

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА КРАЯХ
ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СЛОЕВ

Григорян Э. Х., Мелкумян А. С.

Է. Խ. Գրիգորյան, Ա. Ս. Մելքույան

Սահրային հարթ ալիքի դիֆրակցիան պիեզոէլեկտրիկ տարածությունում
գույպենե կիսասանկերը մետաղական շերտերի եզրերից

Դիտարկվում է սահրային հարթ ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը փոքր հաստության կիսասանկերը մետաղական գույպենե շերտեր (լեկտրոդներ) պարունակող պիեզոէլեկտրիկ տարածությունում: Խնդիրը բերվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Նիմանի խնդրի ֆունկցիոնալ հավասարումների լուծմանը: Խնդրի լուծումը ստացված է փակ տեսքով: Ընտանաանիվում են դաստի ֆիզիկական մեծությունների ախմպատտիկ փարձերը Լեկտրոդների զազաքների յոջակայքերում: Ստացվել են ախմպատտիկ բանաձևեր տեղափոխության և Լեկտրական պոտենցիալի համար Լեկտրոդների միջև հեռու տիրույթներում: Յույց է տրված, որ ալիքային դաշտը բաղկացած է սիմետրիկ և Եակասիմետրիկ խնդիրների դաշտերի գումարից, որոնցից յոջարանչոթը պարունակում է զԵպի կիսասանկերը ալիքատարի ներքո տարածվող յոկալիզացված ալիք: Մանրամասնությամբ ուսումնասիրված է այդ ալիքների ինչպես գոյության ծարրը, այնպես էլ նրանց տարածման արագությունների կախվածությունը Լեկտրոդների միջև եղած հեռավորությունից և Լեկտրամեխանիկական կապի գործակցից: Իերված են բվային հաշվարկներ:

E. Kh. Grigoryan, A. S. Melkumyan

Diffraction of shear plane wave in piezoelectric media on the edges of parallel semi-infinite metallic strips

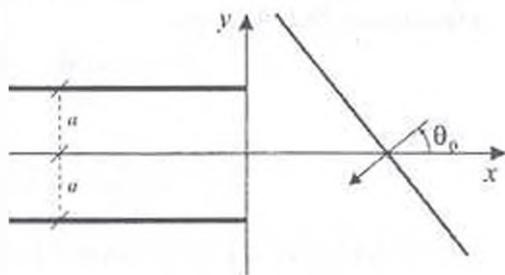
A problem of diffraction of shear plane wave in piezoelectric media containing parallel semi-infinite thin metallic strips (electrodes) is considered. The problem is reduced to solving functional equations of Riemann's problem of the theory of analytic functions. A closed form solution of the problem is obtained. Asymptotic behaviors of physical quantities in the neighborhoods of electrodes' tips are investigated. Asymptotic formulas for displacement and electric potential are obtained in the far field between the electrodes. It is shown that the wavefield consists of the sum of symmetric and anti-symmetric problems' wavefields, each of which contains a localized wave, which propagates into the semi-infinite waveguide. Both the questions of existence of these waves and the dependence of their wave speeds on the distance between the electrodes and on the electromechanical coupling coefficient are investigated in details. Numerical calculations are presented.

Рассматривается задача о дифракции сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве, содержащем параллельные полубесконечные металлические слои малой толщины (электроды). Задача сводится к решению функциональных уравнений задачи Римана теории аналитических функций. Решение задачи получено в замкнутом виде. Исследованы асимптотические поведения физических величин в окрестностях вершин электродов. Получены асимптотические формулы для перемещения и электрического потенциала в дальней зоне между электродами. Показано, что волновое поле состоит из суммы волновых полей симметричной и антисимметричной задач, каждая из которых содержит локализованную волну, распространяющуюся во внутрь полубесконечного волновода. Детально изучены как вопрос существования этих волн, так и зависимость их скоростей распространения от расстояния между электродами и от коэффициента электромеханической связи. Приведены численные расчеты.

1. Пусть из бесконечности распространяются сдвиговые плоские волны $U_{11}e^{-i\alpha x}$, $\Phi_0 e^{-i\alpha x}$, где

$$U_0 = e^{-i(kx \cos \theta_0 + ky \sin \theta_0)}, \quad \Phi_0 = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-i(kx \cos \theta_0 + ky \sin \theta_0)}$$

в пьезоэлектрическом пространстве класса 6mm гексагональной симметрии, причем, ось OZ совпадает с осью симметрии кристалла, содержащей параллельные металлические слои бесконечно малой толщины (фиг. 1). Задача заключается в определении волнового поля и в изучении волн, локализованных между электродами.



Фиг. 1.

В амплитудах задача сводится к решению уравнений [1]

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad (1)$$

$$\Delta \Phi = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} k^2 U \quad (2)$$

со следующими контактными условиями на линии $y = a$

$$\Phi(x, y)|_{y=a+0} = \Phi(x, y)|_{y=a-0} = p_+(x), \quad U(x, y)|_{y=a+0} = U(x, y)|_{y=a-0}$$

$$D_x(x, y)|_{y=a+0} - D_x(x, y)|_{y=a-0} = -\epsilon_{11} g_+(x), \quad \sigma_{yx}(x, y)|_{y=a+0} = \sigma_{yx}(x, y)|_{y=a-0}$$

и со следующими контактными условиями на линии $y = -a$

$$\Phi(x, y)|_{y=-a+0} = \Phi(x, y)|_{y=-a-0} = q_-(x), \quad U(x, y)|_{y=-a+0} = U(x, y)|_{y=-a-0}$$

$$D_y(x, y)|_{y=-a+0} - D_y(x, y)|_{y=-a-0} = -\epsilon_{11} h_-(x),$$

$$\sigma_{yx}(x, y)|_{y=-a+0} = \sigma_{yx}(x, y)|_{y=-a-0}$$

где $p_+(x) = q_-(x) = 0$ при $x < 0$, а $g_-(x) = h_-(x) = 0$ при $x > 0$,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; \bar{U} — амплитуда перемещений точек пространства, Φ —

амплитуда электрического потенциала, $\sigma_{yx} = \epsilon_{44} \frac{\partial U}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ — амплитуда

тангенциальных напряжений, $D_y = e_{15} \frac{\partial U}{\partial y} - \epsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ — амплитуда

компоненты вектора электрической индукции, ϵ_{44} — упругая постоянная,

e_{15} — пьезоэлектрический модуль, ϵ_{11} — диэлектрическая проницаемость,

$k = \omega/c$ — волновое число, $c = \sqrt{G/\rho}$ — скорость распространения упругой

волны в пьезоэлектрике, $G = \epsilon_{44} + e_{15}^2/\epsilon_{11}$, ω — частота колебаний.

Для решения поставленной задачи введем функции

$$w(x, y) = U(x, y) - U_0(x, y), \quad \varphi(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi_0(x, y) \quad (3)$$

Очевидно, что функции $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$ удовлетворяют уравнениям (1)–(2), но они уже должны удовлетворять и условиям уходящей волны. Применяя к уравнениям (1)–(2) преобразование Фурье, в силу вышесказанного будем иметь

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} - \gamma^2 \bar{w} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} - \sigma^2 \bar{\varphi} = -\frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} k^2 \bar{w} \quad (5)$$

где $\gamma^2(\sigma) = \sigma^2 - k^2$, а $\bar{w}(\sigma, y)$, $\bar{\varphi}(\sigma, y)$ – преобразования Фурье функций $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$

$$\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx, \quad -\infty < \sigma < \infty.$$

Определим то решение уравнения (4), которое стремится к нулю при $|y| \rightarrow \infty$, когда $|\sigma| > k$, а при $|\sigma| < k$ представляет уходящую волну. Такое решение имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{w}(\sigma, y) = & \bar{U}(\sigma, y) - e^{-iky \sin \theta_0} 2\pi \delta(\sigma - k \cos \theta_0) = \\ = & \begin{cases} A(\sigma) e^{-\gamma(\sigma)(y-a)}, & y > a \\ A_0(\sigma) e^{-\gamma(\sigma)(y-a)} + C_0(\sigma) e^{\gamma(\sigma)(y+a)}, & -a < y < a \\ C(\sigma) e^{\gamma(\sigma)(y+a)}, & y < -a \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

где под $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2}$ понимается та ветвь этой функции, для которой имеет место условие $\sqrt{\sigma^2 - k^2} \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$. В таком случае действительная ось будет обходить точку $\sigma = -k$ сверху, а точку $\sigma = k$ снизу [2]. Под $\delta(\sigma)$ понимается известная функция Дирака.

Теперь из (5) $\bar{\varphi}$ определится в виде

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\sigma, y) = & \bar{\Phi}(\sigma, y) - \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-iky \sin \theta_0} 2\pi \delta(\sigma - k \cos \theta_0) = \\ = & \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} \bar{w}(\sigma, y) + \begin{cases} B(\sigma) e^{-\gamma(\sigma)(y-a)}, & y > a \\ B_0(\sigma) e^{-\gamma(\sigma)(y-a)} + D_0(\sigma) e^{\gamma(\sigma)(y+a)}, & -a < y < a \\ D(\sigma) e^{\gamma(\sigma)(y+a)}, & y < -a \end{cases} \quad (7) \end{aligned}$$

Из (6)–(7) с использованием контактных условий, после применения к ним преобразования Фурье, будем иметь

$$A(\sigma) = \frac{\epsilon_{15} \bar{h}_-(\sigma) e^{-\gamma(\sigma)2a} + \bar{g}_-(\sigma)}{2G \gamma(\sigma)}, \quad A_0(\sigma) = \frac{\epsilon_{15} \bar{h}_-(\sigma)}{2G \gamma(\sigma)} e^{-\gamma(\sigma)2a}$$

$$\begin{aligned}
 C(\sigma) &= \frac{\varepsilon_{13}}{2G} \frac{\bar{h}_-(\sigma) + \bar{g}_-(\sigma) e^{-\gamma(\sigma)2a}}{\gamma(\sigma)}, & C_{11}(\sigma) &= \frac{\varepsilon_{13}}{2G} \frac{\bar{g}_-(\sigma)}{\gamma(\sigma)} e^{-\gamma(\sigma)2a} \\
 B(\sigma) &= -\frac{\bar{h}_-(\sigma) e^{|\sigma|2a} + \bar{g}_-(\sigma)}{2|\sigma|}, & B_{11}(\sigma) &= -\frac{\bar{h}_-(\sigma)}{2|\sigma|} e^{-|\sigma|2a} \\
 D(\sigma) &= -\frac{\bar{g}_-(\sigma) e^{-|\sigma|2a} + \bar{h}_-(\sigma)}{2|\sigma|}, & D_{11}(\sigma) &= -\frac{\bar{g}_-(\sigma)}{2|\sigma|} e^{-|\sigma|2a}
 \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя $A(\sigma)$, $A_0(\sigma)$, $B(\sigma)$, $B_0(\sigma)$, $C(\sigma)$, $C_0(\sigma)$, $D(\sigma)$ и $D_0(\sigma)$ в (6)–(7) и используя условия контакта при $y = \pm a$, получим следующие краевые задачи Римана теории аналитических функций:

$$M\left(\frac{\sigma}{k}\right) \frac{\bar{g}_-(\sigma) + \bar{h}_-(\sigma)}{2|\sigma|} = 2\pi \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} \cos(ka \sin \theta_0) \delta(\sigma - k \cos \theta_0) - \frac{\bar{p}_+(\sigma) + \bar{q}_+(\sigma)}{2} \quad (9)$$

$$N\left(\frac{\sigma}{k}\right) \frac{\bar{g}_-(\sigma) - \bar{h}_-(\sigma)}{2|\sigma|} = -2\pi i \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} \sin(ka \sin \theta_0) \delta(\sigma - k \cos \theta_0) - \frac{\bar{p}_+(\sigma) - \bar{q}_+(\sigma)}{2} \quad (10)$$

где $-\infty < \sigma < \infty$,

$$M(\sigma) = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-|\sigma|2h} - k_e^2 |\sigma| \frac{1 + e^{-\eta(\sigma)2h}}{\eta(\sigma)} \right] \quad (11)$$

$$N(\sigma) = \frac{1}{2} \left[1 - e^{-|\sigma|2h} - k_e^2 |\sigma| \frac{1 - e^{-\eta(\sigma)2h}}{\eta(\sigma)} \right] \quad (12)$$

$$\eta(\sigma) = \gamma(k\sigma)/k = \sqrt{\sigma^2 - 1}, \quad h = ak \quad (13)$$

а $k_e = \varepsilon_{13}/\sqrt{\varepsilon_{11}G} \in (0, 1)$ – коэффициент электромеханической связи.

Для решения краевых задач (9) и (10) сначала необходимо факторизовать функции $M(\sigma)$ и $N(\sigma)$, данные выражениями (11) и (12). С этой целью, исследуя функции $M(\sigma)$ и $N(\sigma)$ на действительной прямой, приходим к следующей лемме:

Лемма. При любом значении коэффициента электромеханической связи $k_e \in (0, 1)$ справедливы следующие утверждения:

а) при любом $-h > 0$ существует одно и только одно значение $\sigma_{0s} \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$, такое, что имеет место равенство $M(\sigma_{0s}) = 0$. Значение $\sigma = \sigma_{0s}$ является простым нулем функции $M(\sigma)$ и $\sigma_{0s} > \sigma_0 = (1 - k_e^4)^{-1/2}$. Значение σ_{0s} определяется из уравнения

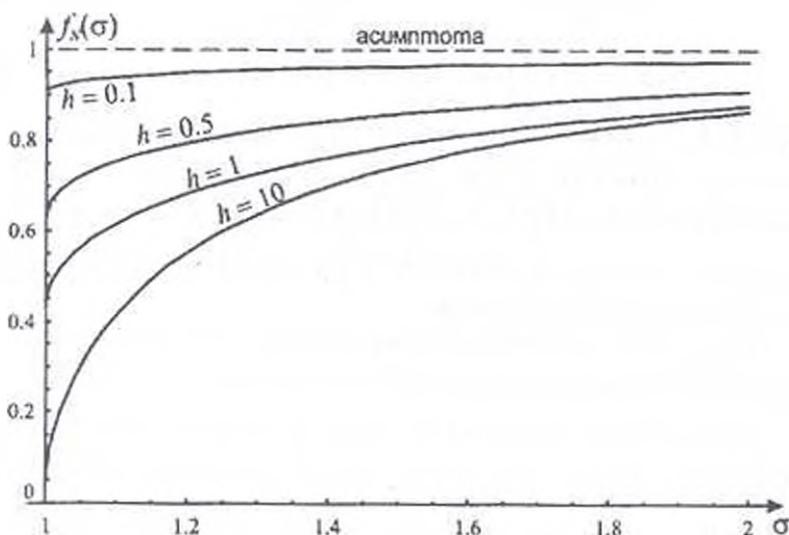
$$f_M(\sigma) \equiv \frac{\eta(\sigma)(1 + e^{-\sigma 2h})}{\sigma(1 + e^{-\eta(\sigma)2h})} = k_e^2, \quad \text{где функция } f_M(\sigma) \text{ является монотонно}$$

возрастающей на полупрямой $\sigma \in [1, +\infty)$ а также $f_M(\sigma) \in C[1, +\infty)$, $f_M(1) = 0$, $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} f_M(\sigma) = 1$.

б) только и только при $h > h_0(k_v)$, где значение $h_0 > 0$ определяется единственным образом из уравнения $f(h) \equiv (1 - e^{-2h}) / (2h) = k_v^2$ (отметим, что функция $f(h)$ монотонно убывает на полупрямой $h \in [0, +\infty)$, $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 1$, $\lim_{h \rightarrow +\infty} f(h) = 0$, $f(h) \in C[0, +\infty)$) существует такое значение $\sigma_{0a} \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, что имеет место равенство $N(\sigma_{0a}) = 0$. Это значение $\sigma = \sigma_{0a}$ определяется единственным образом, является простым нулем функции $N(\sigma)$ и $1 < \sigma_{0a} < \sigma_0 = (1 - k_v^4)^{-1/2}$

Значение σ_{0a} определяется из уравнения $f_N(\sigma) \equiv \frac{\eta(\sigma)(1 - e^{-\sigma 2h})}{\sigma(1 - e^{-\eta(\sigma)2h})} = k_v^2$,

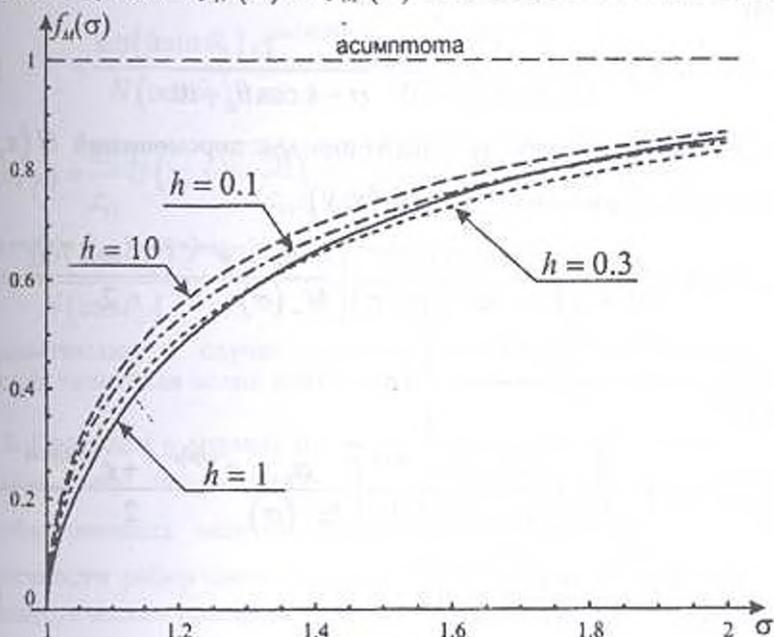
где функция $f_N(\sigma)$ является монотонно возрастающей на полупрямой $\sigma \in (1, +\infty)$ а также $f_N(\sigma) \in C(1, +\infty)$, $\lim_{\sigma \rightarrow 1+0} f_N(\sigma) = (1 - e^{-2h}) / (2h)$, $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} f_N(\sigma) = 1$.



Фиг. 2. График функции $f_N(\sigma)$ при разных значениях величины h

Информация о монотонности функций $f_M(\sigma)$, $f_N(\sigma)$ и $f(h)$ в соответствующих промежутках, приведенная в лемме, играет важную роль при численных расчетах и существенно упрощает нахождение

численных значений величин σ_{0s} , σ_{0a} и h_a . На фиг. 2 и 3 приведены графики функций $f_N(\sigma)$ и $f_M(\sigma)$ при разных значениях величины h .



Фиг. 3. График функции $f_M(\sigma)$ при разных значениях величины h

Исходя из результатов леммы и пользуясь четностью функций $M(\sigma)$ и $N(\sigma)$, имеем: для удовлетворения условию уходящей волны действительная ось при любом h должна обходить точку $\sigma = -\sigma_{0s}$ сверху, а точку $\sigma = \sigma_{0s}$ снизу, а при $h > h_a(k_r)$ действительная ось, кроме того, должна еще обходить точку $\sigma = -\sigma_{0a}$ сверху, а точку $\sigma = \sigma_{0a}$ снизу.

Так как при $\sigma \rightarrow \pm\infty$ имеем

$$M(\sigma) \rightarrow (1 - k_c^2)/2, \quad \ln \left[2(1 - k_c^2)^{-1} M(\sigma) \right] = O(\sigma^{-2})$$

$$N(\sigma) \rightarrow (1 - k_c^2)/2, \quad \ln \left[2(1 - k_c^2)^{-1} N(\sigma) \right] = O(\sigma^{-2}) \quad (14)$$

то функции $M(\sigma)$ и $N(\sigma)$ можно факторизовать с помощью интегралов типа Коши или с применения прямых и обратных преобразований Фурье [3] — [5]. В результате имеем

$$M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha), \quad N(\alpha) = N_+(\alpha)N_-(\alpha) \quad (15)$$

где функции $M_+(\alpha)$, $N_+(\alpha)$ регулярны при $\text{Im} \alpha > 0$ и там не имеют нулей, а функции $M_-(\alpha)$, $N_-(\alpha)$ регулярны при $\text{Im} \alpha < 0$ и там не имеют нулей.

Подставляя выражения (15) в функциональные уравнения (9), (10) и решая их с рассуждениями, изложенными в [4]–[5], где используются прямое и обратное преобразования Фурье обобщенных функций, а также тождество [6]

$$2\pi i \delta(\sigma - k \cos \theta_0) = \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 + i0} \quad (16)$$

в результате получаем следующие выражения для перемещений $U(x, y)$ и для потенциала электрического поля $\Phi(x, y)$:

$$U(x, y) = U_0(x, y) + \frac{\epsilon_{13}}{4G\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma - i0} e^{-i\sigma x}}{(\sigma - \cos \theta_0) \eta(\sigma)} \left[\frac{\alpha_0}{M_-(\sigma)} \frac{e^{-\pi|\sigma|y-d} + e^{-\pi(\sigma|y+d)}}{2} - \frac{\beta_0}{N_-(\sigma)} \frac{e^{-\pi|\sigma|y-d} - e^{-\pi(\sigma|y+d)}}{2} \right] d\sigma \quad (17)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{11}} U(x, y) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma - i0} e^{-i\sigma x}}{(\sigma - \cos \theta_0) |\sigma|} \left[\frac{\alpha_0}{M_-(\sigma)} \frac{e^{-\pi|\sigma|y-d} + e^{-\pi(\sigma|y+d)}}{2} - \frac{\beta_0}{N_-(\sigma)} \frac{e^{-\pi|\sigma|y-d} - e^{-\pi(\sigma|y+d)}}{2} \right] d\sigma \quad (18)$$

где сделаны следующие обозначения:

$$\alpha_0 = \frac{2\epsilon_{13} \sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{\epsilon_{11} i M_+(\cos \theta_0)} \cos(h \sin \theta_0), \quad \beta_0 = \frac{2\epsilon_{13} \sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{\epsilon_{11} N_+(\cos \theta_0)} \sin(h \sin \theta_0). \quad (19)$$

Как в выражении (17), так и в (18) первое слагаемое подынтегрального выражения (с коэффициентом $\alpha_0/M_-(\sigma)$) представляет решение симметричной части задачи, а второе слагаемое подынтегрального выражения (с коэффициентом $\beta_0/N_-(\sigma)$) представляет решение антисимметричной части задачи.

В случае бесконечного слоя функциональные уравнения (9) и (10) примут следующий вид:

$$M\left(\frac{\sigma}{k}\right) \frac{\bar{g}(\sigma) + \bar{h}(\sigma)}{2|\sigma|} = 2\pi \frac{\epsilon_{13}}{\kappa} \cos(ka \sin \theta_0) \delta(\sigma - k \cos \theta_0) \quad (19)$$

$$N\left(\frac{\sigma}{k}\right) \frac{\bar{g}(\sigma) - \bar{h}(\sigma)}{2|\sigma|} = -2\pi i \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{11}} \sin(ka \sin \theta_0) \delta(\sigma - k \cos \theta_0) \quad (20)$$

откуда

$$\bar{g}(\sigma) + \bar{h}(\sigma) = 4\pi \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{11}} k \cos \theta_0 \frac{\cos(ka \sin \theta_0)}{M(\cos \theta_0)} \delta(\sigma - k \cos \theta_0)$$

$$\bar{g}(\sigma) - \bar{h}(\sigma) = -4\pi i \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{11}} k \cos \theta_0 \frac{\sin(ka \sin \theta_0)}{N(\cos \theta_0)} \delta(\sigma - k \cos \theta_0)$$

следовательно,

$$U(x, y) = U_0(x, y) + \frac{i|\cos\theta_0|}{\sin\theta_0} k_c^2 \left(\frac{\cos(h\sin\theta_0)}{M(\cos\theta_0)} \frac{e^{i\sin(\theta_0)|y-d|} + e^{i\sin(\theta_0)|y+d|}}{2} + \frac{\sin(h\sin\theta_0)}{N(\cos\theta_0)} \frac{e^{i\sin(\theta_0)k|y-d|} - e^{i\sin(\theta_0)k|y+d|}}{2i} \right) e^{-ikx\cos\theta_0} \quad (21)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{11}} U(x, y) - \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{11}} \left(\frac{\cos(h\sin\theta_0)}{M(\cos\theta_0)} \frac{e^{-k|\cos\theta_0||y-d|} + e^{-k|\cos\theta_0||y+d|}}{2} + \frac{\sin(h\sin\theta_0)}{N(\cos\theta_0)} \frac{e^{-k|\cos\theta_0||y-d|} - e^{-k|\cos\theta_0||y+d|}}{2i} \right) e^{-ikx\cos\theta_0} \quad (22)$$

следовательно, в случае наличия бесконечных электрических слоев плоская сдвиговая волна локализованную волну не возмущает.

2. Перейдем к анализу полученного решения. Из выражений (17) – (18) следует, что напряжение σ_{θ_0} ограничено в окрестностях ребер полубесконечных электрических слоев, а величины ϵ_{θ_0} , D_{θ_0} и E_{θ_0} в окрестности ребер слоев $y = a, x < 0$ и $y = -a, x < 0$ имеют следующие асимптотические поведения:

$$E_{\theta_0} = \frac{\alpha_0 \mp \beta_0}{4} \sqrt{1-k_r^2} \sqrt{\frac{2k}{\pi r}} e^{i\pi/4} \sin \frac{\theta}{2} + O(1) \quad (23)$$

$$\epsilon_{\theta_0} = \frac{\epsilon_{13}}{8\epsilon_{11}} \frac{\alpha_0 \mp \beta_0}{\sqrt{1-k_r^2}} \sqrt{\frac{2k}{\pi r}} e^{i\pi/4} \sin \frac{\theta}{2} + O(1) \quad (24)$$

$$D_{\theta_0} = \frac{\epsilon_{11}}{4} \frac{\alpha_0 \mp \beta_0}{\sqrt{1-k_r^2}} \sqrt{\frac{2k}{\pi r}} e^{i\pi/4} \sin \frac{\theta}{2} + O(1) \quad (25)$$

где r и θ являются локальными полярными координатами с полюсом в точке $x = 0, y = \pm a$ ($r = \sqrt{x^2 + (y \mp a)^2}$, $\cos\theta = x/r$, $\sin\theta = (y \mp a)/r$). В полученных выражениях верхний знак соответствует верхнему электрическому слою, а нижний знак соответствует нижнему электроду.

Применяя метод Лайтхилла [7] к выражениям (17) – (18), можно получить следующие асимптотические поведения решений в слое $|y| \leq a$:

при $kx \rightarrow +\infty$

$$U(x, y) = U_0(x, y) - \frac{\epsilon_{13}}{2G(1+\cos\theta_0)} \frac{\alpha_0}{M_-(-1)} \frac{e^{i(kx-x/4)}}{\sqrt{2\pi kx}} + O((kx)^{-3/2}) \quad (26)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{11}} U(x, y) +$$

$$+ \frac{e^{-i\pi/4} \alpha_0}{2\sqrt{\pi} \cos \theta_0} \left[(kx)^{-1/2} + \frac{i c_0 (1 + e^{2h}) - 2hi}{2 \cdot 2\pi} (kx)^{-1/2} \ln(kx) \right] + O\left((kx)^{-3/2}\right) \quad (27)$$

при $kx \rightarrow -\infty$

$$U(x, y) = U_0(x, y) +$$

$$+ \frac{ie_{15}}{2G} \left[\begin{array}{l} \frac{e^{i\pi/4} \sqrt{\cos \theta_0 - i0}}{\sin \theta_0} \left[i\alpha_0 \frac{\cos[ky \sin \theta_0]}{M_-(\cos \theta_0)} - \beta_0 \frac{\sin[ky \sin \theta_0]}{N_-(\cos \theta_0)} \right] e^{-ikx \cos \theta_0}, \theta_0 \neq 0 \\ -\frac{\alpha_0}{k^2} M_+(1) e^{-ikx}, \theta_0 = 0 \end{array} \right] +$$

$$+ \alpha_0 \frac{\sqrt{\sigma_{0a}} e^{-\pi(\sigma_{0a})h} M_+(\sigma_{0a}) \cosh[\eta(\sigma_{0a})ky]}{\sigma_{0a} - \cos \theta_0} \left(d[M(s)\eta(s)]/ds \right) \Big|_{s=\sigma_{0a}} e^{-ikx\sigma_{0a}} +$$

$$+ \left[-\beta_0 \frac{\sqrt{\sigma_{0a}} e^{-\pi(\sigma_{0a})h} N_+(\sigma_{0a}) \sinh[\eta(\sigma_{0a})ky]}{\sigma_{0a} - \cos \theta_0} \left(d[N(s)\eta(s)]/ds \right) \Big|_{s=\sigma_{0a}} e^{-ikx\sigma_{0a}}, h > h_a \right] +$$

$$+ \left[\frac{e^{-i\pi/4} e^{ih} \alpha_0 \cos(ky) (k|x|)^{-3/2} + O\left((k|x|)^{-2}\right)}{2\sqrt{\pi} \cos \theta_0} \right] +$$

$$+ \left[\begin{array}{l} \frac{i e^{i(k|x|-\pi/4)} \alpha_0 M_+(1)}{2 \sqrt{2\pi} k^2} \frac{1+e^{-2h}}{1-\cos \theta_0} (k|x|)^{-3/2} + O\left((k|x|)^{-1/2}\right), \theta_0 \neq 0 \\ \frac{e^{i(k|x|-\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k|x|}} \frac{1+e^{-2h}}{k^2} \alpha_0 M_+(1) + O\left((k|x|)^{-1/2}\right), \theta_0 = 0 \end{array} \right] \quad (28)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} U(x, y) - \frac{i \alpha_0 \cosh[\sigma_{0a}ky]}{2(\sigma_{0a} - \cos \theta_0) \sqrt{\sigma_{0a}}} \frac{M_+(\sigma_{0a})}{M'(\sigma_{0a})} e^{-\sigma_{0a}h - ikx\sigma_{0a}} -$$

$$- \left[\frac{i}{2\sqrt{\cos \theta_0 + i0}} \left[\alpha_0 \frac{\cosh[\cos \theta_0 ky]}{M_-(\cos \theta_0)} - \beta_0 \frac{\sinh[|\cos \theta_0| ky]}{N_-(\cos \theta_0)} \right] e^{-i\cos \theta_0 h - ikx \cos \theta_0}, \theta_0 \neq 0 \right] +$$

$$+ \left[\frac{i \beta_0 \sinh[\sigma_{0a}ky]}{2(\sigma_{0a} - \cos \theta_0) \sqrt{\sigma_{0a}}} \frac{N_+(\sigma_{0a})}{N'(\sigma_{0a})} e^{-\sigma_{0a}h - ikx\sigma_{0a}}, h > h_a \right] + O\left((k|x|)^{-1/2}\right) \quad (29)$$

Как видно из полученных асимптотических выражений, в слое $|y| \leq a$ между электродами в отрицательном направлении оси x распространяются две волны, соответствующие симметричной и антисимметричной частям решения задачи. Обозначим их скорости через $c_s = c_s(h, k_x)$ (симметричная часть) и $c_a = c_a(h, k_x)$ (антисимметричная

часть). Проводя соответствующий анализ зависимостей c_s и c_a от величин $h = ak > 0$ и $k_e = \epsilon_{12} / \sqrt{\epsilon_{11} G} \in (0, 1)$, получаем следующие результаты, где через c_{loc} обозначена скорость локализованной волны в случае наличия одного электрода [5], а $c = \omega/k$ – скорость распространения падающей волны:

- Волна симметричной части задачи, распространяющаяся со скоростью c_s , всегда присутствует и $c_s < c_{loc}$.

- При любом фиксированном $k_e \in (0, 1)$ существует такое число $h_1^{min} > 0$, что $c_s(h)$ монотонно убывает в интервале $h \in (0, h_1^{min})$, достигает своего минимума при $h = h_1^{min}$, монотонно возрастает в интервале $h \in (h_1^{min}, \infty)$ и $\lim_{h \rightarrow 0} c_s(h) = \lim_{h \rightarrow \infty} c_s(h) = c_{loc}$. Значение h_1^{min} и соответствующее значение минимальной скорости c_s^{min} определяются выражениями $h_1^{min} = (\sigma + \eta(\sigma)) \ln(1/k_e)$, $c_s^{min} = c/\sigma$, где σ является единственным корнем уравнения

$$\eta(\sigma) - k_e^2 \sigma + (\eta(\sigma) - \sigma) e^{-\sigma(\eta(\sigma) + \sigma) \ln k_e^{-2}} = 0 \text{ в интервале } \sigma \in (1, +\infty).$$

- $\lim_{k_e \rightarrow 0} h_1^{min}(k_e) = \infty$

- Отношение $c_s^{min}(k_e)/c_{loc}(k_e)$ монотонно убывает в интервале $k_e \in (0, 1)$. При этом нижняя грань отношения

$r_{s/loc} = \inf_{k_e \in (0, 1)} [c_s^{min}(k_e)/c_{loc}(k_e)]$ является единственным положительным корнем уравнения $e^{-1/r^2} = x^{-2} - 1$ и численно приблизительно равна 0.884.

- При любом фиксированном $k_e \in (0, 1)$ волна со скоростью c_a присутствует только и только при $h > h_0(k_e)$, где h_0 является единственным положительным корнем уравнения $1 - e^{-2h} = k_e^2 2h$.

Волновая скорость $c_a(h)$ монотонно убывает в интервале $h \in (h_0, \infty)$ и

$$\lim_{h \rightarrow h_0, +0} c_a(h) = c, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} c_a(h) = c_{loc}, \text{ так что } c_{loc} < c_a < c.$$

- При любом фиксированном $h > 0$ волновая скорость $c_s(k_e)$ монотонно убывает в интервале $k_e \in (0, 1)$ и $\lim_{k_e \rightarrow 0} c_s(k_e) = c$.

$$\lim_{k_e \rightarrow 1} c_s(k_e) = 0.$$

• При любом фиксированном $h > 0$ волна со скоростью c_s присутствует только и только при $k_s^2 > \frac{1 - e^{-2h}}{2h}$. Волновая скорость

$c_s(k_s)$ монотонно убывает в интервале $k_s \in \left(\frac{1 - e^{-2h}}{2h}, 1\right)$ и

$$\lim_{k_s \rightarrow \frac{1 - e^{-2h}}{2h}} c_s(k_s) = c, \quad \lim_{k_s \rightarrow 1} c_s(k_s) = 0.$$

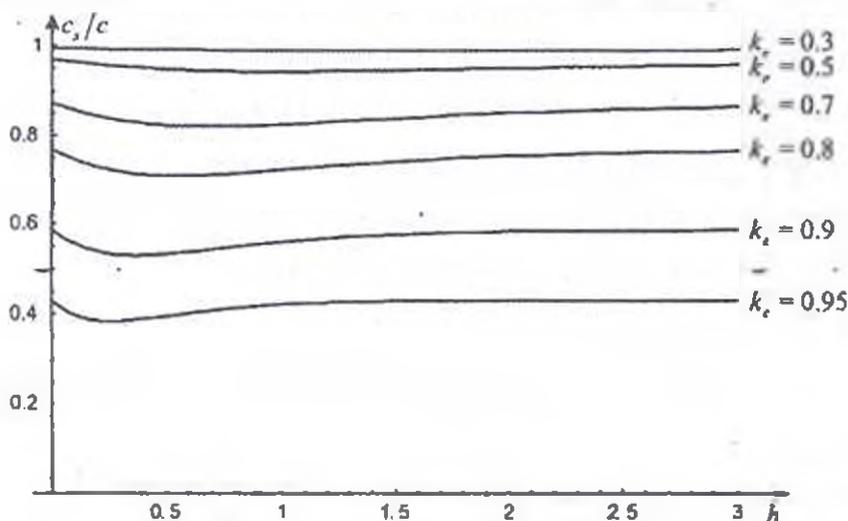
• Точные грани, между которыми отношения c_s/c_{loc} и c_o/c_{loc} могут изменяться независимо от пьезоэлектрического материала и независимо от расстояния между электродами, являются соответственно $(r_{s/loc}, 1)$ и $(1, \infty)$, где величина $r_{s/loc}$ была введена выше и $r_{s/loc} = 0.884$.

• При любых $k_s \in (0, 1)$ и $h > 0$ имеет место следующая цепь неравенств: $c_s^{min}(k_s) \leq c_s(h, k_s) < c_{loc}(k_s) < c_o(h, k_s) < c$, где $c_o(h, k_s)$ присутствует только при $h > h_o(k_s)$.

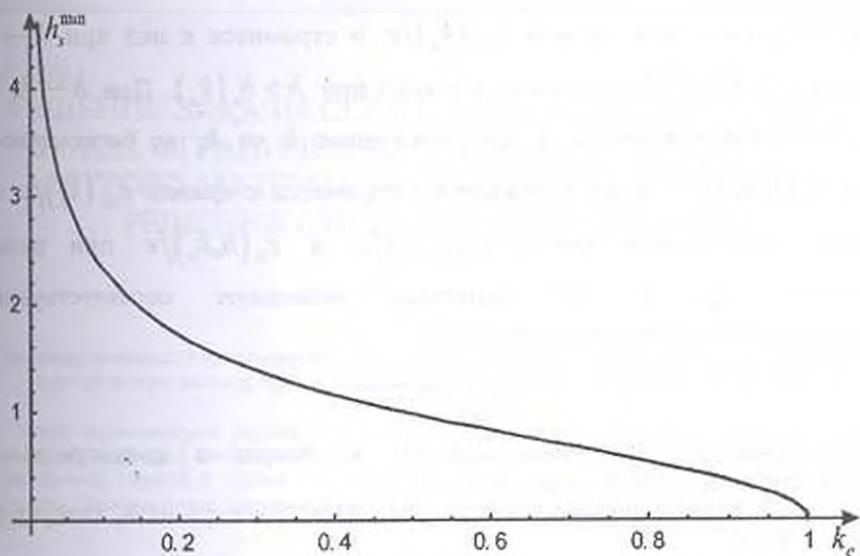
На фиг. 4 представлена зависимость c_s/c от h при разных значениях k_s , где видно, что c_s/c имеет минимум в некоторой точке h_s^{min} .

На фиг. 5 представлена кривая зависимости величины h_s^{min} от k_s , где еще раз подтверждается, что $h_s^{min}(k_s) \rightarrow \infty$ при $k_s \rightarrow 0$.

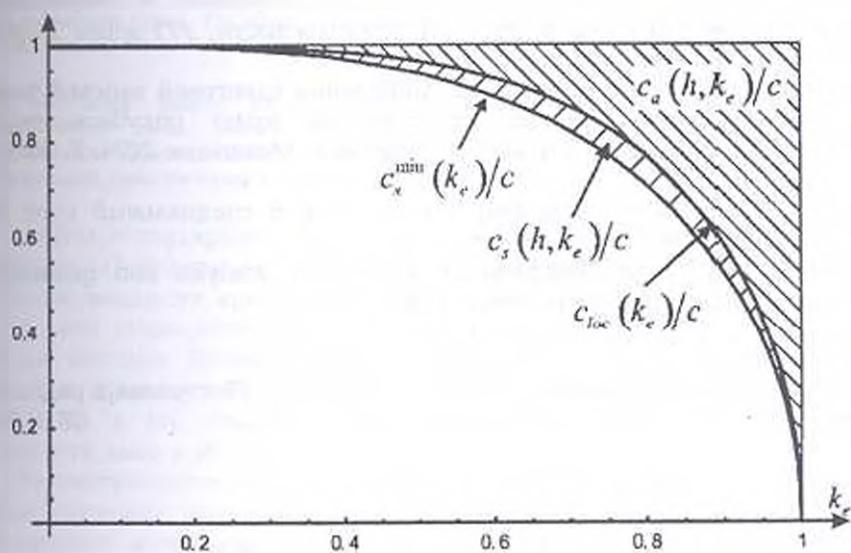
На фиг. 6 представлены кривые отношений $c_s^{min}(k_s)/c$ и $c_{loc}(k_s)/c$ в зависимости от коэффициента электромеханической связи k_s , а также заштрихованы области изменения отношений $c_s(h, k_s)/c$ и $c_o(h, k_s)/c$.



Фиг. 4. Зависимость c_s/c от h при разных значениях k_s .



Фиг. 5. Зависимость h_5^{\min} от коэффициента электромеханической связи



Фиг. 6. Области изменения волновых скоростей

Фиксируя любое значение коэффициента электромеханической связи, исследуем поведение точек $c_s(h, k_e)/c$ и $c_a(h, k_e)/c$ в зависимости от h (фиг. 6). Как следует из вышеприведенного анализа, точка $c_s(h, k_e)/c$ при $h \rightarrow 0$ стремится к кривой $c_{loc}(k_e)/c$. При увеличении значения h от нуля до бесконечности точка $c_s(h, k_e)/c$ сначала опускается от кривой

$c_{\text{лж}}(k_e)/c$ к кривой $c_{\text{лж}}^{\text{пр}}(k_e)/c$, достигает ее при $h = h_a^{\text{пр}}$, после чего опять поднимается к кривой $c_{\text{лж}}(k_e)/c$ и стремится к ней при $h \rightarrow \infty$. Точка же $c_0(h, k_e)/c$ появляется только при $h > h_a(k_e)$. При $h \rightarrow h_a + 0$ она стремится к единице, а при увеличении h от h_a до бесконечности точка $c_0(h, k_e)/c$ только опускается и стремится к кривой $c_{\text{лж}}(k_e)/c$ при $h \rightarrow \infty$. Тем самым, точки $c_s(h, k_e)/c$ и $c_a(h, k_e)/c$ при разных значениях k_e и h полностью заполняют соответствующие заштрихованные области на фиг. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Изд. Наука, 1982. 239 с.
2. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Изд. иностранной литературы, 1962. 280 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд. физ. – мат. литературы, 1963. 640 с.
4. Григорян Э. Х. Передача нагрузки от кусочно – однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. //Ученые записки ЕГУ, естеств. науки, 1979, N 3, С. 29 – 34.
5. Григорян Э. Х., Мелкумян А. С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краю полубесконечного металлического слоя. //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 58. N 4. С. 43 – 52.
6. Шилов Г. Е. Математический анализ, второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.
7. Lighthill M. J., An Introduction to Fourier analysis and generalized functions. Cambridge Univ. Press, 1959.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
26.01.2005