

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ
 НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ
 ПРОСТРАНСТВЕ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ

Мелкумян А. С.

Ա. Ս. Մելքունյան

Պիեզոէլեկտրական տարածությունում ոչ ստացիոնար ակուստիկական և էլեկտրական ալիքների դիֆրակցիան կիսանվերջ ճաշի վրա

Դիտարկվում է ուղղագծային ֆրոնտով էլեկտրական և սահբային ակուստիկական ոչ ստացիոնար ալիքների դիֆրակցիան բարուններից ազատ կիսատնվիրչ ճաշ պարունակող պիեզոէլեկտրիկ տարածությունում: Ի տարբերություն պիեզոէլեկտրիկ տարածությունում դինամիկ դրվածքով կատարված յազմառիվ հետազոտությունների, որտեղ դիտարկվում են ստացիոնար խնդիրներ, այստեղ հետազոտությունները կատարված են ոչ ստացիոնար դրվածքով խնդիրը հետազոտված է Լապլասի ձևախոլաթյունների, ինչպես նաև Վիներ-Հուպի և Կամյար - դե Հուիի մեթոդների կիրառմամբ: Մանրամասնությամբ օտունասիրված է ածրողական էլեկտրատաճգական դաշտի կառուցվածքը և նրա բաղկացուցիչ մասերի փոխդասվարվածության կախվածությունը ընկնող ալիքի քնույրիչ և անկնուն անկյանից: Ստացված են ժամանակից կախված էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի և մեխանիկական բուսունների ինտենսիվությունների գործակիցները ճաշի դազարուն: Բերված են քվային հաշիարկներ:

A. S. Melkumyan

Diffraction of nonstationary acoustic and electric waves in piezoelectric media on a semi-infinite crack

Рассматривается задача о дифракции электрической и сдвиговой акустической нестационарных волн с прямолинейным фронтом в пьезоэлектрическом пространстве от края полубесконечной трещины, свободной от напряжений. В отличие от многих предыдущих динамических задач в пьезоэлектрическом пространстве, где рассматриваются стационарные задачи, здесь исследования проведены в нестационарной постановке. Задача исследована с помощью преобразования Лапласа, а также применением методов Витора-Хюффа и Капьяра-де Хуна. Детально изучена зависимость строения взаимосопряженного электродвуртого поля и взаимного расположения его составных частей от вида падающей волны и от ее угла падения. Получены выражения интенсивностей электрической индукции в механических напряжениях при вершине трещины в зависимости от времени. Приведены численные расчеты.

1. Имеется пьезоэлектрическое пространство класса $6mm$ гексагональной симметрии, содержащей полубесконечную трещину, свободной от напряжений. Введем декартовую координатную систему $OXYZ$ с осью OZ , совпадающей с осью симметрии кристалла и с полуплоскостью $y = 0, x > 0, -\infty < z < \infty$, совпадающей с трещиной. Рассматривая антиплоские механические и плоские электрические волны в пьезоэлектрике, будем иметь

$$\vec{u} = (0, 0, w(x, y, t)), \vec{E} = (-\varphi_x(x, y, t), -\varphi_y(x, y, t), 0) \quad (1)$$

Введем обозначения $\bar{c}_{44} = c_{44} + e_{15}^2 / \epsilon_{11}, c_t = s_t^{-1} = 1 / \sqrt{\epsilon_{11} \mu_0},$

$$c_r = s_r^{-1} = \sqrt{c_{44} / \rho}, C_f = c_t^2 / (c_t^2 - c_r^2), \bar{c}_{44} = \bar{c}_{44} [1 - (1 - C_f)(e_{15}^2 / \bar{c}_{44} \epsilon_{11})],$$

$k_0^2 = e_{15}^2 C_f / (\epsilon_{11} \bar{c}_{44})$ и функцию

$$\psi(x, y, t) = \varphi(x, y, t) - \frac{e_{15} C_f}{\epsilon_{11}} w(x, y, t) \quad (2)$$

В нестационарном приближении [1] будем иметь следующую систему гиперболических уравнений:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

а также следующие соотношения:

$$\sigma_x = \bar{c}_{44} w_x + e_{15} \psi_x, \quad \sigma_y = \bar{c}_{44} w_y + e_{15} \psi_y \quad (4)$$

$$D_x = e_{15} (1 - C_f) w_x - \epsilon_{11} \psi_x, \quad D_y = e_{15} (1 - C_f) w_y - \epsilon_{11} \psi_y \quad (5)$$

Как видно из (1)–(5), при нестационарной постановке задачи в пьезоэлектрике распространяются как акустические $w(x, y, t)$, так и электрические $\psi(x, y, t)$ волны с конечными скоростями c_1 и c_2 соответственно.

В пьезоэлектрике класса бтп с полубесконечной трещиной (фиг. 1) распространяются акустическая и электрическая волны с прямолинейным фронтом

$$w^{(1)}(x, y, t) = w_0 G(t - s, [x \cos \alpha + y \sin \alpha]) \quad (6)$$

$$\psi^{(1)}(x, y, t) = \psi_0 G(t - s, [x \cos \alpha + y \sin \alpha]) \quad (7)$$

где α – угол падения. $G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$,

$g(\tau)$ – заданная функция, такая, что $g(\tau) = 0$ при $\tau < 0$.

Для решения задачи разделим пространство на две части: верхняя ($y > 0$) и нижняя ($y < 0$), удовлетворяя условия контакта

$$\sigma_{yx}(x, +0, t) = \sigma_{yx}(x, -0, t) = \sigma_-(x, t), \quad D_y(x, +0, t) = D_y(x, -0, t) \quad (8)$$

$$w(x, +0, t) - w(x, -0, t) = h_-(x, t), \quad \varphi(x, +0, t) = \varphi(x, -0, t) \quad (9)$$

где $\sigma_-(x, t) = 0$ при $x > 0$, $h_-(x, t) = 0$ при $x < 0$ и введем новые неизвестные функции $w^{(2)}(x, y, t)$ и $\psi^{(2)}(x, y, t)$ по формулам

$$w(x, y, t) = w^{(1)}(x, y, t) + w^{(2)}(x, y, t) \quad (10)$$

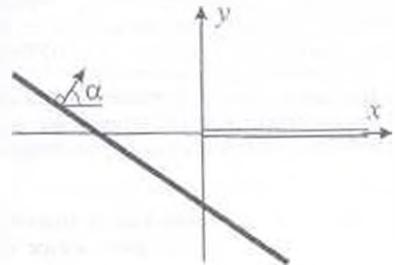
$$\psi(x, y, t) = \psi^{(1)}(x, y, t) + \psi^{(2)}(x, y, t) \quad (11)$$

Подставляя (2), (4)–(7), (10)–(11) в волновые уравнения (3) и условия контакта (8)–(9) и производя одностороннее преобразование Лапласа по времени, а также двухстороннее преобразование Лапласа по координате x , согласно формулам

$$f^*(x, p) = \int_0^\infty f(x, t) e^{-pt} dt, \quad f(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} f(x, p) e^{pt} dp \quad (12)$$

$$f^*(\zeta, p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, p) e^{p\zeta x} dx, \quad f(x, p) = \frac{p}{2\pi i} \int_{-\infty - i\infty}^{\infty - i\infty} f^*(\zeta, p) e^{p\zeta x} d\zeta$$

получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:



Фиг. 1 Фронт падающей волны и полубесконечная трещина

$$\frac{\partial^2 \hat{w}^{(s)*}}{\partial y^2} - p^2 a^2(\zeta) \hat{w}^{(s)*} = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{\psi}^{(s)*}}{\partial y^2} - p^2 e^2(\zeta) \hat{\psi}^{(s)*} = 0 \quad (13)$$

с преобразованными условиями контакта

$$\hat{w}_{,y}^{(s)*}(\zeta, +0, p) = \hat{w}_{,y}^{(s)*}(\zeta, -0, p) \quad (14)$$

$$\hat{w}^{(s)*}(\zeta, +0, p) - \hat{w}^{(s)*}(\zeta, -0, p) = \hat{h}^*(\zeta, p) \quad (15)$$

$$\hat{\psi}_{,y}^{(s)*}(\zeta, +0, p) = \hat{\psi}_{,y}^{(s)*}(\zeta, -0, p) \quad (16)$$

$$\hat{\psi}^{(s)*}(\zeta, +0, p) - \hat{\psi}^{(s)*}(\zeta, -0, p) = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} C_f \hat{h}^*(\zeta, p) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_{44} \hat{w}_{,y}^{(s)*}(\zeta, -0, p) + e_{15} \hat{\psi}_{,y}^{(s)*}(\zeta, -0, p) = \bar{s}^*(\zeta, p) + \\ + \frac{g^*(p)}{p} \left[\bar{c}_{44} \frac{w_0 s_2 \sin \alpha}{\zeta + s_2 \cos \alpha} + e_{15} \frac{\psi_0 s_2 \sin \alpha}{\zeta + s_2 \cos \alpha} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь и далее введены следующие обозначения: $a(\zeta) = \sqrt{s_1^2 - \zeta^2}$, $a(0) = s_1$, с разрезами $\text{Im} \zeta = 0, |\text{Re} \zeta| \geq s_1$, $e(\zeta) = \sqrt{s_2^2 - \zeta^2}$, $e(0) = s_2$, с разрезами $\text{Im} \zeta = 0, |\text{Re} \zeta| \geq s_2$, а также

$$s(x, t) = \sigma(x, t) - \bar{c}_{44} w_{,y}^{(s)}(x, 0, t) H(-x) - e_{15} \psi_{,y}^{(s)}(x, 0, t) H(-x) \quad (19)$$

Решая систему (13)-(18), получим следующие выражения для $\hat{w}^{(s)*}$ и

$$\hat{w}^{(s)*}(\zeta, y, p) = \text{sgn}(y) \frac{\hat{h}^*(\zeta, p)}{2} e^{-a(\zeta)y} \quad (20)$$

$$\hat{\psi}^{(s)*}(\zeta, y, p) = -\frac{e_{15} C_f}{\epsilon_{11}} \text{sgn}(y) \frac{\hat{h}^*(\zeta, p)}{2} e^{-e(\zeta)y} \quad (21)$$

а также уравнение Винера-Хопфа [2]

$$\begin{aligned} -(1 - k_2^2) R(\zeta) a(\zeta) \frac{\hat{h}^*(\zeta, p)}{2} p \bar{c}_{44} = \bar{s}^*(\zeta, p) + \\ + \frac{g^*(p)}{p} \left[\bar{c}_{44} \frac{w_0 s_2 \sin \alpha}{\zeta + s_2 \cos \alpha} + e_{15} \frac{\psi_0 s_2 \sin \alpha}{\zeta + s_2 \cos \alpha} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$R(\zeta) = \frac{1}{1 - k_2^2} \frac{a(\zeta) - k_2^2 e(\zeta)}{a(\zeta)} \quad (23)$$

Факторизируя функцию $R(\zeta)$ с применением интегралов типа Коши [3], получим

$$R(\zeta) = R_+(\zeta) R_-(\zeta) \quad (24)$$

где

$$R_+(\zeta) = \frac{s_{loc} \pm \zeta}{s_+ \pm \zeta} \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_{s_+}^{s_+} \arctan \left[k_e^2 \frac{\sqrt{\sigma^2 - s_+^2}}{\sqrt{s_+^2 - \sigma^2}} \right] \frac{d\sigma}{\sigma \pm \zeta} \right) \quad (25)$$

$$s_{loc} = \sqrt{\frac{s_+^2 - k_e^2 s_+^2}{1 - k_e^2}} > s_+ \quad (26)$$

Используя факторизацию (24)-(26) и решая уравнение (22) методом Винера-Хопфа [2], получим

$$\hat{h}_+^*(\zeta, p) = -\frac{g^*(p)}{p^2 \tilde{c}_{44}} \frac{2(1 - k_e^2)^{-1}}{R_+(\zeta) \sqrt{s_+ + \zeta}} \left[\frac{1}{\zeta + s_+ \cos \alpha} \frac{\tilde{c}_{44} w_0 \sqrt{2s_+} \sin(\alpha/2)}{R_-(-s_+ \cos \alpha)} + \frac{1}{\zeta + s_+ \cos \alpha} \frac{e_{15} \psi_0 s_+ \sin \alpha}{R_-(-s_+ \cos \alpha) \sqrt{s_+ + s_+ \cos \alpha}} \right] \quad (27)$$

$$\hat{s}_+^*(\zeta, p) = -\frac{g^*(p)}{p} \left[\frac{\tilde{c}_{44} w_0 s_+ \sin(\alpha)}{\zeta + s_+ \cos \alpha} \left(1 - \frac{R_+(\zeta) \sqrt{s_+ - \zeta}}{R_-(-s_+ \cos \alpha) \sqrt{2s_+ \cos(\alpha/2)}} \right) + \frac{e_{15} \psi_0 s_+ \sin \alpha}{\zeta + s_+ \cos \alpha} \left(1 - \frac{R_+(\zeta) \sqrt{s_+ - \zeta}}{R_-(-s_+ \cos \alpha) \sqrt{s_+ + s_+ \cos \alpha}} \right) \right] \quad (28)$$

Подставляя (27) в (20)-(21) и обращая двухстороннее преобразование Лапласа по координате x , получим

$$w^{(s)*}(x, y, p) = -\frac{\sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y)}{1 - k_e^2} \frac{g^*(p)}{p} W^{(s)*}(x, y, p) \quad (29)$$

$$\psi^{(s)*}(x, y, p) = \frac{e_{15} C_T}{\varepsilon_{11} \tilde{c}_{44}} \frac{\sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y)}{1 - k_e^2} \frac{g^*(p)}{p} \Psi^{(s)*}(x, y, p) \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} W^{(s)*}(x, y, p) &= W_0^{(s)*}(x, y, p) + W_1^{(s)*}(x, y, p) = \\ &= \frac{w_0 \sqrt{s_+}}{R_-(-s_+ \cos \alpha) \sqrt{2 \cos(\alpha/2)}} \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{e^{-p[a(\zeta)y - x]}}{(\zeta + s_+ \cos \alpha) R_+(\zeta) \sqrt{s_+ + \zeta}} d\zeta + \\ &+ \frac{e_{15}}{\tilde{c}_{44}} \frac{\psi_0 s_+}{R_-(-s_+ \cos \alpha) \sqrt{s_+ + s_+ \cos \alpha}} \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{e^{-p[a(\zeta)y - x]}}{(\zeta + s_+ \cos \alpha) R_+(\zeta) \sqrt{s_+ + \zeta}} d\zeta \end{aligned} \quad (31)$$

и

$$\begin{aligned} \Psi^{(s)*}(x, y, p) &= \Psi_0^{(s)*}(x, y, p) + \Psi_1^{(s)*}(x, y, p) = \\ &= \frac{\tilde{c}_{44} w_0 \sqrt{s_+}}{R_-(-s_+ \cos \alpha) \sqrt{2 \cos(\alpha/2)}} \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{e^{-p[a(\zeta)y - x]}}{(\zeta + s_+ \cos \alpha) R_+(\zeta) \sqrt{s_+ + \zeta}} d\zeta + \\ &+ \frac{e_{15} \psi_0 s_+}{R_-(-s_+ \cos \alpha) \sqrt{s_+ + s_+ \cos \alpha}} \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{e^{-p[a(\zeta)y - x]}}{(\zeta + s_+ \cos \alpha) R_+(\zeta) \sqrt{s_+ + \zeta}} d\zeta \end{aligned} \quad (32)$$

Отметим, что при $e_{15} \rightarrow 0$ полученные выражения переходят в соответствующие выражения для случая чисто упругого тела, приведенные в [4].

2. Теперь перейдем к обращению одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени в (29)-(32) методом Каняра - де Хуа [4]. В отдельности рассмотрим три случая: а) случай падения акустической волны (то есть $w_0 \neq 0, \psi_0 = 0$) при $\alpha < \arccos(s_t/s_s)$, б) случай падения акустической волны (то есть $w_0 \neq 0, \psi_0 = 0$) при $\alpha > \arccos(s_t/s_s)$ и в) случай падения электрической волны (то есть $w_0 = 0, \psi_0 \neq 0$).

а) случай падения акустической волны при $\alpha < \arccos(s_t/s_s)$

Для обращения одностороннего преобразования Лапласа в выражениях (29)-(32) методом Каняра - де Хуа перейдем к координатам r и θ по формулам $x = r \cos \theta, |y| = r \sin \theta, \theta \in [0, \pi]$ и введем следующие функции:

$$\zeta_{\pm}^{\pm}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \left(-t \cos \theta \pm i \sqrt{t^2 - s_t^2 r^2} \sin \theta \right), \quad t \in [s_t r, +\infty) \quad (33)$$

$$\zeta_{\pm\infty}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \left(-t \cos \theta + \sqrt{s_t^2 r^2 - t^2} \sin \theta \right), \quad t \in [t_{\pm\infty}, s_t r] \quad (34)$$

$$\zeta_{\pm\infty}^{\pm}(r, \theta, t) = \zeta_{\pm\infty}(r, \theta, t) \pm i\epsilon, \quad t \in [t_{\pm\infty}, s_t r] \quad (35)$$

$$\zeta_{\pm}^{\pm}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \left(-t \cos \theta \pm i \sqrt{t^2 - s_t^2 r^2} \sin \theta \right), \quad t \in [s_t r, +\infty) \quad (36)$$

где

$$t_{\pm\infty} = t_{\pm\infty}(r, \theta) = s_t x + \sqrt{s_t^2 - s_s^2} |y| \quad (37)$$

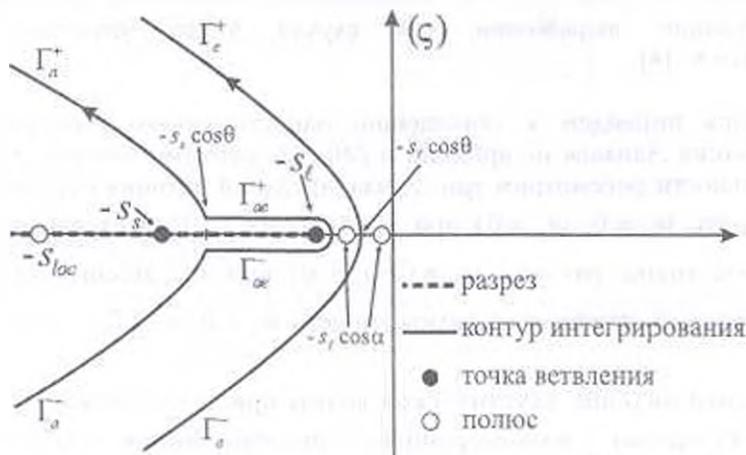
При этом будем иметь

$$\frac{\partial \zeta_{\pm}^{\pm}}{\partial t} = \pm i \frac{a(\zeta_{\pm}^{\pm}(r, \theta, t))}{\sqrt{t^2 - s_t^2 r^2}}, \quad \frac{\partial \zeta_{\pm\infty}}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_{\pm\infty}^{\pm}}{\partial t} = - \frac{a(\zeta_{\pm\infty}(r, \theta, t))}{\sqrt{s_t^2 r^2 - t^2}} \quad (38)$$

$$\frac{\partial \zeta_{\pm\infty}^{\pm}}{\partial t} = \pm i \frac{a(\zeta_{\pm\infty}^{\pm}(r, \theta, t))}{\sqrt{t^2 - s_t^2 r^2}} \quad (39)$$

Функции (33)-(36) представляют параметрические выражения контуров интегрирования Каняра - де Хуа [4,5], которые вместе с разрезами, точками ветвления и полюсами показаны на фиг. 2. Переходя от контуров интегрирования, параллельных мнимой оси к контуру $\Gamma_a^+ - \Gamma_a^- + \Gamma_{\infty}^+ + \Gamma_{\infty}^-$ в (31) и к контуру $\Gamma_t^+ + \Gamma_t^-$ в (32) и при этом учитывая вклады от полюсов и совершая замену переменной по формулам (33)-(36), после небольших преобразований получим

$$w^{(1)}(x, y, t) = -w_0 \frac{\operatorname{sgn}(y)}{1 - k_t^2} \frac{H(\alpha - \theta)}{s_{\infty}^2 - s_t^2 \cos^2 \alpha} G(t - s_t [x \cos \alpha + |y| \sin \alpha]) + \int_0^t G(t - \tau) w_{\infty}^{(1)}(x, y, \tau) d\tau \quad (40)$$



Фиг. 2. Контур интегрирования Каньяра-де Хупа в случае падающей акустической волны

где

$$w_{ab}^{(s)}(x, y, t) = -\frac{w_0 \sqrt{s_r} \sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y) (1 - k_r^2)^2}{\pi \sqrt{2} R_-(-s_r \cos \alpha) \cos(\alpha/2)} \times$$

$$\times \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{s_r - \zeta_a^+(t)}}{(\zeta_a^+(t) + s_r \cos \alpha) R_-(\zeta_a^+(t))} \right] \frac{H(t - s_r r)}{\sqrt{t^2 - s_r^2 r^2}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{Im} \left[\frac{\sqrt{s_r - \zeta_a^-(t)}}{(\zeta_a^-(t) - s_r \cos \alpha) R_+(\zeta_a^-(t))} \right] \frac{H(t - s_r r) - H(t - s_r r)}{\sqrt{s_r^2 r^2 - t^2}} H(\cos \theta - s_r s_r^+) \right\}$$

и

$$\psi^{(s)}(x, y, t) = \int_0^t G(t - \tau) \psi_{ab}^{(s)}(x, y, \tau) d\tau$$

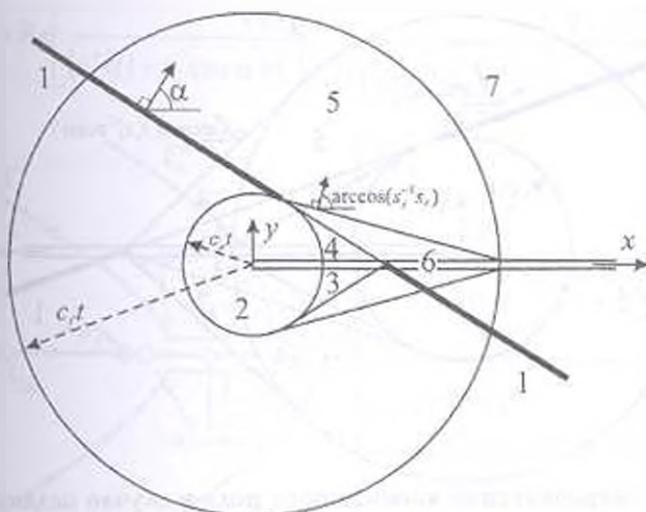
где

$$\psi_{ab}^{(s)}(x, y, t) = \frac{w_0 \sqrt{s_r}}{R(-s_r \cos \alpha)} \frac{\varepsilon_{11} C_r \sqrt{2} \sin(\alpha/2) \operatorname{sgn}(y)}{\varepsilon_{11} (1 - k_r^2)} \times$$

$$\times \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{\zeta_r^+(t)}}{(\zeta_r^+(t) + s_r \cos \alpha) R_+(\zeta_r^+(t)) \sqrt{s_r + \zeta_r^+(t)}} \right] \frac{H(t - s_r r)}{\sqrt{t^2 - s_r^2 r^2}}$$

Картина волновых фронтов, соответствующая данному случаю и полученная из анализа выражений (40)–(43), показана на фиг. 3, где проявляются следующие 7 зон:

1. Зона падающей волны
2. Зона дифрагированной акустической волны
3. Зона отраженной акустической волны
4. Зона пройденной акустической волны
5. Зона дифрагированной электрической волны
6. Зона головной волны
7. Невозмущенная зона



Фиг. 3. Электроакустическое волновое поле в случае падающей акустической волны при $\alpha < \arccos(s_1/s_2)$

б) случай падения акустической волны при $\alpha > \arccos(s_1/s_2)$

Производя вычисления, проходя путем, изложенным в пункте а), получим, что в данном случае

$$w^{(1)}(x, y, t) = -w_0 \frac{\operatorname{sgn}(y) G(t - s_1 [x \cos \alpha - |y| \sin \alpha])}{1 - k_1^2} \frac{R(-s_1 \cos \alpha)}{R(-s_1 \cos \alpha)} H(\alpha - \theta) + \int_0^t G(t - \tau) w_{\text{ас}}^{(1)}(x, y, \tau) d\tau \quad (44)$$

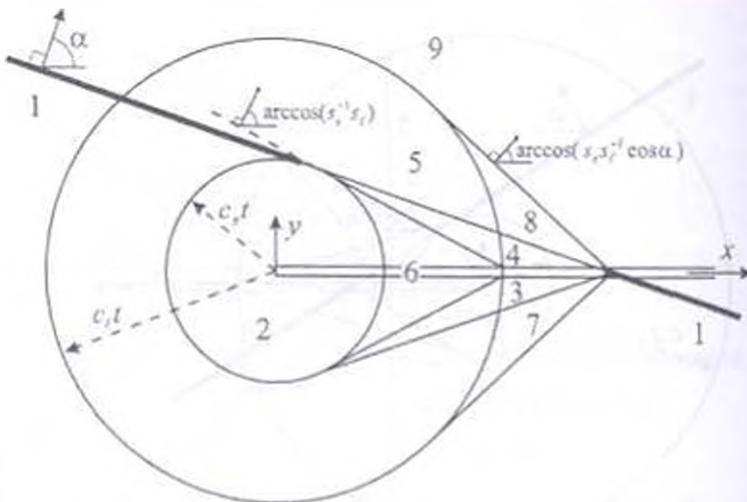
где $w_{\text{ас}}^{(1)}(x, y, t)$ дается формулой (41), и

$$\psi^{(1)}(x, y, t) = w_0 \frac{\epsilon_{11} C_1 \operatorname{sgn}(y) G(t - [s_2 x \cos \alpha + |y| \epsilon(s_2 \cos \alpha)])}{\epsilon_{11} (1 - k_1^2)} \frac{R(-s_2 \cos \alpha)}{R(-s_2 \cos \alpha)} \times H(\arccos(s_1 s_2^{-1} \cos \alpha) - \theta) + \int_0^t G(t - \tau) \psi_{\text{ас}}^{(1)}(x, y, \tau) d\tau \quad (45)$$

где $\psi_{\text{ас}}^{(1)}(x, y, t)$ дается формулой (43).

Картина волновых фронтов, соответствующая данному случаю и полученная из анализа выражений (44)–(45), показана на фиг. 4, где проявляются следующие 9 зон:

1. Зона падающей волны
2. Зона дифрагированной акустической волны
3. Зона отраженной акустической волны
4. Зона пройденной акустической волны
5. Зона дифрагированной электрической волны
6. Зона головной волны
7. Зона отраженной электрической волны
8. Зона пройденной электрической волны
9. Невозмущенная зона



Фиг. 4. Электроакустическое волновое поле в случае падающей акустической волны при $\alpha > \arccos(s_1/s_2)$

в) случая падения электрической волны

Взаимное расположение контуров интегрирования, разрезов, точек ветвления и полюсов для данного случая показано на фиг. 5. Производя расчеты, аналогичные тем, которые проведены в пунктах а) и б), получим, что в данном случае

$$w^{(1)}(x, y, t) = -\psi_0 \frac{s_1 s_2}{\epsilon_{20}} \frac{\sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y) G(t - [xs, \cos \alpha + |y| \alpha(s_1, \cos \alpha)])}{1 - k_1^2 R(-s_1, \cos \alpha) \alpha(s_1, \cos \alpha)} \times \\ \times H(\arccos[s_1/s_2, \cos \alpha] - \theta) + \int_0^t G(t - \tau) w_{\alpha}^{(1)}(x, y, \tau) d\tau \quad (46)$$

где

$$w_{\alpha}^{(1)}(x, y, t) = -\frac{\sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y) e_{15}}{1 - k_1^2} \frac{\psi_0 s_1}{\epsilon_{20} R(-s_1, \cos \alpha) \sqrt{s_1 + s_2 \cos \alpha}} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{s_1 - \zeta_1^-(t)}}{(\zeta_1^-(t) + s_1 \cos \alpha) R(\zeta_1^-(t))} \right] \frac{H(t - s_1 r)}{\sqrt{t^2 - s_1^2 r^2}} - \operatorname{Im} \left[\frac{1}{R(\zeta_{\alpha}^-(t))} \right] \right\} \times \\ \times \frac{\sqrt{s_1 - \zeta_{\alpha}^-(t)}}{\zeta_{\alpha}^-(t) + s_1 \cos \alpha} \frac{H(t - t_{\alpha}) - H(t - s_1 r)}{\pi \sqrt{s_1^2 r^2 - t^2}} H(\arccos[s_1/s_2] - \theta) \quad (47)$$

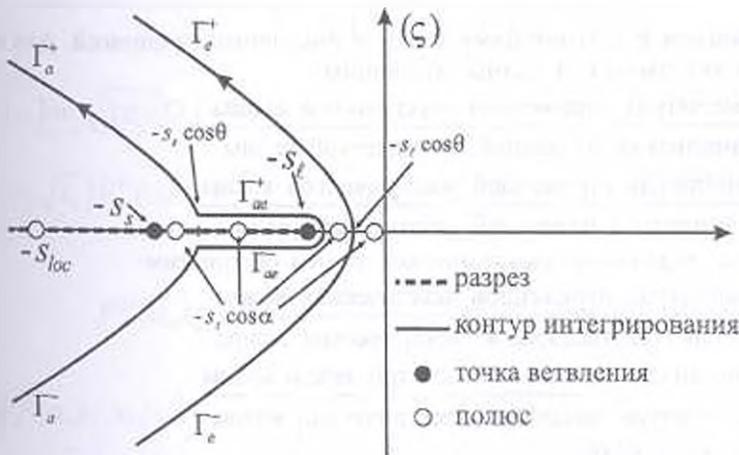
и

$$\psi^{(1)}(x, y, t) = \psi_0 s_1 k_1^2 \frac{\sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y) G(t - s_1 [x \cos \alpha + |y| \sin \alpha])}{1 - k_1^2 R(-s_1, \cos \alpha) \alpha(s_1, \cos \alpha)} H(\alpha - \theta) + \\ + \int_0^t G(t - \tau) \psi_{\alpha}^{(1)}(x, y, \tau) d\tau \quad (48)$$

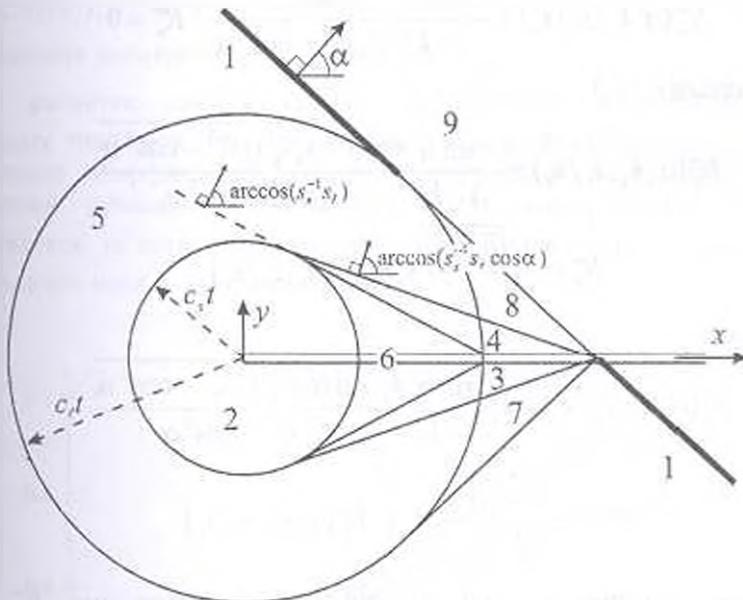
где

$$\psi_{\alpha}^{(1)}(x, y, t) = \frac{\psi_0 s_1 k_1^2}{\pi(1 - k_1^2)} \frac{\sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y)}{R(-s_1, \cos \alpha) \sqrt{s_1 + s_2 \cos \alpha}} \times$$

$$\times \operatorname{Re} \left[\frac{e(\zeta_e^*(t))}{(\zeta_e^*(t) + s_l \cos \alpha) R(\zeta_e^*(t)) \sqrt{s_l + \zeta_e^*(t)}} \right] \frac{H(t - s_l r)}{\sqrt{t^2 - s_l^2 r^2}} \quad (49)$$



Фиг. 5. Контур интегрирования Каняра – де Хуна в случае падающей электрической волны



Фиг. 6. Электроакустическое волновое поле в случае падающей электрической волны

Картина волновых фронтов, соответствующая данному случаю и полученная из анализа выражений (46)-(49), показана на фиг. 6, где проявляются следующие 9 зон

1. Зона падающей волны
2. Зона дифрагированной акустической волны
3. Зона отраженной акустической волны
4. Зона пройденной акустической волны
5. Зона дифрагированной электрической волны

6. Зона головной волны
7. Зона отраженной электрической волны
8. Зона пройденной электрической волны
9. Невозмущенная зона

3. Перейдем к дальнейшему анализу полученных решений. Для случая падающей акустической волны обозначим:

$$R_a^* = \frac{\text{амплитуда отраженной акустической волны}}{\text{амплитуда падающей акустической волны}}$$

$$R_e^* = \frac{\text{амплитуда отраженной электрической волны}}{\text{амплитуда падающей акустической волны}}$$

а для случая падающей электрической волны обозначим:

$$R_a^o = \frac{\text{амплитуда отраженной акустической волны}}{\text{амплитуда падающей электрической волны}}$$

$$R_e^o = \frac{\text{амплитуда отраженной электрической волны}}{\text{амплитуда падающей электрической волны}}$$

Из (40)-(49) следует:

при $\alpha < \arccos(s_t/s_s)$

$$R_a^o(\alpha, k_e, s_t/s_s) = -\frac{1}{1 - k_e^2 s_{\infty}^2 s_t^2 - \cos^2 \alpha} \sin^2 \alpha, \quad R_e^o = 0 \quad (50)$$

при $\alpha > \arccos(s_t/s_s)$

$$R_a^o(\alpha, k_e, s_t/s_s) = -\frac{\sin \alpha}{1 - k_e^2} \frac{\sin \alpha + k_e^2 \sqrt{s_t^2 s_s^2 - \cos^2 \alpha}}{s_{\infty}^2 s_t^2 - \cos^2 \alpha} \quad (51)$$

$$R_e^o = -\sqrt{\frac{\tilde{c}_{44} C_f}{\epsilon_{11}}} k_e R_a^o(\alpha, k_e, s_t/s_s) \quad (52)$$

при любом α

$$R_a^e(\alpha, k_e, s_t/s_s) = k_e^2 \frac{\sin \alpha}{1 - k_e^2} \frac{k_e^2 \sin \alpha + \sqrt{s_t^2 s_s^2 - \cos^2 \alpha}}{s_{\infty}^2 s_t^2 - \cos^2 \alpha} \quad (53)$$

$$R_e^e = -\left(\sqrt{\frac{\tilde{c}_{44} C_f}{\epsilon_{11}}} k_e \right)^{-1} R_a^e(\alpha, k_e, s_t/s_s) \quad (54)$$

Заметим, что при $\epsilon_{15} \rightarrow 0$ из (50)-(54) получаем, что $R_a^o \rightarrow -1$, $R_e^o \rightarrow 0$, $R_a^e \rightarrow 0$, $R_e^e \rightarrow 0$, то есть получаем результат для случая изотропного тела.

На основании решений (29)-(32) получаются следующие выражения для интенсивностей напряжений и электрической индукции:

$$\begin{aligned} K_e(\alpha, t) &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\pi |x|} \sigma_{zz}(x, 0, t) = \\ &= -\left[\left(\tilde{c}_{44} w_0 \sqrt{s_s} \right) F_a^o(\alpha, k_e, s_t/s_s) + \left(\epsilon_{15} \psi_0 \sqrt{s_t} \right) F_e^o(\alpha, k_e, s_t/s_s) \right] \int_0^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad (55) \end{aligned}$$

где

$$F_a^{\alpha}(\alpha, k_e, s_l/s_e) = \frac{2 \sin(\alpha/2)}{\sqrt{\pi} R(-s, \cos \alpha)} \quad (56)$$

$$F_s^{\alpha}(\alpha, k_e, s_l/s_e) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\alpha)}{R(-s, \cos \alpha) \sqrt{s_e s_l^{-1} + \cos \alpha}} \quad (57)$$

и

$$K_2(\alpha, t) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\pi/x} D_2(x, 0, t) = - \left[(\epsilon_{11} w_e \sqrt{s_e}) F_s^{\alpha}(\alpha, k_e, s_l/s_e) + (\epsilon_{11} \psi_e \sqrt{s_e}) F_s^{\alpha}(\alpha, k_e, s_l/s_e) \right] \int_0^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad (58)$$

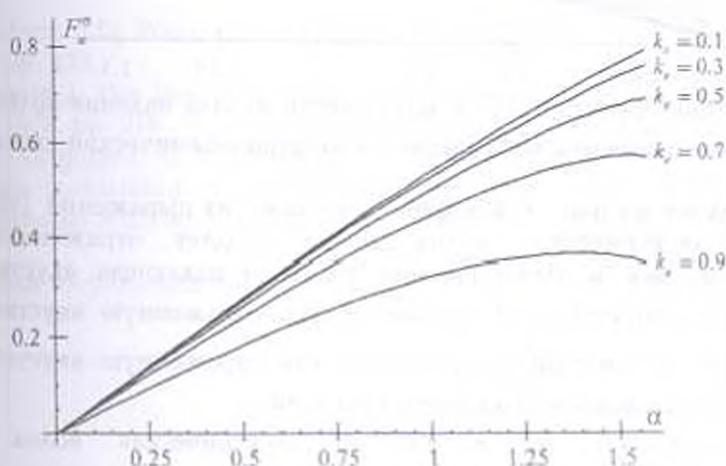
где

$$F_s^{\alpha}(\alpha, k_e, s_l/s_e) = \frac{1}{i - k_e^2} \frac{2 \sin(\alpha/2)}{\sqrt{\pi} R(-s, \cos \alpha)} \quad (59)$$

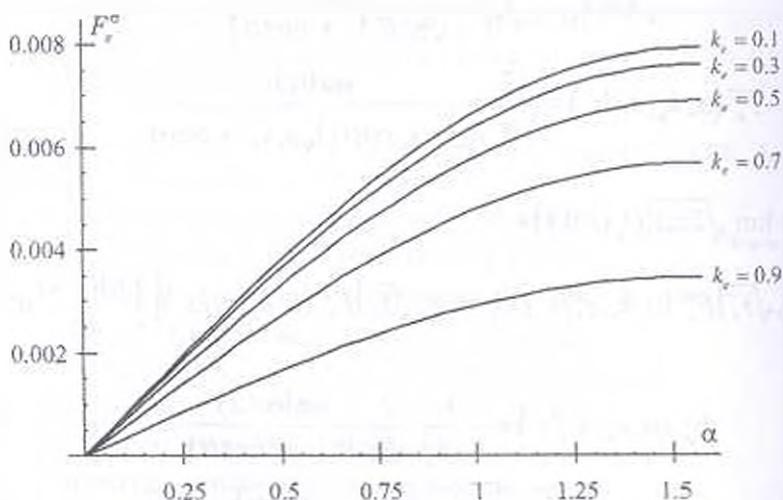
$$F_s^{\alpha}(\alpha, k_e, s_l/s_e) = \frac{k_e^2}{1 - k_e^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\alpha)}{C_e R(-s, \cos \alpha) \sqrt{s_e s_l^{-1} + \cos \alpha}} \quad (60)$$

На фиг. 7-10 показаны графики функции $F_s^{\alpha}(\alpha, k_e, s_l/s_e)$, $F_a^{\alpha}(\alpha, k_e, s_l/s_e)$, $F_s^{\alpha}(\alpha, k_e, s_l/s_e)$, $F_s^{\alpha}(\alpha, k_e, s_l/s_e)$ при разных значениях коэффициента электромеханической связи k_e .

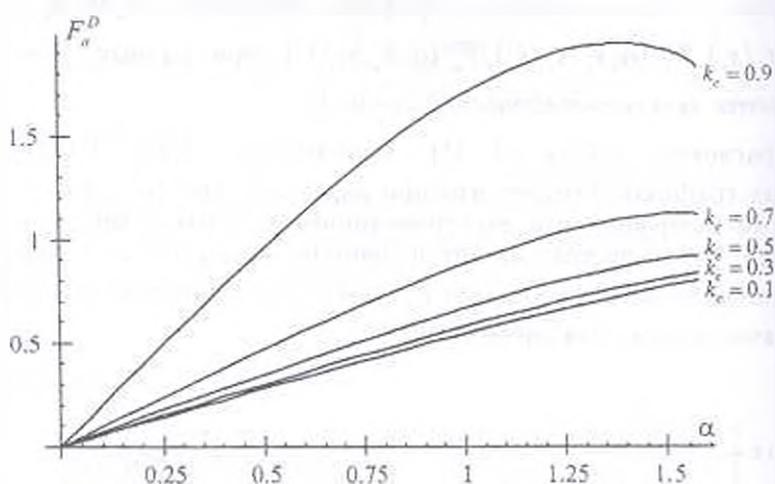
При расчетах, следуя [1], принималось $s_l/s_e = 0,0001$. Из полученных графиков следует, что при падающей акустической волне с увеличением коэффициента электромеханической связи интенсивность напряжений уменьшается, а интенсивность электрической индукции увеличивается, то есть чем больше k_e , тем больше энергии переходит от акустического поля к электрическому.



Фиг. 7. График функции F_s^{α} в зависимости от угла падения волны при разных значениях коэффициента электромеханической связи



Фиг. 8. График функции F_α^σ в зависимости от угла падения волны при разных значениях коэффициента электромеханической связи

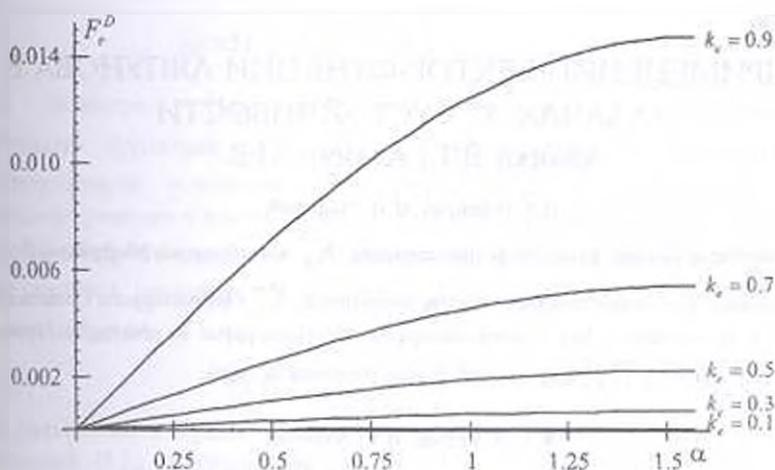


Фиг. 9. График функции F_α^D в зависимости от угла падения волны при разных значениях коэффициента электромеханической связи

Как следует из фиг. 3, 4 и фиг. 6, а также из выражений (50) – (54), падающая электрическая волна всегда создает отраженные как акустическую, так и электрическую волны, а падающая акустическая волна при $\alpha < \arccos(s_1/s_2)$ создает только отраженную акустическую волну, а при $\alpha > \arccos(s_1/s_2)$ создает как отраженную акустическую волну, так и отраженную электрическую волну.

Если $s_1/s_2 \rightarrow 0$, то в фиг. 3 электрическая волна будет распространяться с бесконечно большой скоростью и создаст фон, то есть неволновую часть, а фронт головной волны станет параллельным трещине. При этом головная волна проявится как неволновая часть в направлении трещины с конечной скоростью распространения в

направлении, перпендикулярном трещине. Таким образом, полученные здесь результаты при предельном переходе $s_2/s_3 \rightarrow 0$ переходят в соответствующие результаты работы [6] и дают более детальное объяснение строению волнового поля, полученного в [6].



Фиг. 10. График функции F_e^D в зависимости от угла падения волны при разных значениях коэффициента электромеханической связи

ЛИТЕРАТУРА

1. Li S. The Electromagneto-acoustic Surface Wave In A Piezoelectric Medium: The Bleustein-Gulyaev Mode. //Journal of Applied Physics, 1996. N 80(9), pp. 5264-5269.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Изд. иностранной литературы, 1962. 280 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. 640 с.
4. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. North-Holland Pub., 1984. pp. 425.
5. Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. North-Holland Pub., 1978. pp. 618.
6. E Kh. Grigoryan, A. S. Melkumyan On wave diffraction in a piezoelectric medium containing a semi-infinite electrode. //Proceedings of the International Seminar "Days on Diffraction 2004", 2004, pp. 99-109

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
6.12.2004