

УДК 539.3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ КУЛОНОВОМ ТРЕНИИ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Աղալոյան Լ. Ա., Սոգոսյան Ա. Մ.

Լ. Ա. Աղալոյան, Ա. Մ. Սոգոսյան

Երկչրա սրբարոպ ապի ստիպարական առաւանձններ շերտերի միջև կոլոմբյան շփման առկայության դեպքում

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է սրբարոպ ապի ստիպարական առաւանձնների վերաբերյալ առաւելաբարան տեսության եռաչափ ասիմպտոտիկ խնդիրը։ Երբ շերտերի միջև կա կոլոմբյան շփում։ Որպէսզէ Է ըստուներ թեւտրի Է սեղաշտտութեան վեկտորի բաղադրիչների առիմպտոտիկան, կատարվում է իւզերալիոն պոպուս անհայտ մեծությունները որպիւր համար։ Ստապվում է խնդրի ընդհանուր առիմպտոտիկական բաժանը, մասնաւոր դասի խնդիրների իսանք ստապվում են փակ լուծումներ։ Նշվում են սեպանակի առաւելում կալմանները։

L. A. Aghalovyan, H. M. Poghosyan

The Forced Vibrations of Two-layer Orthotropic Plate at Coulomb Friction Between Layers

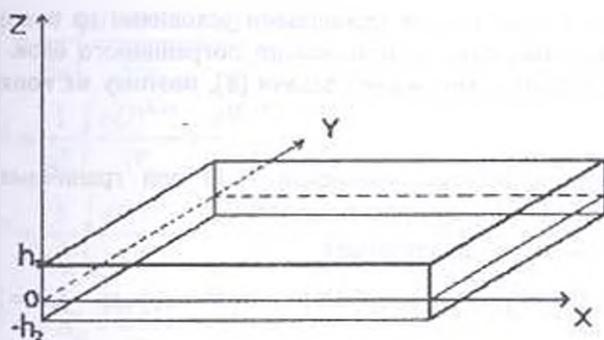
The three-dimensional dynamic problem of the elasticity theory on forced vibration of orthotropic plate at coulomb friction between layers is solved by the asymptotic method. The asymptotics of stress tensor and displacement vector components are found. The values determination of the iterative process for sought is built. The common asymptotic solution of the problem is found. The closed solution for particular type of problems is found. The resonance arising conditions are established.

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է սրբարոպ ապի ստիպարական առաւանձնների վերաբերյալ առաւելաբարան տեսության եռաչափ ասիմպտոտիկ խնդիրը։ Երբ շերտերի միջև կա կոլոմբյան շփում։ Որպէսզէ Է ըստուներ թեւտրի Է սեղաշտտութեան վեկտորի բաղադրիչների առիմպտոտիկան, կատարվում է իւզերալիոն պոպուս անհայտ մեծությունները որպիւր համար։ Ստապվում է խնդրի ընդհանուր առիմպտոտիկական բաժանը, մասնաւոր դասի խնդիրների իսանք ստապվում են փակ լուծումներ։ Նշվում են սեպանակի առաւելում կալմանները։

1. Для определения и анализа напряженно-деформированных состояний тонких тел (балки, стержни, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений. Асимптотическим методом статические краевые задачи изотропных и анизотропных тонких тел рассмотрены в [1,2]. Для решения неклассических краевых задач, когда на лицевых поверхностях тонкого тела заданы вектор перемещения или смешанные краевые условия, этот метод оказался особенно эффективным [3-6]. Асимптотический метод эффективен не только для определения решения вышеупомянутых задач, но и для решения динамических задач, в частности, для определения решений о собственных и вынужденных колебаниях однослойных и двухслойных балок и пластин [7-9].

В работе рассматривается задача о вынужденных колебаниях двухслойной ортотропной пластинки

$D = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_0, -h_2 \leq z \leq h_1, h = \max(h_1, h_2) \ll l\}$ при кулоновом трении между слоями (фиг. 1).



Фиг.1

где D_0 – плоскость между слоями, l – характерный тангенциальный размер пластинки.

Требуется определить решение системы динамических уравнений задачи теории упругости для ортотропного тела:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^k}{\partial z} &= \rho_k \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} & \frac{\partial u^k}{\partial x} &= a_{11}^k \sigma_x^k + a_{12}^k \sigma_y^k + a_{13}^k \sigma_z^k \\
 \frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^k}{\partial z} &= \rho_k \frac{\partial^2 v^k}{\partial t^2} & \frac{\partial v^k}{\partial y} &= a_{12}^k \sigma_x^k + a_{22}^k \sigma_y^k + a_{23}^k \sigma_z^k \\
 \frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^k}{\partial z} &= \rho_k \frac{\partial^2 w^k}{\partial t^2} & \frac{\partial w^k}{\partial z} &= a_{13}^k \sigma_x^k + a_{23}^k \sigma_y^k + a_{33}^k \sigma_z^k \\
 \frac{\partial u^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial x} &= a_{46}^k \sigma_{xy}^k, \quad \frac{\partial w^k}{\partial x} + \frac{\partial u^k}{\partial z} = a_{43}^k \sigma_x^k, \quad \frac{\partial w^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial z} = a_{44}^k \sigma_y^k & k &= I, II
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

при следующих граничных условиях:

$$u''(-h_2) = u'(\xi, \eta) \exp(i\Omega t) \quad (u, v, w), \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l} \quad \text{при } z = -h_2 \tag{1.2}$$

$$u'(h_1) = v'(h_1) = w'(h_1) = 0 \quad \text{при } z = h_1 \tag{1.3}$$

или

$$\sigma_x'(h_1) = \sigma_y'(h_1) = \sigma_z'(h_1) = 0 \quad \text{при } z = h_1 \tag{1.4}$$

где Ω – частота вынуждающего воздействия.

На поверхности контакта $z = 0$ заданы условия неполного контакта между слоями:

$$\begin{aligned}
 w'(z=0) &= w''(z=0) \\
 \sigma_x'(z=0) &= \sigma_x''(z=0) \\
 \sigma_x'(z=0) &= \sigma_x''(z=0) = f_1 \sigma_x'(z=0) \\
 \sigma_y'(z=0) &= \sigma_y''(z=0) = f_2 \sigma_x'(z=0)
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Для этого класса задач граничными условиями на боковой поверхности обусловлено появление динамического пограничного слоя. Эти условия не влияют на решение внутренней задачи [8], поэтому их конкретизировать не будем.

2. Решение системы уравнений (1.1) при граничных и контактных условиях (1.2)-(1.5) будем искать в виде:

$$(u^k, v^k, w^k) = (u_x^k, u_y^k, u_z^k) \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^k(x, y, z, t) = \sigma_{\mu}^k(x, y, z) \exp(i\Omega t) \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad j, k = 1, 2, 3$$

$$k = I, II \tag{2.1}$$

Затем перейдем к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \varepsilon = \frac{h}{l}$$

$$U^k = \frac{u_x^k}{l}, \quad V^k = \frac{u_y^k}{l}, \quad W^k = \frac{u_z^k}{l} \tag{2.2}$$

Подставив (2.1) в преобразованные уравнения (1.1), получим следующую сингулярно-возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho_k \Omega^2 U^k = 0, \quad (1, 2, 3; U, V, W)$$

$$\frac{\partial U^k}{\partial \xi} = a_{11}^k \sigma_{11}^k + a_{12}^k \sigma_{22}^k + a_{13}^k \sigma_{33}^k, \quad (\xi, \eta; U, V; 1, 2)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial W^k}{\partial \zeta} = a_{13}^k \sigma_{11}^k + a_{23}^k \sigma_{22}^k + a_{33}^k \sigma_{33}^k, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial W^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^k}{\partial \zeta} = a_{44}^k \sigma_{23}^k, \quad \frac{\partial U^k}{\partial \eta} + \frac{\partial V^k}{\partial \xi} = a_{55}^k \sigma_{12}^k$$

$$\frac{\partial W^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U^k}{\partial \zeta} = a_{66}^k \sigma_{13}^k$$

$$\Omega^2 = h^2 \Omega^2, \quad k = I, II$$

Эту систему будем решать асимптотическим методом. Решение будем искать в виде [2.9]:

$$\sigma_{ij}^k = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{(k,s)}, \quad U^k = \varepsilon^s U^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (U, V, W) s = \overline{0, N}, \quad k = I, II \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем обозначение $s = \overline{0, N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах $[0, N]$.

Подставив (2.4) в (2.3), получим рекуррентную систему для определения $\sigma_{ij}^{(k,s+1)}, U^{(k,s+1)}, V^{(k,s+1)}, W^{(k,s+1)}$.

Решив эту систему, получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{22}^{(k,j)} &= \frac{1}{a_{22}^k} \left[\frac{\partial V^{(k,j-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial U^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \right] \\
\sigma_{11}^{(k,j)} &= \frac{1}{a_{33}^k} \left[\frac{\partial U^{(k,j)}}{\partial \xi} + \frac{\partial W^{(k,j-1)}}{\partial \xi} \right] \\
\sigma_{33}^{(k,j)} &= \frac{1}{a_{33}^k} \left[\frac{\partial V^{(k,j)}}{\partial \xi} + \frac{\partial W^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \right] \\
\sigma_{12}^{(k,j)} &= -A_{23}^k \frac{\partial W^{(k,j)}}{\partial \xi} + A_{22}^k \frac{\partial U^{(k,j-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^k \frac{\partial V^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{23}^{(k,j)} &= -A_{11}^k \frac{\partial W^{(k,j)}}{\partial \xi} - A_{12}^k \frac{\partial U^{(k,j-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^k \frac{\partial V^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{31}^{(k,j)} &= A_{11}^k \frac{\partial W^{(k,j)}}{\partial \xi} - A_{12}^k \frac{\partial U^{(k,j-1)}}{\partial \xi} - A_{31}^k \frac{\partial V^{(k,j-1)}}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11}^k &= \frac{a_{11}^k a_{33}^k - a_{31}^{k2}}{\Delta}, & A_{22}^k &= \frac{a_{22}^k a_{11}^k - a_{12}^{k2}}{\Delta}, & A_{33}^k &= \frac{a_{11}^k a_{22}^k - a_{12}^{k2}}{\Delta} \\
A_{12}^k &= \frac{a_{11}^k a_{12}^k - a_{12}^k a_{11}^k}{\Delta}, & A_{23}^k &= \frac{a_{11}^k a_{23}^k - a_{12}^k a_{13}^k}{\Delta}, & A_{31}^k &= \frac{a_{12}^k a_{11}^k - a_{12}^k a_{21}^k}{\Delta}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\Delta = a_{11}^k a_{22}^k a_{33}^k + 2a_{12}^k a_{13}^k a_{23}^k - a_{11}^k (a_{13}^k)^2 - a_{22}^k (a_{23}^k)^2 - a_{33}^k (a_{31}^k)^2$$

Функции $U^{(k,j)}$, $V^{(k,j)}$, $W^{(k,j)}$ определяются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U^{(k,j)}}{\partial \xi^2} + a_{33}^k \rho_k \Omega^2 U^{(k,j)} &= R_k^{(k,j)}, & R_k^{(k,j)} &= -\frac{\partial^2 W^{(k,j-1)}}{\partial \xi \partial \xi} - a_{33}^k \left[\frac{\partial \sigma_{11}^{(k,j-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \right] \\
\frac{\partial^2 V^{(k,j)}}{\partial \xi^2} + a_{22}^k \rho_k \Omega^2 V^{(k,j)} &= R_k^{(k,j)}, & R_k^{(k,j)} &= -\frac{\partial^2 W^{(k,j-1)}}{\partial \eta \partial \xi} - a_{22}^k \left[\frac{\partial \sigma_{22}^{(k,j-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \right] \\
A_{11}^k \frac{\partial^2 W^{(k,j)}}{\partial \xi^2} + \rho_k \Omega^2 W^{(k,j)} &= R_k^{(k,j)}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$R_k^{(k,j)} = A_{22}^k \frac{\partial^2 U^{(k,j-1)}}{\partial \xi \partial \xi} + A_{11}^k \frac{\partial^2 V^{(k,j-1)}}{\partial \eta \partial \xi} - \left[\frac{\partial \sigma_{11}^{(k,j-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \right], \quad k = I, II$$

Решениями уравнений (2.7) являются:

$$U^{(k,j)} = U_0^{(k,j)}(\xi, \eta, \zeta) + U^{\tau(k,j)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (U, V, W) \tag{2.8}$$

где величины с индексом "0" – решения однородных, а с индексом "τ" – частные решения неоднородных уравнений (2.7).

Решениями однородных уравнений являются:

$$\begin{aligned}
U_0^{(k,j)} &= C_1^{(k,j)}(\xi, \eta) \sin a_1^k \Omega \zeta + C_2^{(k,j)}(\xi, \eta) \cos a_1^k \Omega \zeta \\
V_0^{(k,j)} &= C_1^{(k,j)}(\xi, \eta) \sin a_1^k \Omega \zeta + C_2^{(k,j)}(\xi, \eta) \cos a_1^k \Omega \zeta \\
W_0^{(k,j)} &= C_1^{(k,j)}(\xi, \eta) \sin a_1^k \Omega \zeta + C_2^{(k,j)}(\xi, \eta) \cos a_1^k \Omega \zeta
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$a_1^t = \sqrt{a_{33}^t \rho_k}, \quad a_2^t = \sqrt{a_{44}^t \rho_k}, \quad a_3^t = \sqrt{\frac{\rho_k}{A_{11}^t}} \quad k = I, II$$

следовательно,

$$\begin{aligned} U^{(k,i)} &= C_1^{(k,i)}(\xi, \eta) \sin a_1^t \Omega \zeta + C_2^{(k,i)}(\xi, \eta) \cos a_1^t \Omega \zeta + U_r^{(k,i)}(\xi, \eta, \zeta) \\ V^{(k,i)} &= C_3^{(k,i)}(\xi, \eta) \sin a_2^t \Omega \zeta + C_4^{(k,i)}(\xi, \eta) \cos a_2^t \Omega \zeta + V_r^{(k,i)}(\xi, \eta, \zeta) \\ W^{(k,i)} &= C_5^{(k,i)}(\xi, \eta) \sin a_3^t \Omega \zeta + C_6^{(k,i)}(\xi, \eta) \cos a_3^t \Omega \zeta + W_r^{(k,i)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. Удовлетворим граничным и контактными условиям. После удовлетворения условиям (1.2), (1.3), (1.5), получим три алгебраические системы относительно неизвестных функций $C_i^{(k,i)}$, $k = I, II$, $i = 1, 2, \dots, 6$.

$$\begin{aligned} C_1^{(i,j)}(\xi, \eta) \sin a_1^t \Omega \zeta_1 + C_2^{(i,j)}(\xi, \eta) \cos a_1^t \Omega \zeta_1 &= -U_r^{(i,j)}(\zeta = \zeta_1) \\ -C_1^{(i,j)}(\xi, \eta) \sin a_1^t \Omega \zeta_2 + C_2^{(i,j)}(\xi, \eta) \cos a_1^t \Omega \zeta_2 &= U_r^{(i,j)} - U_r^{(i,j)}(\zeta = -\zeta_2) \\ \Omega \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{33}^t}} C_1^{(i,j)}(\xi, \eta) - \Omega \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{33}^t}} C_1^{(i,j)}(\xi, \eta) &= b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) - b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Omega \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^t}} C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) - f_1 A_{11}^t a_2^t \Omega C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) &= f_1 b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) - b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) \\ C_5^{(i,j)}(\xi, \eta) - C_6^{(i,j)}(\xi, \eta) &= W_r^{(i,j)}(\zeta = 0) - W_r^{(i,j)}(\zeta = 0) \\ C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) \sin a_2^t \Omega \zeta_1 + C_4^{(i,j)}(\xi, \eta) \cos a_2^t \Omega \zeta_1 &= -W_r^{(i,j)}(\zeta = \zeta_1) \\ \sqrt{A_{11}^t \rho_I} \Omega C_5^{(i,j)}(\xi, \eta) - \sqrt{A_{11}^t \rho_{II}} \Omega C_5^{(i,j)}(\xi, \eta) &= b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) - b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) \\ -C_5^{(i,j)}(\xi, \eta) \sin a_3^t \Omega \zeta_2 + C_6^{(i,j)}(\xi, \eta) \cos a_3^t \Omega \zeta_2 &= W_r^{(i,j)} - W_r^{(i,j)}(\zeta = -\zeta_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) \sin a_2^t \Omega \zeta_1 + C_4^{(i,j)}(\xi, \eta) \cos a_2^t \Omega \zeta_1 &= -V_r^{(i,j)}(\zeta = \zeta_1) \\ -C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) \sin a_2^t \Omega \zeta_2 + C_4^{(i,j)}(\xi, \eta) \cos a_2^t \Omega \zeta_2 &= V_r^{(i,j)} - V_r^{(i,j)}(\zeta = -\zeta_2) \\ \Omega \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^t}} C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) - \Omega \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^t}} C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) &= b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) - b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\Omega \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^t}} C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) - f_2 \sqrt{A_{11}^t \rho_I} \Omega C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) = f_2 b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) - b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0)$$

где

$$\begin{aligned} U^{(i,j)} &= \frac{u}{l}, \quad V^{(i,j)} = \frac{v}{l}, \quad W^{(i,j)} = \frac{w}{l}, \quad U^{(i,j)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (U, V, W) \\ b_{33}^{(i,j)} &= \frac{1}{a_{33}^t} \left[\frac{\partial U_r^{(i,j)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_r^{(i,j-1)}}{\partial \xi} \right], \quad b_{33}^{(i,j)} = \frac{1}{a_{33}^t} \left[\frac{\partial V_r^{(i,j)} + \partial W_r^{(i,j-1)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_r^{(i,j-1)}}{\partial \eta} \right] \\ b_{33}^{(i,j)} &= A_{11}^t \frac{\partial W_r^{(i,j)}}{\partial \zeta} - A_{11}^t \frac{\partial U_r^{(i,j-1)}}{\partial \xi} - A_{11}^t \frac{\partial V_r^{(i,j-1)}}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решив систему (3.1)–(3.3) и подставив значения $C_i^{(k,i)}$ в (2.10), получим:

$$U^{(1,1)} = U_1^{(1,1)}(\xi, \eta, \zeta) + \frac{1}{\cos a'_1 \Omega \zeta_1} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\Omega} \left(f_1 b_{33}^{(1,1)}(\zeta=0) - b_{11}^{(1,1)}(\zeta=0) + f_1 A'_1 a'_1 \Omega \cdot \frac{l_1^{(1)}}{\Delta_1}(\xi, \eta) \right) \right] \times \quad (3.5)$$

$$\times \left[\frac{a'_1}{\rho_1} \sin a'_1 \Omega \cdot (\zeta - \zeta_1) - U_1^{(1,1)}(\zeta = \zeta_1) \cos a'_1 \Omega \zeta \right]$$

$$V^{(1,1)} = \frac{1}{\cos a'_1 \Omega \zeta_1} \left[C_1^{(1,1)}(\xi, \eta) \sin a'_1 \Omega \cdot (\zeta - \zeta_1) - V_1^{(1,1)}(\zeta = \zeta_1) \cos a'_1 \Omega \zeta \right] + V_1^{(1,1)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$W^{(1,1)} = \frac{1}{\cos a'_1 \Omega \zeta_1} \left[\frac{l_1^{(1)}}{\Delta_1} \sin a'_1 \Omega \cdot (\zeta - \zeta_1) - W_1^{(1,1)}(\zeta = \zeta_1) \cos a'_1 \Omega \zeta \right] + W_1^{(1,1)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$U^{(2,1)} = \frac{1}{\cos a''_1 \Omega \zeta_1} \left[C_1^{(2,1)}(\xi, \eta) \sin a''_1 \Omega \cdot (\zeta + \zeta_2) + \right.$$

$$\left. + (U^{(1,1)} - U_1^{(2,1)}(\zeta = -\zeta_2)) \cos a''_1 \Omega \zeta \right] + U_1^{(2,1)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$V^{(2,1)} = \frac{1}{\cos a''_2 \Omega \zeta_2} \left[C_2^{(2,1)}(\xi, \eta) \sin a''_2 \Omega \cdot (\zeta + \zeta_2) + \right.$$

$$\left. + (V^{(1,1)} - V_1^{(2,1)}(\zeta = -\zeta_2)) \cos a''_2 \Omega \zeta \right] + V_1^{(2,1)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (3.6)$$

$$W^{(2,1)} = \frac{1}{\cos a''_1 \Omega \zeta_1} \left[C_1^{(2,1)}(\xi, \eta) \sin a''_1 \Omega \cdot (\zeta + \zeta_2) + \right.$$

$$\left. + (W^{(1,1)} - W_1^{(2,1)}(\zeta = -\zeta_2)) \cos a''_1 \Omega \zeta \right] + W_1^{(2,1)}(\xi, \eta, \zeta)$$

где

$$l_1^{(1)} = \left[- (W_1^{(2,1)}(\zeta=0) - W_1^{(1,1)}(\zeta=0)) \cos a'_1 \Omega \zeta_1 - W_1^{(1,1)}(\zeta = \zeta_1) \right] \times$$

$$\times \sqrt{A''_1 \rho''_1} \Omega \cdot \cos a''_1 \Omega \zeta_1 + \left[(b_{33}^{(2,1)}(\zeta=0) - b_{11}^{(2,1)}(\zeta=0)) \sin a''_1 \Omega \zeta_2 - \right.$$

$$\left. - (W^{(1,1)} - W_1^{(2,1)}(\zeta = -\zeta_2)) \sqrt{A''_1 \rho''_1} \Omega \cdot \right] \cos a'_1 \Omega \zeta_1,$$

$$\Delta_1 = \sqrt{A''_1 \rho''_1} \Omega \cdot \cos a''_1 \Omega \zeta_1 \sin a'_1 \Omega \zeta_1 + \sqrt{A''_1 \rho''_1} \Omega \cdot \sin a''_1 \Omega \zeta_2 \cos a'_1 \Omega \zeta_1,$$

$$C_1^{(1,1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega} \left(f_1 b_{33}^{(1,1)}(\zeta=0) - b_{11}^{(1,1)}(\zeta=0) + f_1 A'_1 a'_1 \Omega \cdot \frac{l_1^{(1)}}{\Delta_1}(\xi, \eta) \right) \sqrt{\frac{a''_{33}}{\rho_1}}$$

$$C_1^{(2,1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega} \left(\Omega \cdot \sqrt{\frac{\rho_1}{a''_{33}}} C_1^{(1,1)}(\xi, \eta) - b_{11}^{(2,1)}(\zeta=0) + b_{33}^{(2,1)}(\zeta=0) \right) \sqrt{\frac{a''_{33}}{\rho''_1}} \quad (3.7)$$

$$C_1^{(2,1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{a''_{33}}{\rho_1}} (f_2 b_{33}^{(2,1)}(\zeta=0) - b_{11}^{(2,1)}(\zeta=0)) + f_2 \sqrt{A''_1 a''_1} \frac{l_1^{(1)}}{\Delta_1}$$

$$C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{a_{33}''}{\rho_{ii}}} (-b_{23}^{(i,j)}(\zeta=0) + b_{23}^{(j,i)}(\zeta=0)) + \sqrt{\frac{a_{ii}'' \rho_i}{\rho_{ii} a_{ii}'}} C_3^{(j,i)}(\xi, \eta)$$

$$C_5^{(i,j)}(\xi, \eta) = \frac{I_1^{(i)}}{\Delta_1}$$

$$C_7^{(i,j)}(\xi, \eta) = \frac{I_3^{(i)}}{\Delta_1} \frac{\sqrt{A_{11}' \rho_i}}{\sqrt{A_{11}'' \rho_{ii}}} - \frac{b_{11}^{(j,i)}(\zeta=0) + b_{11}^{(i,j)}(\zeta=0)}{\sqrt{A_{11}'' \rho_{ii}} \Omega}$$

Решения (3.5), (3.6) будут конечными, если

$$\cos a_i' \Omega \zeta_1 \neq 0, \quad i=1, 2, 3 \quad j=1, 2 \quad k=I, II$$

$$\Delta_1 \neq 0 \quad (3.8)$$

Условия (3.8) будут выполнены, если Ω не является частотой собственных колебаний [9], в противном случае будет возникать резонанс. Формулы (2.1), (2.5), (2.10), (3.5)-(3.7) позволяют определить все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения с заранее заданной асимптотической точностью.

4. Рассмотрим частный случай, пусть

$$u' = \text{const}, \quad v' = \text{const}, \quad w' = \text{const} \quad (4.1)$$

При $s=0$ будем иметь

$$U^{(i,m)} = -\frac{1}{\cos a_1' \Omega \zeta_1} \frac{W^{-(m)} f_1 \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{ii}' \rho_{ii}} \Omega}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_1' \Omega (\zeta - \zeta_1)$$

$$V^{(i,m)} = -f_1 \frac{W^{-(m)} \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{ii}' \rho_{ii}} \Omega}{\Delta_1 \cos a_2' \Omega \zeta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_2' \Omega (\zeta - \zeta_1) \quad (4.2)$$

$$W^{(i,m)} = -\frac{W^{-(m)} \sqrt{A_{11}'' \rho_{ii}} \Omega}{\Delta_1} \sin a_1' \Omega (\zeta - \zeta_1)$$

$$U^{(ii,m)} = \frac{1}{\cos a_1'' \Omega \zeta_2}$$

$$\times \left[-\frac{W^{-(m)} f_1 \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{ii}' \rho_i} \Omega}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_1'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + U^{-(m)} \cos a_1'' \Omega \zeta \right]$$

$$V^{(ii,m)} = \frac{1}{\cos a_1'' \Omega \zeta_2} \times$$

$$\times \left[-f_2 \frac{W^{-(m)} \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{ii}' \rho_i} \Omega}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_2'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + V^{-(m)} \cos a_2'' \Omega \zeta \right] \quad (4.3)$$

$$\bar{W}^{(n,0)} = \frac{1}{\cos a'' \Omega \zeta_2} \times \left[\frac{W^{(n,0)} \sqrt{A'_1 \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \sin a'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + W^{(n,0)} \cos a'' \Omega \zeta \right]$$

Из (2.5) при $s = 0$ учитывая, что $Q^m = 0$ при $m < 0$, для компонентов тензора напряжений получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(s,0)} &= 0, & \sigma_{11}^{(s,0)} &= \frac{1}{a''_1} \frac{\partial U^{(s,0)}}{\partial \zeta}, & \sigma_{21}^{(s,0)} &= \frac{1}{a''_2} \frac{\partial V^{(s,0)}}{\partial \zeta} \\ \sigma_{11}^{(s,0)} &= -A'_2 \frac{\partial W^{(s,0)}}{\partial \zeta}, & \sigma_{22}^{(s,0)} &= -A'_1 \frac{\partial W^{(s,0)}}{\partial \zeta}, & \sigma_{33}^{(s,0)} &= A'_1 \frac{\partial W^{(s,0)}}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Несложно убедиться, что при $s > 0$

$$U^{(s,s)}, V^{(s,s)}, W^{(s,s)} = 0, \quad (4.5)$$

$$\sigma_{ij}^{(s,s)} = 0, \quad k = I, II, \quad i, j = 1, 2, 3$$

поэтому приближению $s = 0$ соответствует точное решение: величины первого слоя —

$$u' = -\frac{1}{\cos a'_1 \Omega \zeta_1} \frac{w f_1 \sqrt{A'_1 A''_1 a''_2 \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \sin a'_1 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t)$$

$$v' = -f_2 \frac{w \sqrt{A''_1 a''_2 A''_1 \rho_1 \Omega}}{\Delta_1 \cos a'_2 \Omega \zeta_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \sin a'_2 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t)$$

$$w' = -\frac{w \sqrt{A''_1 \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \sin a'_1 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma'_n = 0$$

$$\sigma'_{11} = -\frac{w f_1 \sqrt{A'_1 A''_1 a''_2 \rho_1 a'_1 \Omega^2}}{h \Delta_1 a'_1 \cos a'_1 \Omega \zeta_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \cos a'_1 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t) \quad (4.6)$$

$$\sigma'_{22} = -f_2 \frac{w \sqrt{A''_1 a''_2 A''_1 \rho_1 a'_2 \Omega^2}}{h a''_2 \Delta_1 \cos a'_2 \Omega \zeta_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \cos a'_2 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma'_{33} = A''_1 \frac{w \sqrt{A''_1 \rho_1 a'_1 \Omega^2}}{h \Delta_1} \cos a'_1 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma'_{12} = A'_1 \frac{w \sqrt{A''_1 \rho_1 a'_1 \Omega^2}}{h \Delta_1} \cos a'_1 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma'_{21} = -A'_1 \frac{w \sqrt{A''_1 \rho_1 a'_1 \Omega^2}}{h \Delta_1} \cos a'_1 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t)$$

величины второго слоя —

$$u'' = \frac{1}{\cos a_1'' \Omega \zeta_2} \times \left[-\frac{w f_1 \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{33}'' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_1'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + u^- \cos a_1'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$v'' = \frac{1}{\cos a_2'' \Omega \zeta_2} \times \left[-f_2 \frac{w \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{33}'' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_2'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + v^- \cos a_2'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$w'' = \frac{1}{\cos a_3'' \Omega \zeta_2} \times \left[-\frac{w \sqrt{A_{11}' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_3'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + w^- \cos a_3'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{\tau}'' = 0 \quad (4.7)$$

$$\sigma_{11}'' = -\frac{a_1'' \Omega}{h a_{11}'' \cos a_1'' \Omega \zeta_2} \times \left[\frac{w^- f_1 \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{33}'' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \cos a_1'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + u^- \sin a_1'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{22}'' = -\frac{a_2'' \Omega}{h a_{22}'' \cos a_2'' \Omega \zeta_2} \times \left[f_2 \frac{w \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{33}'' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \cos a_2'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + v^- \sin a_2'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{33}'' = A_{11}'' \frac{a_3'' \Omega w^-}{h \cos a_3'' \Omega \zeta_2} \left[\frac{\sqrt{A_{11}' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \cos a_3'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + \sin a_3'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{12}'' = A_{11}'' \frac{a_1'' \Omega w^-}{h \cos a_1'' \Omega \zeta_2} \left[\frac{\sqrt{A_{11}' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \cos a_2'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + \sin a_2'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{23}'' = -A_{11}'' \frac{a_2'' \Omega w^-}{h \cos a_2'' \Omega \zeta_2} \left[\frac{\sqrt{A_{11}' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \cos a_3'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + \sin a_3'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

Из полученного точного решения (4.6), (4.7) следует любопытный факт — все величины первого слоя не зависят от u^* , v^* , т.е. при наличии кулонова трения между слоями, сообщаемые второму слою тангенциальные перемещения не влияют на напряженно-деформированное состояние первого слоя. Отметим, что если между слоями имеется полный контакт, т.е. равенство на поверхности контакта всех компонентов вектора перемещения и напряжений σ_{xx} , σ_{xz} , σ_{zx} , напряженно-деформированные состояния обоих слоев зависят от u^* , v^* , w^* [9]. Установленный выше факт можно использовать в расчетах фундаментов-оснований сооружений сейсмостойкого строительства при учете сейсмического воздействия.

Выясним характер напряженно-деформированного состояния в ключевых сечениях двухслойного пакета и проведем сравнительный анализ. Согласно (2.1), (4.6) при $\zeta = \zeta_1$ имеем:

$$\begin{aligned} \sigma'_{13}(\zeta_1) &= -f_1 b_1 \frac{\cos a'_1 \Omega \zeta_1}{\cos a'_1 \Omega \zeta_1}, \quad \sigma'_{23}(\zeta_1) = -f_2 b_2 \frac{\cos a'_2 \Omega \zeta_1}{\cos a'_2 \Omega \zeta_1} \quad (4.8) \\ \sigma'_{11}(\zeta_1) &= -b_1, \quad b_1 = \frac{w \Omega^2 \sqrt{A'_1 A''_1} \rho_1 \rho_H}{h \Delta_1} \end{aligned}$$

Из (4.8) следует, что при определенных значениях физико-механических и геометрических параметров слоев ($\cos a'_1 \Omega \zeta_1 = 0$, $\cos a'_2 \Omega \zeta_1 = 0$, $\Delta_1 = 0$) на верхнем сечении могут возникнуть достаточно большие касательные и нормальные напряжения, которые могут привести к разрушению (отрыву).

Напряжения и перемещения на поверхности контакта $\zeta = 0$ слоев таковы:

$$\begin{aligned} \sigma'_{13}(\zeta = 0) &= -f_1 b_1 \cos a'_1 \Omega \zeta_1, \quad \sigma'_{23}(\zeta = 0) = -f_2 b_2 \cos a'_2 \Omega \zeta_1 \\ \sigma'_{11}(\zeta = 0) &= -b_1 \cos a'_1 \Omega \zeta_1, \quad u'_1(\zeta = 0) = f_1 b_2 \sqrt{a''_2 \rho_2} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \operatorname{tg} a'_1 \Omega \zeta_1 \\ u'_2(\zeta = 0) &= f_2 b_2 \sqrt{a''_1 \rho_1} \cos a'_2 \Omega \zeta_1 \operatorname{tg} a'_2 \Omega \zeta_1 \\ u'_3(\zeta = 0) &= b_2 \sqrt{\rho_H / A'_1} \sin a'_1 \Omega \zeta_1, \quad b_2 = w \Omega \sqrt{A'_1 A''_1} / \Delta_1, \quad (4.9) \\ \bar{u}''_1(\zeta = 0) &= -f_1 b_1 \sqrt{a''_3 \rho_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \operatorname{tg} a''_1 \Omega \zeta_1 + \frac{u^*}{\cos a''_1 \Omega \zeta_1} \\ \bar{u}''_2(\zeta = 0) &= -f_2 b_2 \sqrt{a''_4 \rho_2} \cos a'_2 \Omega \zeta_1 \operatorname{tg} a''_2 \Omega \zeta_1 + \frac{v^*}{\cos a''_2 \Omega \zeta_1} \end{aligned}$$

Из (4.9) следует, что на поверхности контакта касательные напряжения сравнительно малы за исключением резонансных значений частоты, соответствующих $\Delta_1 = 0$, тогда доминирующую роль будут играть

нормальное перемещение и нормальное напряжение. Для значений частоты внешнего воздействия, близких к резонансным, соответствующим $\cos a_1' \Omega \zeta_1 = 0$, $\cos a_1'' \Omega \zeta_2 = 0$, $i=1, 2$, доминирующую роль играют тангенциальные перемещения.

При неполном контакте, естественно, тангенциальные перемещения не равны. Приведем значения относительного смещения слоев:

$$\begin{aligned}
 & u_1'(\zeta = 0) - u_1''(\zeta = 0) = \\
 & = f_1 b_2 \cos a_1' \Omega \zeta_1 \left(\sqrt{a_{33}' \rho_H} \operatorname{tg} a_1' \Omega \zeta_1 + \sqrt{a_{33}'' \rho_1} \operatorname{tg} a_1'' \Omega \zeta_2 \right) - \frac{u^*}{\cos a_1'' \Omega \zeta_2} \\
 & u_2'(\zeta = 0) - u_2''(\zeta = 0) = \\
 & = f_2 b_1 \cos a_2' \Omega \zeta_1 \left(\sqrt{a_{44}' \rho_H} \operatorname{tg} a_2' \Omega \zeta_1 + \sqrt{a_{44}'' \rho_1} \operatorname{tg} a_2'' \Omega \zeta_2 \right) - \frac{v^*}{\cos a_2'' \Omega \zeta_2} \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

которое может оказаться существенным вблизи резонансных значений частоты Ω внешнего воздействия.

Напряжения при $\zeta = -\zeta_2$ имеют значения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13}''(-\zeta_2) &= -f_1 b_1 \frac{\cos a_1' \Omega \zeta_1}{\cos a_1'' \Omega \zeta_2} + \frac{\Omega}{h} \sqrt{\frac{\rho_H}{a_{33}''}} u^* \operatorname{tg} a_1'' \Omega \zeta_2 \\
 \sigma_{23}''(-\zeta_2) &= -f_2 b_1 \frac{\cos a_2' \Omega \zeta_1}{\cos a_2'' \Omega \zeta_2} + \frac{\Omega}{h} \sqrt{\frac{\rho_H}{a_{44}''}} v^* \operatorname{tg} a_2'' \Omega \zeta_2 \quad (4.11) \\
 \sigma_{33}''(-\zeta_2) &= -b_1 \frac{\cos a_1' \Omega \zeta_1}{\cos a_1'' \Omega \zeta_2} + \frac{\Omega}{h} \sqrt{A_{11}'' \rho_H} w^* \operatorname{tg} a_1'' \Omega \zeta_2
 \end{aligned}$$

Из (4.11) следует, что значения напряжений под вектором перемещения (u^*, v^*, w^*) , сообщаемого поверхности $\zeta = -\zeta_2$, существенно зависят также от физико-механических и геометрических характеристик первого слоя.

The authors express their gratitude to INTAS, grant Ref. NO; 03-51-5547, which made this investigation possible.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510 с.
2. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.

3. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. //Межвуз. сб.: Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып.2. С. 7-12.
4. Агаловян Л. А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера. // В сб.: XIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Часть первая. Таллин. 1983. С. 13-18.
5. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией. // В сб.: Тр. IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 105-110.
6. Агаловян Л. А., Адамян С. Х. О напряженно-деформированном состоянии двухслойной полосы-прямоугольника с переменными упругими характеристиками. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1986. Т. 39. №5. С. 3-15.
7. Агаловян Л. А., Саркисян Л. С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы. //Труды XVIII международной конференции по теории оболочек и пластин. Р. Ф. Саратов. 1997. Том I. С.30-38.
8. Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы. // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления, прочности и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1997. С.132-135.
9. Агаловян Л. А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во Гитутюн НАН РА, 2002. С. 9-19.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.12.2004