матасов А.И., Мартиросян С.Р. Минимаксные алгоритмы позиционной коррекции инерциальных навигационных систем. //Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С.4-14.
8. Парусников Н.А. Использование информации о высоте в задаче инерциальной навигации. // Научные труды Ин-та механики МГУ. 1975. №40.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.10.2004